

Onduletas e Processamento de Sinal

M. J. Soares*

Departamento de Matemática, Universidade do Minho, 4710 Braga, Portugal

Resumo

A chamada *Teoria das onduletas* constitui um desenvolvimento recente e fascinante da Matemática, com aplicações importantes nas mais diversas áreas das Ciências e Engenharia.

O objectivo deste artigo é apresentar, de uma forma muito condensada, os principais resultados da teoria das onduletas, dando especial ênfase às suas ligações com o processamento de sinal.

1 Notações e resultados preliminares

No que se segue, $L^2(\mathbb{R})$ denota o espaço das funções mensuráveis f (definidas na recta real \mathbb{R}) de quadrado integrável, com produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt. \quad (1)$$

Como se sabe, um dos objectivos fundamentais do processamento de um sinal consiste na extracção de informação relevante sobre esse sinal, através da sua transformação. Por exemplo, no caso de um sinal analógico de energia finita (ou seja, em linguagem matemática, de uma função $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$), uma ferramenta importante para esse fim é a transformada de Fourier, definida por

$$\widehat{f}(\xi) = \{\mathcal{F}f\}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} f(t) dt, \quad (2)$$

a qual nos dá uma descrição do comportamento do sinal em frequência (espectro do sinal).

Na representação espectral de um sinal através da sua transformada de Fourier, perde-se, todavia, toda a informação desse sinal no tempo. Assim, em muitas aplicações, tais como análise de sinais não-estacionários ou processamento de sinal em tempo real, a simples utilização da transformada de Fourier não é adequada.

Um processo clássico de obter localização de frequências no tempo é utilizar a chamada transformada de Fourier em tempo curto. Neste caso, é escolhida uma função janela g isto é, uma função bem localizada no tempo e na frequência¹ que, ao ser transladada e multi-

plicada pela função f selecciona pequenas secções desta função, determinado-se depois a transformada de Fourier de cada uma delas. A transformada de Fourier em tempo curto transforma, assim, a função f numa função bi-dimensional definida (no plano tempo-frequência) por:

$$\{\mathcal{F}_g f\}(\tau, \xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t-\tau)} e^{-i\xi t} dt. \quad (3)$$

Considere-se a família de funções $g_{\tau, \xi}$ definidas por

$$g_{\tau, \xi}(t) := e^{i\xi t} g(t - \tau), \quad \xi, \tau \in \mathbb{R}.$$

É imediato reconhecer que a transformada de Fourier em tempo curto pode ser definida através do produto interno de f com estas funções, isto é

$$\{\mathcal{F}_g f\}(\tau, \xi) = \langle f, g_{\tau, \xi} \rangle.$$

A fórmula (3) indica-nos que a transformada de Fourier em tempo curto nos dá informação sobre o conteúdo de f próximo do instante τ e da frequência ξ . Naturalmente, a precisão com que esta informação pode ser obtida depende do tamanho da janela g . Mais importante aqui, é notar que, uma vez escolhida uma janela, a resolução tempo-frequência é fixa em todo o plano, pois é usada a mesma janela para todas as frequências. Se tivermos um sinal com componentes quase estacionárias associadas a pequenas variações bruscas, então para o primeiro tipo de componentes seria adequado o uso de janelas largas (fraca resolução no tempo e boa localização na frequência), enquanto para analisar convenientemente as variações bruscas seriam necessárias janelas com boa localização no tempo e consequente fraca resolução na frequência. A transformada de Fourier em tempo curto não é, assim, apropriada para o estudo deste tipo de sinais.

2 Transformada contínua com onduleta

Acabámos de ver que a rigidez das janelas tempo - frequência associadas com a transformada de Fourier em tempo curto constitui uma limitação dessa transformada. A transformada contínua com onduleta, que iremos agora descrever, permite ultrapassar essa dificuldade, originando uma análise com janelas *flexíveis* cuja largura e altura se adaptam às frequências.

A ideia da transformada contínua com onduleta é cisão teremos na frequência, isto é, menos localizada será a função $\widehat{g}(\xi)$.

*Com apoio de CMAT – Centro de Matemática da Universidade do Minho

¹Pelo bem conhecido princípio de incerteza de Heisenberg, a capacidade de localização simultânea no tempo e frequência é limitada. Quanto maior precisão exigirmos no tempo, ou seja, quanto mais concentrada for a função $g(t)$, menor pre-

também, como no caso da transformada de Fourier em tempo curto, calcular o produto interno de f com uma família de funções $\psi_{a,\tau}$ dependentes de dois parâmetros. Neste caso, no entanto, essas funções $\psi_{a,\tau}$ são obtidas de uma função básica ψ (chamada *onduleta mãe*) por dilatações ou contracções – isto é, mudanças de *escala* – controladas pelo parâmetro a e *translações*, controladas pelo parâmetro τ . Mais precisamente, consideramos

$$\psi_{a,\tau} := |a|^{-1/2} \psi \left(\frac{t-\tau}{a} \right), \quad a, \tau \in \mathbb{R}, a \neq 0, \quad (4)$$

e definimos a *transformada contínua com onduleta* ψ por:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{W}_\psi f\}(a, \tau) &:= \langle f, \psi_{a,\tau} \rangle \\ &= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi \left(\frac{t-\tau}{a} \right)} dt. \end{aligned} \quad (5)$$

(O factor $|a|^{-1/2}$ é introduzido para que as diversas funções tenham todas a mesma energia.)

Nota: No que se segue, consideramos apenas onduletas ψ reais, e parâmetros de escala $a > 0$.

As propriedades da transformada contínua com onduleta dependem, naturalmente, das propriedades da onduleta mãe ψ (também chamada onduleta analisadora). As qualidades que se exigem para uma "boa mãe" ψ são que ela seja bem localizada no tempo e na frequência, devendo ainda satisfazer a chamada condição de admissibilidade:²

$$C_\psi := \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < \infty. \quad (6)$$

Na prática, para onduletas que satisfaçam razoáveis condições de decaimento, exigir que ψ satisfaça a condição de admissibilidade (6) é equivalente a exigir que $\widehat{\psi}(0) = 0$, ou seja, que $\int \psi(t) dt = 0$; veja, e.g. [11, p. 24]. Isto significa, portanto, que ψ deve, de algum modo, oscilar, isto é, comportar-se como uma onda. Esta propriedade, juntamente com ao facto de ψ decair rapidamente, justifica a escolha da palavra *wavelet* (em inglês) para designar este tipo de funções.

Localização tempo-escala

Se ψ for uma função janela localizada em torno de zero, é imediato reconhecer que a função $\psi_{a,\tau}$ estará centrada em τ e estreitará ou alargará conforme o parâmetro a seja menor ou maior que 1. Assim, quanto menor for a *escala*, mais concentrada será a função $\psi_{a,\tau}$. A transformada contínua com onduleta fornece, assim, uma descrição *tempo-escala* de f baseada em janelas $\psi_{a,\tau}$ cuja largura se ajusta à escala: janelas estreitas para pequenas escalas e janelas largas para grandes escalas.

Note-se que existe uma relação inversa entre *escala*

e *frequência*. Basta notar que, de acordo com propriedades bem conhecidas da transformada de Fourier $\widehat{\psi(t/a)}(\xi) = a\widehat{\psi}(a\xi)$. Assim podemos dizer que as janelas $\psi_{a,\tau}$ se alargam para *baixas frequências* e estreitam para *altas frequências*.

Inversão da transformada \mathcal{W}_ψ

Ao efectuar a transformação de um sinal, é, naturalmente, importante dispor de um processo de recuperar o sinal depois de transformado. Assumindo que ψ é admissível, pode provar-se que a correspondência $f \rightarrow \{\mathcal{W}_\psi f\}$ é invertível no seu contradomínio, sendo a função f completamente caracterizada pelos valores de $\{\mathcal{W}_\psi f\}(\tau, a)$ e podendo ser recuperada através do uso da fórmula

$$f = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \{\mathcal{W}_\psi f\}(a, \tau) \psi_{a,\tau} \frac{da}{a^2} d\tau; \quad (7)$$

veja, e.g. [11, pp. 24-27].³

A fórmula (7) pode ser interpretada como:

- uma fórmula de *reconstrução* de f , sabida a sua transformada integral com onduleta, $\{\mathcal{W}_\psi f\}(\tau, a)$, para todos os valores de $a \in \mathbb{R}^+$ e $\tau \in \mathbb{R}$.
- uma fórmula de *decomposição* de f como uma sobreposição das funções $\psi_{a,\tau}$ (sendo os coeficientes dessa sobreposição os valores da transformada integral).

3 Transformada discreta com onduleta: onduletas ortogonais

A transformada contínua com onduleta é, naturalmente, redundante (basta notar que uma função de uma variável é transformada numa função de duas variáveis). Na prática, para obter algoritmos eficientes para determinar a transformada de uma função f e reconstruir f à custa dos valores da transformada, devemos restringir os parâmetros de escala a e de translação τ a valores discretos, ou seja, calcular $\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \{\mathcal{W}_\psi f\}(a, \tau)$ apenas numa rede discreta do plano tempo-escala. Uma escolha usual para essa discretização é a chamada *rede diádica*, definida por

$$a = 2^{-j}, \quad \tau = 2^{-j}k; \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Nesse caso, temos então a seguinte família de funções

$$\psi_{jk} := 2^{j/2} \psi(2^j t - k); \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Neste pequeno resumo, trataremos apenas das chamadas *onduletas ortogonais*, isto é, funções ψ para as quais ψ_{jk} definidas por (9) formem uma base ortonor-

²Esta condição é essencial para a existência de uma inversa da transformada $\mathcal{W}_\psi f$

³Resultado análogo pode, também, ser obtido para onduletas complexas, mas é então necessário o uso de escalas a negativas.

mada de $L^2(\mathbb{R})$. Nesse caso, tem-se, naturalmente,

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk} \\ &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \{\mathcal{W}_{\psi} f\}(2^{-j}, 2^{-j}k) \psi_{jk}, \end{aligned} \quad (10)$$

ou seja, tal como no caso contínuo, uma única fórmula expressa a decomposição e a reconstrução de f .

Historicamente, a primeira base ortonormada de onduletas construída é a bem conhecida base de Haar, introduzida muito antes do aparecimento do conceito de onduleta; ver [12]. Esta onduleta tem óptimas propriedades de localização no tempo, mas a sua localização na frequência é muito fraca.

A chamada onduleta de Shannon (a que corresponde a base ortonormada de $L^2(\mathbb{R})$ de Littlewood-Paley) é outro exemplo de uma onduleta ortogonal, sendo as suas propriedades de localização tempo-frequência como que complementares das da onduleta de Haar; ver, e.g.[11, pp. 115-116].

Na última década, foram construídas várias bases ortonormadas de onduletas para $L^2(\mathbb{R})$ que conseguem conjugar as melhores características da base de Haar e da base de Shannon (i.e., que têm simultaneamente boas propriedades de localização no tempo e na frequência). Como exemplo, podemos referir as onduletas descobertas por Stromberg [23], Y. Meyer [17], G. Battle [3] e P. G. Lemarié [14]. As primeiras construções de bases ortonormadas de onduletas parecem um pouco *milagrosas*. No entanto, o aparecimento, em finais de 1986, do conceito de análise de multi-resolução (AMR), introduzido por Mallat e Meyer [15, 18], vem clarificar esta situação. De facto, a análise multi-resolução é uma estrutura que permite dar uma explicação satisfatória de todas estas construções, fornecendo também uma ferramenta para a construção de novas bases.

4 Análise multi-resolução (AMR)

Uma análise multi-resolução $\{V_j, \phi\}$ de $L^2(\mathbb{R})$ consiste numa sequência $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespaços fechados de $L^2(\mathbb{R})$ e numa função associada ϕ (chamada *função esca-la*), satisfazendo as seguintes propriedades:

AMR1 $V_j \subset V_{j+1}$

AMR2 $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

AMR3 $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$.

AMR4 $v(t) \in V_j \iff v(2t) \in V_{j+1}$.

AMR5 $\exists \phi \in V_0$ tal que a colecção $\{\phi(t-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormada de V_0 .

Façamos algumas observações simples sobre esta definição.

- Facilmente se verifica que, para cada $j \in \mathbb{Z}$, as funções $\phi_{jk}(t) := 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$ constituem uma base ortonormada de V_j .
- Como $\phi \in V_0 \subset V_1$, terá, então, de existir uma sequência (h_k) tal que

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k). \quad (11)$$

Note-se que os coeficientes h_k são dados por $h_k = \langle \phi(t), \sqrt{2} \phi(2t - k) \rangle$. A equação funcional (11) é chamada equação de dilatação, de refinamento ou de dupla escala para a função ϕ .

- As propriedades de uma AMR permitem-nos escolher uma função f_j em cada um dos espaços V_j para aproximar uma dada função $f \in L^2(\mathbb{R})$. Uma maneira de construir f_j será, por exemplo, através da projecção ortogonal no espaço V_j , isto é, tomar $f_j = P_j f$ onde

$$P_j f := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{jk} \rangle \phi_{jk}. \quad (12)$$

As propriedades AMR2 e AMR3 garantem que $\lim_{j \rightarrow +\infty} P_j f = f$ e $\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = 0$.

- As propriedades AMR4 e AMR5 significam que todos os subespaços aproximadores V_j são, no fundo, versões *dilatadas* de um espaço básico V_0 e que, além disso, cada um desses subespaços V_j é invariante por translações proporcionais a 2^{-j} . São precisamente estas propriedades que dão o carácter de multi-resolução a esta cadeia de subespaços.

Suponhamos, então, que dispomos de uma AMR $\{(V_j), \phi\}$ e denotemos por W_j o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1} , isto é, seja W_j o subespaço de $L^2(\mathbb{R})$

tal que $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$.

Da definição de W_j , e atendendo ao facto de os espaços V_j estarem encaixados, concluímos de imediato que os subespaços W_j são mutuamente ortogonais. Das propriedades AMR2 e AMR3 podemos, então, concluir que o espaço $L^2(\mathbb{R})$ admite a seguinte decomposição como soma ortogonal:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j. \quad (13)$$

Assim, se dispusermos de uma base ortonormada para cada um dos espaços W_j , a colecção dessas base formar-á uma base ortonormada do espaço $L^2(\mathbb{R})$.

Mas, os espaços W_j herdam, dos respectivos V_j , a propriedade de dilatação AMR4. Isto significa que, se for possível encontrar uma função $\psi \in W_0$ tal que $\{\psi(t-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ seja uma base ortonormada de W_0 , a

coleção $\{\psi_{jk}(t) := 2^{j/2}\psi(2^j t - k), k \in \mathbb{Z}\}$, constituirá uma base ortonormada de W_j , sendo, portanto, o conjunto $\{\psi_{jk} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ uma base ortonormada de $L^2(\mathbb{R})$, ou, por outras palavras, sendo ψ uma onduleta ortogonal. O princípio básico de uma AMR é que tal função ψ existe sempre e pode ser construída explicitamente.

Mais precisamente, pode provar-se o seguinte resultado; ver, e.g., [11, p. 135].

Teorema 1 *Dada uma AMR $\{V_j, \phi\}$, e sendo (h_k) a sequência dos coeficientes da equação de refinamento (11) da função escala ϕ , a função ψ definida por*

$$\psi(t) := \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} \phi(2t - k) \quad (14)$$

é uma onduleta ortogonal. Mais precisamente, as funções ψ_{jk} definidas por

$$\psi_{jk}(t) := 2^{j/2}\psi(2^j t - k); \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (15)$$

formam uma base ortonormada de $L^2(\mathbb{R})$.

O teorema anterior indica-nos como, dada uma AMR, é possível encontrar uma base ortonormada de onduletas. A questão que se coloca, naturalmente, é a de saber como encontrar uma AMR.

É natural tentar começar a construção de uma AMR a partir da função escala ϕ : de facto, V_0 pode construir-se de $\phi(t - k)$ e os restantes V_j poderão então ser construídos de V_0 por dilatação. Esta é, precisamente, a estratégia adoptada na construção de muitas onduletas ortogonais. Para que todas as propriedades de uma AMR se verifiquem, a função ϕ terá, no entanto, de ser escolhida adequadamente; veja, e.g. [11, pp. 142-143], onde são discutidas condições sobre ϕ suficientes para a obtenção de uma AMR. Em particular, é usando essa abordagem, que I. Daubechies constrói, em 1988, uma importante classe de onduletas ortogonais, actualmente muito utilizadas e associadas ao seu nome; veja [10].

5 Transformada rápida com onduletas

Vejamos agora como o esquema de AMR permite obter um algoritmo muito eficiente para a expansão de um sinal discreto numa base de onduletas. Este algoritmo, que está intimamente ligado com sistemas de decomposição de sinais em duas bandas, foi introduzido por Mallat, em [16].

Consideremos, então, uma AMR (V_j) com função escala ϕ e onduleta mãe ψ , e denotemos por P_j e Q_j os operadores de projecção ortogonal nos espaços V_j e W_j , respectivamente, isto é, sejam

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^j \phi_{jk}, \quad Q_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi_{jk}, \quad (16)$$

onde

$$c_k^j = \langle f, \phi_{jk} \rangle, \quad d_k^j = \langle f, \psi_{jk} \rangle. \quad (17)$$

Se os dados a serem analisados são discretos, isto é, são uma sequência (c_k) , $k \in \mathbb{Z}$, podemos sempre encará-los como representando a aproximação de um sinal contínuo $f(t)$ num determinado espaço aproximador V_J , cuja escala está relacionada com o intervalo de amostragem. Por uma questão de simplicidade, consideramos que essa escala é $J = 0$, ou seja, partimos de

$$f_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_{0k}. \quad (18)$$

Essa aproximação pode, então, ser decomposta como soma de uma aproximação f_{-1} , de mais fraca resolução, com uma função $w_{-1} \in W_{-1}$ que "contém" a informação que é perdida ao representar f na escala mais grosseira. Este processo pode ser repetido sucessivamente, até se chegar a uma escala $-J$ desejada. Assim, o que se pretende é obter a seguinte decomposição

$$f_0 = \sum_k c_k^{-J} \phi_{-J,k} + \sum_{j=-1}^{-J} \sum_k d_k^j \psi_{jk}, \quad (19)$$

ou, mais precisamente, obter as sequências (c_k^{-J}) e (d_k^j) ; $j = -1, \dots, -J$, a partir da sequência inicial (c_k) .

O algoritmo da transformada rápida com onduletas baseia-se no uso das equações (11) e (14). Com efeito, usando essas equações, facilmente se deduzem as seguintes fórmulas de decomposição

$$c_k^{j-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{2n-k} c_n^j, \quad d_k^{j-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} c_n^j, \quad (20)$$

onde

$$g_n = (-1)^n h_{1-n}. \quad (21)$$

Estas relações mostram que o cálculo do coeficientes pode ser feito recursivamente, partindo da sequência $(c_k^0) := (c_k)$. Esquemáticamente, temos

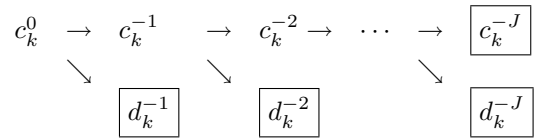


Figura 1: Esquema de decomposição

A transformação anterior pode ser invertida, ou seja, é possível reconstruir o sinal original (c_k) , partindo do conhecimento das sequências (c_k^{-J}) e (d_k^j) ; $j = -1, \dots, -J$. Por outras palavras, o sinal pode ser recuperado juntando "camadas" sucessivas de pormenores a uma sua versão grosseira. A fórmula que descreve essa transformada inversa deduz-se facilmente das equações (11) e (14) e é a seguinte:

$$c_k^j = \sum_n (h_{k-2n} c_n^{j-1} + g_{k-2n} d_n^{j-1}). \quad (22)$$

Relativamente a estes algoritmos de decomposição e reconstrução, salientamos o seguinte:

- Como as fórmulas (20) – (22) mostram, para a sua utilização há apenas necessidade do conhecimento dos coeficientes (h_n) da equação de refinamento da função escala ϕ , não sendo necessário dispor de uma fórmula explícita para ϕ ou para a onduleta ψ .
- As fórmulas (20) e (22) definem, respectivamente, os passos de *análise* e *síntese* de um esquema de filtragem de duas bandas uniformes, com capacidade de reconstrução perfeita; mais precisamente, em virtude de (21), trata-se de filtros de quadratura conjugada (CQF). Para mais pormenores sobre as ligações entre a teoria das onduletas e a teoria de bancos de filtros, sugerimos a leitura dos artigos [22, 24, 25, 26], os quais contêm uma vasta lista de referências adicionais. O livro de Cohen e Ryan [6] constitui também uma excelente referência sobre este assunto.
- Na prática, é desejável o uso de filtros (h_n) com resposta a impulso finita, os quais correspondem a onduletas com *suporte compacto*. A caracterização completa das onduletas ortogonais com suporte compacto foi desenvolvida por Ingrid Daubechies [10].
- Uma característica importante destes algoritmos é a sua baixa complexidade e facilidade de implementação. De facto, pode provar-se que o número de operações envolvidas na sua utilização é de ordem $O(N)$, onde N designa o comprimento total da sequência inicial (c_k) (a qual, na prática, terá sempre de ser considerada finita).

6 Conclusão

Por evidentes limitações de espaço, apenas apresentámos resultados referentes a onduletas numa variável. A extensão para onduletas de várias variáveis, imprescindível para diversas aplicações, nomeadamente, processamento de imagem, pode ser vista, por exemplo, em [15, 16] e [18].

Também, como já referimos, apenas tratámos de onduletas ortogonais. Uma generalização importante, que permite colmatar algumas das limitações associadas ao uso deste tipo de onduletas, são as chamadas onduletas *bi-ortogonais*, introduzidas por Cohen, Daubechies e Feauveau, em [5].

É importante também referir uma construção que generaliza o conceito de onduletas e que se deve a Coifman e Meyer – as chamadas *wavelet packets*; veja [7, 8, 9].

A teoria das onduletas foi apresentada para funções definidas em toda a recta real. Em muitas aplicações, no entanto, estaremos interessados em problemas “confinados” a um intervalo. Por exemplo, quando tratamos

de equações diferenciais, a integração é feita num intervalo, as imagens estão concentradas em rectângulos, etc. A aplicação de onduletas a estas situações requer, portanto, algumas modificações. Algumas soluções para este problema foram apresentadas em [1, 2, 4, 20, 21].

Finalmente, gostaríamos de fazer referência à existência de alguns pacotes de *software*, disponíveis para quem deseje explorar a utilização de onduletas nas mais diversas de aplicações. De realçar, o *Wavelet Explorer*, que utiliza a linguagem *Mathematica*, a *Wavelet Toolbox*, para os utilizadores de MATLAB e ainda o *Wavelet Packet Laboratory for Windows*, cujos manuais de utilização, [27, 28, 29], constituem também preciosos auxiliares ao estudo desta fascinante teoria.

Referências

- [1] P. Auscher, “Wavelets with boundary conditions on the interval”, in *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, C. K. Chui (Ed.), Boston: Academic Press, 1992, pp. 237-256.
- [2] P. Auscher, “Ondelettes à support compact et conditions aux limites”, *J. Funct. Anal.*, **111**, pp. 29-43, 1993.
- [3] G. Battle, “A block spin construction of ondelettes. Part I: Lemarié functions”, *Comm. Math. Phys.*, **110**, pp. 601-615, 1987.
- [4] C. Cohen, I. Daubechies e J. C. Feauveau, “Biorthogonal bases of compactly supported wavelets”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **45**, pp. 485-500, 1992.
- [5] C. Cohen, I. Daubechies e P. Vial “Wavelets and fast wavelet transform on an interval”, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **1**, pp. 54-81, 1993.
- [6] A. Cohen e R. D. Ryan, *Wavelets and Multiscale Signal Processing*, London: Chapman & Hall, 1995.
- [7] R. Coifman, Y. Meyer e M. V. Wickerhauser, “Wavelet analysis and signal processing”, in *Wavelets and their Applications*, M. B. Ruskai et al. (Eds), Boston: Jones and Bartlett, pp. 173-178, 1992.
- [8] R. Coifman, Y. Meyer e M. V. Wickerhauser, “Size properties of wavelet packets”, in *Wavelets and their Applications*, M. B. Ruskai et al. (Eds), Boston: Jones and Bartlett, pp. 453-470, 1992.
- [9] R. Coifman e M. V. Wickerhauser, “Entropy-based algorithms for best basis selection”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **38**, pp. 713-718, 1992.

- [10] I. Daubechies, "Orthonormal bases of compactly supported wavelets", *Comm. Pure Appl. Math.*, **41**, pp. 909-996, 1988.
- [11] I. Daubechies, *Ten lectures on Waveletes*, Philadelphia: SIAM, 1992.
- [12] A. Haar, "Zur Theorie der orthogonalen Funktionen Systeme", *Math. Ann.*, **69**, pp. 331-371, 1910.
- [13] J. Kovacevic e M. Vetterli, "Non-separable multi-dimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for \mathbb{R}^n ", *IEEE Trans. Inform. Theory*, **38**, pp. 533-555, 1992.
- [14] P. G. Lemarié, "Une nouvelle base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^n)$ ", *J. de Mat. Pures et Appl.*, **67**, pp. 227-236, 1988.
- [15] S. Mallat, "Multiresolution approximation and wavelet orthonormal basis of $L^2(\mathbb{R})$ ", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **315**, pp. 69-87, 1989.
- [16] S. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation", *IEEE Trans. on Pattern Anal. Machine Intell.*, **11**, pp. 674-693, 1989.
- [17] Y. Meyer, "Principe d'incertitude, bases Hilbertiennes et algèbres d'opérateurs", *Séminaire Bourbaki*, n° 662, pp. 1-15, 1985-1986.
- [18] Y. Meyer, "Ondelettes, fonctions spline et analyses graduées", Curso dado na Universidade de Torino, Itália, 1986.
- [19] Y. Meyer, *Ondelettes et Opérateurs*, Paris: Hermann, 1990.
- [20] Y. Meyer, "Ondelettes sur l'intervalle", *Rev. Mat. Iberoamericana*, **7**, pp. 115-143, 1991.
- [21] E. Quak e N. Weyrich, "Wavelets on the interval", in *Approximation Theory, Wavelets and Applications*, S. P. Singh (Ed.), NATO ASI Series, Dordrecht: Kluwer Academic, pp. 247-283, 1995.
- [22] O. Rioul e M. Vetterli, "Wavelets and signal processing", *IEEE Signal Process. Mag.*, Outubro, pp. 14-38, 1991.
- [23] J. O. Stromberg, "A modified Franklin system and higher order spline systems on \mathbb{R}^n as unconditional bases for Hardy spaces", in *Conf. in honor of A. Zygmund*, Vol.II, W. Beckner et al. (Eds), Wadsworth Math. Series, pp. 475-493, 1982.
- [24] P. P. Vaidyanathan, "Theory and design of M-channel maximally decimated quadrature mirror filters with arbitrary M, having perfect reconstruction property", *IEEE Trans. on Acoust. Signal Speech Process*, **36**, pp. 476-492, 1987.
- [25] M. Vetterli, "Filter banks allowing perfect reconstruction", *Signal Process.*, **10**, 219-244, 1986.
- [26] M. Vetterli e C. Herley, "Wavelets and filter banks: theory and design", *IEEE Trans. on Acoust. Signal Speech Process*, **40**, pp. 2207-2232, 1992.
- [27] *Wavelet Toolbox User's Guide*, The Math Works Inc., 1996.
- [28] *Mathematica Wavelet Explorer*, Wolfram Research, 1996.
- [29] *Wavelet Packet Laboratory for Windows*, A. K. Peters, 1993.