Como Partilhar um Segredo
ANTÓNIO PEREIRA ROSA

O Problema dos Três Corpos e o Caos
CARLOS FIOLEHAYS

Mira Fernandes
1884-1958
LUIS TRABUCHO DE CAMPOS
03 EDITORIAL | Rogério Martins

04 ATRACTOR | Atractor de Spiersinki

07 RECREIO | Jorge Nuno Silva
O Ábaco de Napier

artigo de capa

10 MIRA FERNANDES | Luis Trabuco de Campos

16 CANTO DÉLFICO | Alexander Kovačec
Renovação de Casas na Vila de Pouco-Largas e na Aldeia de Muito-Estreitas

19 NA LINHA DA FREnte | Fabio Chalub
Abelhas Viajantes

22 APANHADOS NA REDE | António Machiavelo
O Pequeno Mistério do Algoritmo da Divisão

25 BARTOON | Luis Afonso

26 COMO PARTILHAR UM SEGREDO | António Pereira Rosa

30 MODELACAO DE MATERIAIS PERIÓDICOS | C. Barbarosie, A. M. Toader

35 O PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS E O CAOS | Carlos Fiolhais

40 JOSÉ RIBEIRO DE ALBUQUERQUE | Rui Ribeiro de Albuquerque

47 O QUE É | Rui Rodrigues
O que é uma Wavelet?

50 LÍDERES E TOMADA DE DECISÃO | Alberto A. Pinto, Leandro Almeida, José Cruz, Helena Ferreira

55 PONTO CRÍTICO | coord. Daniel Pinto
Introdução à Álgebra Linear
por Luis Trabuco de Campos
Treze Viagens pelo Mundo da Matemática
por Daniel Pinto

58 NOTÍCIAS

64 CARTAS DA DIREÇÃO | Ilda Perez
Divulgação Matemática: O Papel da SPM
1. INTRODUÇÃO

O objectivo principal da Teoria do Comportamento Planeado (ver Ajzen [1]) é entender e prever como é que os indivíduos transformam as suas intenções em comportamentos. Almeida, Cruz, Ferreira e Pinto [2] criaram um modelo de teoria de jogos, inspirado nos trabalhos de Cowley e Wooders [3], no qual são considerados dois tipos de características dos indivíduos, descritos como tipo pessoal e tipo observável. O tipo pessoal refere-se às características do indivíduo não observáveis pelos outros indivíduos e que influenciam a sua tomada de decisão. O tipo observável de um indivíduo refere-se às características do indivíduo observáveis pelos outros e que influenciam a tomada de decisão dos outros. Almeida, Cruz, Ferreira e Pinto [4] apresentaram um modelo de teoria de jogos para estudarem a influência dos líderes sobre os seus seguidores (ver Daya et al. [5] e Sternberg [6]). Aqui fazemos uma breve exposição deste modelo seguindo os trabalhos de Almeida, Cruz, Ferreira e Pinto [4, 2].

2. MODELO

Almeida et al. [2] construíram um modelo de teoria de jogos que passamos a descrever. Denotemos por S o conjunto de todos os indivíduos. Para cada indivíduo \( s \in S \), podemos distinguir dois tipos de características: o tipo pessoal e o tipo observável. A cada indivíduo \( s \in S \) associamos o seu tipo pessoal \( T(s) = t \in T \) que determina as características do indivíduo não observáveis pelos outros indivíduos e que influenciam a sua tomada de decisão. A cada indivíduo \( s \in S \)...

---

Líderes e Tomada de Decisão

**Alberto A. Pinto**

aopinto@fc.up.pt

**Leandro Almeida**

leandro@ie.uminho.pt

**José Cruz**

jcruz@psi.uminho.pt

**Helena Ferreira**

helenaisafer@gmail.com

Como é que os líderes influenciam os seus seguidores sob um ponto de vista de teoria de jogos?

---

\(^a\)Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto; LIAAD-INESC Porto LA, Universidade do Porto // \(^b\)Instituto de Educação, Universidade do Minho // \(^c\)Escola de Psicologia, Universidade do Minho // \(^d\)LIAAD-INESC Porto LA, Universidade do Porto.
associamos o seu tipo observável \( C(s) = c \in C \) que determina as características do indivíduo observáveis pelos outros e que influenciam a tomada de decisão dos outros. Na Teoria do Comportamento Planeado, as variáveis intrapessoais, atitude e auto-eficácia estão associadas ao tipo pessoal e as variáveis interpessoais, socioculturais e normas sociais estão associadas ao tipo observável (ver Almeida et al. [2]).

Os indivíduos definem uma estratégia \( G : S \rightarrow G \), i.e. cada individuo \( s \in S \) escolhe o grupo/comportamento \( G(s) \). Cada estratégia \( G \) corresponde a uma intenção na Teoria do Comportamento Planeado. Dado um grupo/comportamento, \( G : S \rightarrow G \), o vetor observável \( m(G) \in (N^C)^G \) é o vetor cujas componentes \( m^c \) indicam o número de indivíduos em \( g \) com tipo observável \( c \in C \), i.e.

\[
m^c = \# \{ s \in S : G(s) = g \land C(s) = c \}.
\]

Denotemos por \( s_{tc} \) o individuo \( s \) com tipo pessoal \( t \) e tipo observável \( c \). O bem-estar, ou a satisfação pessoal, que um indivíduo tem ao pertencer a um grupo/comportamento \( g \in G \), com vetor observável \( m = m(G) \), é determinado pela sua função de utilidade \( u_{tc} : G \times (N^C)^G \rightarrow \mathbb{R} \) definida por

\[
u_{tc}(g,m) = V_{tc}^g + f_{tc}(m),
\]

em que (i) \( V_{tc}^g \) mede o grau de satisfação de cada indivíduo \( s_{tc} \) por escolher o grupo/comportamento \( g \in G \), (ii) \( f_{tc}(m) \) mede o grau de satisfação de cada indivíduo \( s_{tc} \) tendo em conta a sua interacção com os elementos \( m^c \), de tipo observável \( c \in C \), que escolhem o mesmo grupo/comportamento \( g \in G \).

A estratégia \( G^* : S \rightarrow G \) do grupo/comportamento é um equilíbrio de Nash se, considerando as escolhas de todos os indivíduos, nenhum indivíduo se sente motivado para mudar de grupo/comportamento, i.e. a sua utilidade não aumenta com a mudança do seu grupo/comportamento (ver Pinto [7]).

O dicionário entre Teoria de Jogos e Teoria do Comportamento Planeado está sumarizado na figura 1 (ver Almeida et al. [2]).

No que se segue, para o individuo \( s_{tc} \) que escolhe o grupo/comportamento \( g \in G \), assumimos, por simplicidade, que

\[
f_{tc}^c(m) = -A_{tc}^c + \sum_{c \in C} A_{tc}^{cc} m^c,
\]

em que \( A_{tc}^{cc} \) avalia a satisfação que cada individuo \( s_{tc} \) tem na presença de um individuo com tipo observável \( c' \in G \). Notamos que \( A_{tc}^{cc} \) aparece na fórmula (1) porque o individuo \( s_{tc} \) não está incluído na contagem do número de individuos \( s_{tc} \) com o mesmo tipo observável que ele e que, também, escolhem o mesmo grupo/comportamento \( g \).

Denotemos por \( S_{(t,c)} \) o grupo de todos os individuos com o mesmo tipo pessoal \( t \in T \) e o mesmo tipo observável \( c \in C \) e denotemos por \( n(t,c) \) o número de indivíduos em \( S_{(t,c)} \).

**Observação 1** Uma forma alternativa para interpretar \( S_{(t,c)} \) é considerar que \( n(t,c) \) é o número de vezes que um mesmo indivíduo \( s_{tc} \) tem de tomar uma acção. No caso, \( A_{tc}^{cc} > 0 \) pode ser interpretado como a recompensa individual positiva obtida pela repetição da escolha do mesmo grupo/comportamento \( g \in G \), ou seja, o individuo \( s_{tc} \) não sente um efeito de saturação por repetir a mesma escolha. Por outro lado, \( A_{tc}^{cc} < 0 \) pode ser interpretado como a recompensa individual negativa obtida pela repetição da escolha do mesmo grupo/comportamento \( g \in G \), ou seja, o individuo \( s_{tc} \) sente saturação, tédio ou frustração por repetir a mesma escolha.

**3. LÍDERES**

Um líder é um indivíduo que pode influenciar os outros na escolha de um determinado grupo/comportamento. Consideramos que o líder escolhe o seu grupo/comportamento \( g \in G \) antes dos outros indivíduos e, por isso, os outros
indivíduos já sabem a decisão do líder antes de fazerm a sua própria escolha. Vamos estudar de que forma o líder \( s_{l,c} \) pode influenciar os seus seguidores \( s_{i,c} \) a escolherem o mesmo grupo/comportamento \( g \) que ele. Caracterizamos o líder com os seguintes parâmetros \((\alpha, R, V, L)\), que passamos a descrever:

- **Líderes altruístas e individualistas.** O líder \( s_{l,c} \) valoriza \( V \) o grupo/comportamento \( g \) e tem a capacidade de doar uma parte \((1 - R)\) \( V \) aos seus seguidores. Portanto, o parâmetro \( R \) determina a fração \((1 - R)\) \( V \) do bem \( V \) doado pelo líder aos seguidores. Após a doação, a nova valorização do líder \( s_{l,c} \) para o grupo/comportamento \( g \) é \( V_{s_{l,c}}^{g} = RV \). O líder altruísta \( s_{l,c} \) é o líder que provoca uma valorização do grupo/comportamento \( g \) para os seguidores que o escolham, i.e., \( 0 < R < 1 \). O líder individualista \( s_{l,c} \) é o líder que provoca uma desvalorização, ou dívida, do grupo/comportamento \( g \) para os seguidores que o escolham, i.e., \( R > 1 \).

- **Seguidores criadores e consumidores de riqueza.** Definimos \( \alpha \) como o parâmetro de consumo ou criação de riqueza pelos seguidores na valorização do bem distribuído pelo líder. Portanto, a valorização dos seguidores \( s_{i,c} \) é dada por

\[
V_{s_{i,c}}^{g} = V_{s_{l,c}}^{g} + \frac{\alpha (1 - R)}{n(t',c')} V,
\]

em que \( V_{s_{l,c}}^{g} \) corresponde à valorização do grupo \( g \) pelos seguidores \( s_{i,c} \) anterior à dívida do líder. Quando \( 0 < R < 1 \), se \( \alpha > 1 \), há uma criação de riqueza pelos seguidores \( s_{i,c} \) a partir da riqueza que o líder distribui; mas, se \( 0 < \alpha < 1 \), há um consumo de riqueza pelos seguidores \( s_{i,c} \) da riqueza que o líder distribui. Quando \( R > 1 \), se \( 0 < \alpha < 1 \), há uma diminuição da dívida (criação de riqueza) pelos seguidores \( s_{i,c} \) a partir da dívida que o líder distribui, mas, se \( \alpha > 1 \), há um aumento (consumo de riqueza) da dívida pelos seguidores \( s_{i,c} \) a partir da dívida que o líder distribui. Os seguidores são criadores de riqueza quando \( 0 < R < 1 \) e \( \alpha > 1 \) ou quando \( R > 1 \) e \( 0 < \alpha < 1 \). Os seguidores são consumidores de riqueza quando \( 0 < R < 1 \) e \( 0 < \alpha < 1 \) ou quando \( R > 1 \) e \( \alpha > 1 \).

- **Líderes influentes e persuasivos.** A influência ou persuasão do líder \( s_{l,c} \) nos seguidores \( s_{i,c} \) é medida pelo parâmetro \( L \) em que

\[
A_{s_{l,c}}^{g} = LA_{s_{l,c}}^{g}
\]

corresponde à satisfação que os seguidores têm quando decidem escolher o mesmo grupo/comportamento que o líder. De forma equivalente, podemos considerar que \( A_{s_{l,c}}^{g} = A_{s_{l,c}}^{g} \) e que os seguidores têm uma nova valorização \( V_{s_{l,c}}^{g} = V_{s_{l,c}}^{g} + (1 - L)A_{s_{l,c}}^{g} \) ao escolherem o grupo/comportamento \( g' \in G \setminus \{g\} \) sob a influência do líder. Quando \( A_{s_{l,c}}^{g} > 0 \), se \( L < 1 \), os seguidores têm uma menor satisfação em estarem com o líder do que com os seguidores, ou, de forma equivalente, têm uma maior valorização ao escolherem um grupo/comportamento diferente do do líder; mas, se \( L > 1 \), os seguidores têm uma maior satisfação em estar com o líder do que com os seguidores, ou de forma equivalente, têm uma menor valorização ao escolherem um grupo/comportamento diferente do do líder.

Quando \( A_{s_{l,c}}^{g} < 0 \), se \( L > 1 \), os seguidores têm uma menor satisfação em estarem com o líder do que com os seguidores, ou, de forma equivalente, têm uma maior valorização ao escolherem um grupo/comportamento diferente do do líder; mas, se \( L < 1 \), os seguidores têm uma maior satisfação em estar com o líder do que com os seguidores, ou de forma equivalente, têm uma menor valorização ao escolherem um grupo/comportamento diferente do do líder. O líder é influente ou persuasivo quando \( A_{s_{l,c}}^{g} > 0 \) e \( L > 1 \) ou quando \( A_{s_{l,c}}^{g} < 0 \) e \( L < 1 \).

Definimos o valor dos *piores vizinhos* \( P_{g}(t',c') \) do indivíduo \( s_{l,c} \) na escolha do grupo/comportamento \( g \) por

\[
P_{g}(t',c') = \begin{cases} 
\sum_{c'' \in C_{L}(t')} A_{s_{l,c}}^{g} \sum_{c' \in C(t')} n(t',c'), & \text{se } A_{s_{l,c}}^{g} \geq 0 \\
-A_{s_{l,c}}^{g} + \sum_{c'' \in C_{L}(t')} A_{s_{l,c}}^{g} \sum_{c' \in C(t')} n(t',c'), & \text{se } A_{s_{l,c}}^{g} < 0.
\end{cases}
\]

Definimos o valor dos *melhores vizinhos* \( M_{g}(t',c') \) do indivíduo \( s_{l,c} \) na escolha do grupo/comportamento \( g' \) por

\[
M_{g}(t',c') = \begin{cases} 
-A_{s_{l,c}}^{g} + \sum_{c'' \in C_{H}(t')} A_{s_{l,c}}^{g} \sum_{c' \in C(t')} n(t',c'), & \text{se } A_{s_{l,c}}^{g} \geq 0 \\
\sum_{c'' \in C_{H}(t')} A_{s_{l,c}}^{g} \sum_{c' \in C(t')} n(t',c'), & \text{se } A_{s_{l,c}}^{g} < 0.
\end{cases}
\]
Teorema 1 Considere-se que o líder \( s_{L,d} \) escolhe o grupo comportamento \( g \in G \). Se, para todo \( g' \in G \setminus \{ g \} \),

\[
\frac{a(1-R)}{n(t',c')} V + L A_{s_{L,d}} > V_{s_{L,d}} - D_{s_{L,d}} + M_g(t',c') - P_g(t',c') 
\]

(02)

então \( G^*(s_{L,d}) = g \), para todo equilíbrio de Nash \( G^* \).

A desigualdade (2) traduz uma condição suficiente no valor da doação \((1-R)V\) e na influência ou persuasão \(L\) do líder e no consumo ou na criação de riqueza a dos seguidores para que os seguidores escolham o mesmo grupo/comportamento do líder. Conclui-se, a partir da desigualdade (2), que o líder individualista poderá ter de ser mais persuasivo do que o líder altruista para conseguir convencer os seguidores a escolherem o mesmo grupo/comportamento do líder.

Demonstração 1 Suponhamos, por redução ao absurdo, que \( G^* \) é um equilíbrio de Nash no qual, pelo menos, um dos seguidores \( s_{L,d} \) escolhe um grupo/comportamento \( g' = G^*(s_{L,d}) \in G \setminus \{ g \} \). Por construção do valor dos melhores vizinhos \( M_g(t',c') \), a sua utilidade é limitada superiormente por

\[
u_{L,d}(g',m) \leq V_{s_{L,d}} - D_{s_{L,d}} + M_g(t',c').
\]

Se esse seguidor \( s_{L,d} \) alterar a sua escolha para o grupo/comportamento \( g \), por construção do valor dos piores vizinhos \( P_g(t',c') \), a sua utilidade é limitada inferiormente por

\[
u_{L,d}(g,m) \geq V_{s_{L,d}} - D_{s_{L,d}} + P_g(t',c') - \frac{a(1-R)}{n(t',c')} V + L A_{s_{L,d}}.
\]

Pela desigualdade (2), obtemos que

\[
u_{L,d}(g,m) > u_{L,d}(g',m).
\]

Logo, \( G^* \) não é um equilíbrio de Nash, o que é uma contração.

4. CONCLUSÃO

Construímos um dicionário entre a Teoria de Jogos e a Teoria do Comportamento Planeado e propusemos o equilíbrio de Nash como um, de muitos, mecanismos possíveis de transformar intenções individuais em decisões. Estudamos de que forma as características do líder e dos seus seguidores, neste modelo de teoria de jogos, podem influenciar as decisões dos seguidores.

AGRADECIMENTOS


REFERÊNCIAS


LÍDERES E TOMADA DE DECISÃO • Alberto A. Pinto, Leandro Almeida, José Cruz e Helena Ferreira 53