SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRACÇÕES NOS NÍVEIS ELEMENTARES DE ENSINO

Ema Mamede
Universidade do Minho
emamede@ie.uminho.pt

Introdução

Os números racionais constituem um conceito de difícil aprendizagem para as crianças do ensino elementar. Estudos internacionais (ver Behr, Wachsmuth, Post & Lesh, 1984; Hart, 1981; Kerslake, 1986) e também nacionais (ver Monteiro & Pinto, 2005; Mamede & Cardoso, 2010) documentam dificuldades conceptuais das crianças neste domínio. Estas dificuldades dos alunos não se resumem apenas a dificuldades com as operações elementares, mas também com conceitos essenciais, o que permite pensar que no âmbito as aprendizagens de números racionais estão longe de ser bem conseguidas. Durante o percurso escolar espera-se que os alunos façam aprendizagens da Matemática que sejam significativas. O ensino elementar constitui o momento em que se espera que todas as crianças possam iniciar o acesso a ideais matemáticas significativas. Contudo, este acesso assume uma relação estreita com as oportunidades de aprendizagem que são fortemente determinadas, entre outros aspectos, pelas práticas de sala de aula.

Na nossa realidade, ao nível do ensino elementar, facilmente se encontram exemplos de discrepâncias entre as orientações curriculares, o currículo implementado na sala de aula e aquilo que facto os alunos aprendem. Esta discrepância atribui uma relevância especial ao conhecimento profissional do professor é determinado pelo conhecimento matemático, pelo conhecimento didáctico e pelo conhecimento curricular. Este artigo procura fazer uma viagem pela dimensão do conhecimento didáctico relevante ao ensino-aprendizagem de fracções, nos primeiros anos de escolaridade. Nele entenda-se fracção como o quociente a/b entre dois inteiros a e b, sendo $b \neq 0$.

Aprender fracções nos níveis elementares de ensino

De acordo com o novo Programa de Matemática do Ensino Básico, o estudo das fracções deve iniciar-se logo no 1.o Ciclo, possibilitando ao aluno um contacto mais prolongado com estes números, ao longo da sua escolaridade. Procura-se desde cedo promover o desenvolvimento do sentido do número, incluindo nele também as fracções. Torna-se então relevante proporcionar ao aluno a oportunidade e tempo para construir um bom conceito de fracção, na medida em que as fracções são essenciais para o posterior desenvolvimento de outros conceitos matemáticos. Mais ainda, Kieren (1976) argumenta que as fracções constituem um fundamento para as relações algébricas posteriores e que a sua compreensão é essencial para o desenvolvimento de ideias matemáticas. Contudo, todos estamos cientes das dificuldades que os alunos manifestam na aprendizagem das fracções, particularmente nos níveis mais elementares. A literatura nacional e internacional identifica diversos tipos de dificuldades na aprendizagem de fracções, por parte dos alunos nos níveis de escolaridade básica. Estas dificuldades incluem tanto aspectos da compreensão conceptual como de destrezas de cálculo.

São vários os documentos que descrevem as dificuldades de alunos de vários anos de escolaridade no trabalho com fracções. Uma dificuldade muito documentada na literatura prende-se com o facto dos alunos considerarem as magnitudes definidas no numerador e no denominador separadamente, em vez de as entenderem como a representação de um número (ver Hart, 1981; Behr, Wachsmuth, Post & Lesh, 1984). Outra dificuldade muito comum que os alunos apresentam diz respeito à necessidade de utilizar relações multiplicativas na comparação de fracções (ver Hart, 1989). Uma outra dificuldade frequentemente identificada nos alunos prende-se com a compreensão da propriedade de densidade de conjunto de que goza o conjunto dos números racionais (ver Hart, 1981; Kerslake, 1986), entendendo o conjunto dos números racionais como uma simples extensão do conjunto dos números inteiros.

O conhecimento das fracções representa um alargamento significativo do conhecimento sobre números das crianças (Kieren, 1976, 1983). Neste sentido, Kieren (1983) argumenta ainda que os números racionais representam um conhecimento sofisticado a adquirir pelo indivíduo. Promover do desenvolvimento do sentido do número das crianças implica ter consciência da complexidade dos números. Particularmente, no caso das fracções, torna-se então fundamental perceber a complexidade envolvida na construção do conceito de fracção.

A construção do conceito de fracção

De acordo com a teoria de Vergnaud (1997), para se compreender como se desenvolve o processo de construção de conceitos matemáticos na mente da criança através da sua experiência na escola ou fora dela, é necessário considerar um conceito C como a articulação de três conjuntos, C = (S, I, R), em que: S representa o conjunto de situações que atribuem utilidade e significado ao conceito C; I representa os invariantes operacionais que podem ser usados para lidar com essas situações; e R é definido como o conjunto das representações simbólicas, linguísticas ou gestuais que podem ser utilizadas para representar os invariantes, as situações e também procedimentos. Para Vergnaud (1997) as situações são sempre aplicações de um conceito.

Aplicando a teoria de Vergnaud (1997) à compreensão de fracções, os invariantes operacionais considerados são a ordenação e a equivalência de fracções e as situações são as interpretações ou significados de fracção.

Sobre a compreensão do conceito de fracção

De uma forma simplista, para o aluno compreender o conceito de fracção terá de compreender três aspectos distintos, porém relacionados. O aluno precisa de compreender que há classes de fracções equivalentes - 1/3, 2/6, 3/9, etc.; que estas classes podem ser ordenadas – 1/2 > 1/3 > 1/4 > 1/5, etc. (Nunes, Bryant, Pretzlik, Evans, Wade & Bell, 2004); e ainda que existem diferentes modos de representação destas quantidades. Ora, isto está longe de ser uma tarefa fácil.

Uma análise mais detalhada destes aspectos expõe algumas dificuldades facilmente encontradas na compreensão de classes de fracções equivalentes. Pois, fracções que se referem à mesma quantidade podem ser representadas por diferentes símbolos escritos (1/2, 2/4, 3/6 etc.) e podem ser designados por diferentes palavras (um meio, dois quartos, três sextos, etc.). Tudo pode complicar-se ainda mais se pensarmos que as mesmas palavras e os mesmos símbolos escritos podem referir-se a quantidades distintas. Por exemplo, metade (ou 1/2) de 8 ou metade (ou 1/2) de 6 não representam a mesma quantidade, não pertencendo assim à mesma classe de fracções equivalentes.

Uma análise das relações assimétricas envolvidas nas fracções também expõe as dificuldades que a ordenação de fracções oferece às crianças, exploradas na literatura por diferentes autores (e.g. English & Halford, 1995; Nunes et al. 2004; Post et al., 1985). No domínio das fracções, três ideais devem ser consideradas na ordenação de fracções. Primeiro, para o mesmo denominador, quanto maior for o numerador, maior é a fracção (ex. 1/3<2/3). Segundo, para o mesmo numerador, quanto maior for o denominador, menor é a fracção (ex. 1/2>1/3). Terceiro, se diferem simultaneamente os numeradores e os denominadores, comparações rigorosas vão depender do estabelecimento de uma relação proporcional entre as duas fracções.

Um terceiro aspecto necessário à compreensão de fracções diz respeito à representação. Na aula de matemática, os alunos trabalham frequentemente com distintas formas de representação. Em particular, no caso das fracções, é muito comum encontrarem-se modelos pictóricos, verbais e simbólicos, alem dos modelos concretos. A articulação e a tradução de todos estes modos de representação facilmente constituem uma dificuldade para o aluno. Assim, na sala de aula deve haver a preocupação de interligar os diferentes modelos (concreto, simbólicos, pictóricos e verbais) de representação de fracções, utilizando tanto quantidades discretas como quantidades contínuas.

Os três aspectos anteriormente referidos devem ser compreendidos pelas crianças nas diferentes interpretações ou significados de fracção. Pois só assim se caminha rumo ao desenvolvimento do sentido de número das crianças.

As interpretações ou significados de fracções

Existem diferentes classificações de situações em que as fracções são usadas. Por exemplo, Kieren (1983, 1995) distingue quarto categorias, que designa por ‹*subconstructos*›, e que considera serem relevantes para o conhecimento das crianças sobre fracções, a saber: (a) *quociente*, em que a criança melhor compreende o quociente entre duas medidas (ex. se 8 pizas forem divididas de forma justa por 5 pessoas, quanta piza come cada pessoa?); *medida*, que surge sempre que medimos algo (ex., se a unidade não cabe de forma exacta dentro de um objecto a ser medido um número inteiro de vezes, como se pode descobrir o número que seja a medida?); *operador*, em que os números fraccionários surgem como operadores que descrevem alterações de tamanho (ex., quando pedimos à criança que marque metade duma barra de chocolate usando a fracção como um operador, ou quando expressões como «tomar ¾ de» são usadas); e *razão*, quando descrevemos misturas ou probabilidades, ou relacionamos variáveis referentes a quantidades distintas (ex., quando andamos a uma razão de 4 kilómetros por hora e queremos descrever o tempo consumido para andar 5 kilómetros).

Uma outra classificação é apresentada por Behr, Lesh, Post e Silver (1992), que resumiram a classificação proposta por Kieren (1983) a cinco *subconstructos*, que entenderam ser suficientes para clarificar o conceito de número racional, e que são: *parte-todo*, *quociente*, *razão*, *operador* e *medida*.

Também Marshall (1993) apresenta uma classificação de situações que pode servir de base a um conjunto de esquemas mentais que a autora caracteriza como «uma rede de conhecimento sobre um evento ou situação.» (p. 267). No domínio dos números racionais, Marshall distingue cinco situações, a saber: situação *parte-todo*, em que algo contínuo ou discreto é dividido em partes iguais — no símbolo «*a/b*», a indica que estão incluídas em *b* (ex., marcar 1/2 do rectângulo dado); situação quociente que também depende da partilha equitativa — na fracção *a/b*, *a* é distribuído ou colocado em *b* partes —, e representa a divisão – dividir *a* elementos (ex., três pizas), em *b* grupos (ex., partilhados por 4 amigos); situação *medida*, em que a fracção 1/*b* é usada repetidamente para determinar uma distância — é frequentemente acompanhada por uma recta numérica ou imagem de um instrumento de medida, sendo esperado que as crianças meçam a distância de um ponto a outro em termos de 1/*b* unidades (ex., quanto dista X de 0?); situação *razão*, em que duas quantidades estão relacionadas uma com a outra, uma quantidade de um objecto é comparada com a quantidade de outro objecto — no símbolo «*a/b*», *a* e *b* são números distintos (ex., na sua receita, a Ana adiciona 1 chávena de açúcar por cada 3 copos de água. Que quantidade de açúcar deve ela adicionar para 6 copos de água?); na situação *operador* a fracção «*a/b*» funciona como uma máquina que opera sobre um valor para produzir um segundo valor (ex., como posso transformar uma figura geométrica numa outra que tenha ¾ do tamanho original?) (Marshall, 1993).

Mais recentemente, Nunes, Bryant, Pretzlik, Evans, Wade e Bell (2004) propõem uma classificação de situações usadas para representar fracções baseada no significado que os números assumem em cada situação. Nunes et al. (2004) utiliza o termo ‹situação› em vez de ‹*subconstruto*› por considerar que este último se refere a ideias interligadas que podem ser usadas em várias situações. Os autores distinguem quatro situações: (1) situações *parte-todo*, que envolvem a divisão de quantidades contínuas, e em que o denominador da fracção diz respeito ao número de partes em que o todo foi dividido e o numerador refere-se ao número de partes tomadas; (2) as situações *quociente*, que também envolvem a divisão de quantidades contínuas, mas em que o denominador indica o número de recipientes e o numerador o número de objectos inteiros contínuos a serem repartidos; (3) as situações *operador* que envolvem quantidades discretas tomadas como um todo: o denominador indica o número de grupos iguais em que o conjunto foi dividido e o numerador indica o número de grupos tomados (Nunes et al. 2004); e (4) situações de *quantidades intensivas* em que os números envolvidos na escrita da fracção representam relações proporcionais, sendo o todo irrelevante; por exemplo, se 1 litro de sumo é feito com 1 copo de concentrado de sumo e 3 copos de água, teremos sumo de igual sabor se produzirmos 2 litros de sumo com 2 copos de concentrado e 6 copos de água — 1/4 e 2/8 são equivalentes ainda que o todo não seja o mesmo (Nunes et al., 2004).

Do ponto de vista da sala de aula, não interessa tanto distinguir esta ou aquela classificação. Interessa sim garantir que qualquer que seja a classificação seguida, são proporcionadas aos alunos oportunidades para explorar fracções em todas as suas vertentes. Neste ponto os investigadores são unânimes, o conceito de fracções só está totalmente adquirido quando o aluno domina o conceito em todas as interpretações ou significados de fracção, e é capaz de traduzir, raciocinar e resolver problemas nas diferentes interpretações.

Algumas tarefas para a sala de aula

O novo Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007) para o 1.º Ciclo, ressalta que nos dois primeiros anos deste ciclo, as fracções devem ser trabalhadas numa abordagem intuitiva a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais. Nos últimos dois anos deste ciclo, este trabalho deve ser alargado passando a incluir os significados quociente, parte- todo e operador. É também nestes últimos dois anos que devem ser exploradas distintas representações de racionais não negativos, ajudando a criança a compreender as relações entre a representação decimal, fraccionária e percentual. Aquele documento enfatiza ainda o recurso a problemas que permitam trabalhar os diversos significados das fracções. Para o 2.o Ciclo acrescentam-se aos significados quociente, parte-todo e operador os significados de medida e razão. Em todos estes significados é esperado que o aluno aprenda a comparar fracções, dominado a ordenação e equivalência, mas também a sua representação numa diversidade de formas.
Sendo que é preconizada uma nova abordagem no trabalho inicial com fracções, deixam-se aqui algumas sugestões de tarefas a explorar na sala de aula utilizando os significados quociente, parte- todo e operador. A Tabela 1 distingue alguns problemas que podem ser explorados na sala de aula, procurando abranger os diferentes significados de fracção destacados naquele documento.

Além de exploração de problemas envolvendo os significados de fracção, importa ainda diversificar o tipo de problemas a colocar aos alunos, dentro do mesmo significado.

As tarefas a propor aos alunos nos primeiros anos de contacto com fracções devem incluir uma abordagem intuitiva a partir de situações de divisão do todo em partes iguais, quer envolvendo quantidades discretas quer contínuas. A Tabela 2 apresenta alguns exemplos a explorar com as crianças do 1.o Ciclo, que devem ser utilizados nos diferentes significados. Nela distinguem-se as tarefas de identificação de quantidades, comparação e reconhecimento de quantidades equivalentes. As tarefas de identificação de quantidades devem incluir três tipos de problemas distintos, em que: dada a parte e o todo, procura-se a fracção; dado o todo e a fracção, identifica-se a parte; e dada a parte e a fracção, encontra-se o todo.

Notas finais

A utilização de material manipulável para a exploração de relações entre quantidades e para a representação de fracções assume uma dimensão relevante no trabalho inicial com fracções. O caminho a percorrer faz-se do concreto para o abstracto, fomentando a compreensão e estimulando o raciocínio, cultivando o estabelecimento de conexões. Neste percurso, os significados de fracção não devem ser descurados, já que nos níveis iniciais de ensino é essencial que as crianças tenham oportunidade de trabalhar com fracções nos diversos significados, tendo em vista uma completa construção do conceito de fracção. O significado quociente tem-se vindo a mostrar como relevante na compreensão de fracções na medida em que proporciona à criança a compreensão de relações fundamentais na construção do conceito (Streefland, 1991, 1997; Nunes et al., 2004; Mamede, Nunes & Bryant, 2005; Mamede & Nunes, 2008), por assentar na distribuição equitativa de quantidades, ajudando a criança a entender, por exemplo, a relação inversa entre o divisor e o quociente, quando o dividendo é o mesmo.

O novo Programa não antecipa a introdução aos números racionais, mas propõe uma abordagem mais completa e profunda do conceito de fracção nos primeiros anos do Ensino Básico. Este contacto passa também por articular o trabalho com fracções com outras formas de representação de números racionais, nomeadamente a representação decimal. Procura-se assim, prolongar o tempo de contacto das crianças com estes números, que todos sabemos estar longe de serem de fácil aprendizagem. Deixa-se aqui o desafio de ir mais longe, tendo em vista a promoção da aprendizagem do conceito de fracção, acreditando que de pouco servirá a introdução de algoritmos, regras e outros processos facilmente mecanizáveis apreendidos em anos subsequentes, sem que se entendam os conceitos essenciais.

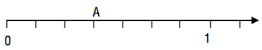
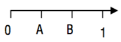
Interpretação	Exemplo
Quociente	Quatro amigos repartem de forma justa duas barras de chocolate. Que fracção de chocolate come cada amigo? E se forem três barras de chocolate? E se forem 5 barras de chocolate?
	Tenho 3 tartes iguais e gostaria de dar um quarto de tarte a cada aluno da minha sala. Por quantos alunos posso distribuir estas tartes?
	Numa pizaria um grupo de amigos distribuiu-se por duas mesas, tendo ficado 4 numa mesa com 2 pizas e os restantes noutra com 3 pizzas. Sabendo que todos comeram igual quantidade de piza, quantos eram os amigos do grupo?
Parte-todo	Uma barra de chocolate foi dividida em 4 partes iguais. O Rui comeu 3 dessas partes. Que fracção da barra de chocolate sobrou?
	A Ana e o Zé têm uma barra de chocolate cada. O Zé comeu 3/6 da sua barra de chocolate e a Ana comeu 5/12 da sua. Será que ambos comeram igual quantidade de chocolate? Quem comeu mais?
	Ao lado estão representados 2/6 de uma figura.  Consegues desenhar a figura toda?
Ope rado	O João perdeu 6 dos seus 24 berlindes. Que fracção dos berlindes perdeu o João?
	A Ana e o Zé têm igual número de pintarolas. A Ana comeu 2/6 das suas pintarolas; o Zé comeu 1/2 das dele. Terão comido igual número de pintarolas?
	A Rita comeu ¼ dos seus 12 caramelos. O Rui tinha 15 caramelos e comeu tantos quanto a Rita. Que fracção dos seus caramelos comeu o Rui?
Medida	O Rui tem 2 litros de sumo para encher copos com a capacidade de 1/4l. Quantos copos poderá ele encher?
	Qual o valor de A? 
	Que fracção traduz a distância entre A e B? 
Razão	Na sua receita a Rute adiciona 2 colheres de açúcar por cada 3 copos de água. Que quantidade de açúcar deve ela adicionar para 6 copos de água?
	Na turma da Ana a razão entre o número de raparigas e de rapazes é 2/3. Sabendo que na turma da Ana há 9 rapazes, qual o numero total de alunos?
	Na festa do João prepararam-se sumos de maça e de laranja. Na preparação do sumo de maça é feita uma mistura usando 3 copos de concentrado de sumo e 6 copos de água; na preparação do sumo de laranja é feita uma mistura de 5 copos de concentrado de sumo de laranja e 8 de água. Qual dos dois sumos tem mais fruta?

Tabela 1.—Alguns exemplos de problemas para os diferentes significados de fracção.

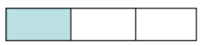
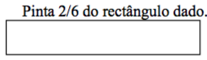
Tipo de tarefa		Exemplos
Identificação de quantidades	Encontrar a fracção	A Ana tem 3 dos 12 bombons da sua irmã. Que fracção dos bombons tem a Ana?
		Se♦ ♦♦♦♦♦ é o todo, então ♦♦ que fracção é desse todo?
		A Rita dividiu a sua piza em 8 partes iguais e comeu duas delas. Que fracção da piza comeu a Rita?
		Que fracção do rectângulo está pintada? 
	Descobrir a parte	A Ana tem ¼ dos 12 bombons da sua irmã. Quantos bombons tem a Ana?
		Se♦ ♦♦♦♦♦ é o todo, então a quantas pintas corresponde ¼?
		A Rita dividiu a sua piza em 8 partes iguais e comeu ¼ da piza. Quantas partes de piza comeu a Rita?
		Pinta ¼ do rectângulo dado. 
	Encontrar o todo	A Ana comeu 3 bombons. Isto é ¼ dos bombons existentes. Quantos bombons havia?
		Se ♦♦ for 1/4, quantas pintas formam o todo?
		A Rita comeu dois pedaços de piza, isto é, comeu ¼ do total de piza. Quantos pedaços de pizza tinha a piza inteira?
		A figura ao lado mostra ¼ de um rectângulo. Desenha o rectângulo completo. 
Comparação de quantidades		Um grupo de amigos foi a uma pizaria e ocupou duas mesas. Numa mesa ficaram 4 rapazes que partilharam de forma justa 2 pizas e não sobrou nada; na outra mesa ficaram 3 meninas que partilharam igualmente 1 piza, sem que tenha sobrado piza. Será que cada menina comeu mais piza do que cada menino? Ou terá cada rapaz comido mais piza do que cada menina?
		A Rita e o Tó 12 caramelos cada um. A Rita comeu 2/6 dos seus caramelos; o Tó comeu 1/4 dos dele. Terão comido igual número de caramelos, ou um deles comeu mais do que o outro?
		A Ana e o Zé têm uma barra de chocolate cada. O Zé comeu 3/6 da sua barra de chocolate e a Ana comeu 5/12 da sua. Será que ambos comeram igual quantidade de chocolate? Quem comeu mais?
Reconhecimento da equivalência de quantidades		A Ana e o Zé têm igual número de pintarolas. A Ana comeu 2/6 das suas pintarolas; o Zé comeu 1/3 das dele. Terão comido igual número de pintarolas?
		A Maria e a Eva têm igual número de bombons. A Maria comeu 4/8 dos seus bombons; a Eva comeu 1/4 dos dela. Terão comido igual número de bombons, ou uma delas comeu mais do que a outra?
		Que fracção do rectângulo está pintada?  Pinta 2/6 do rectângulo dado.  O que podes concluir?

Tabela 2.—Alguns exemplos de tarefas a explorar na sala de aula

Referências bibliográficas

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio, and Proportion. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296–333). New York: MacMillan Publishing Company.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T. & Lesh, R. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15 (5), 323–341.

English, L. & Halford, G. (1995). *Mathematics Education — Models and Processes*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Hart, K. (1981). Fractions. In K. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11–16*, (pp. 66–81). London: John Murray Publishers.

Hart, K. (1989). Fractions: Equivalence and Addition. In D. Johnson (Eds.), *Children's Mathematical Frameworks 8–13*: A Study of Classroom Teaching (pp. 46–75). Windsor: NFER-NELSON Publishing Company Ltd.

Kerslake, D. (1986). Fractions: *Children's Strategies and Errors — A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Berkshire: NFER-NELSON.

Kieren, T. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Paper from a Research workshop*, (pp.101–144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of Rational Number Ideas. In M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollack, & M. Suydam (Eds.), *Proceedings of the Fourth International Conference of Psychology of Mathematics Education* (pp.501–508). Boston: Birkhauser.

Kieren, T. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. In T. Carpenter, E. Fennema &T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers — An Integration of Research* (pp. 49–84). Hillsdale, New Jersey: LEA.

Kieren, T. (1995). Creating Spaces for Learning Fractions. In T. Sowder & B.P. Schapelle (Eds.), *Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades* (pp. 31–66). Albany, New York: SUNY Press.

Mamede, E. & Cardoso, P. (2010). Insights on students (Mis)understanding of fractions. In M. M. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proc. 34th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 257-264). Belo Horizonte, Brasil: PME.

Mamede, E. & Nunes T. (2008). Building on children's informal knowledge in the teaching of fractions. In Olimpia, F., Cortina, J.L., Alatorre, S., Rojano, T. & Sepulveda, A. (Eds.), *Proc. 32th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 345–352). Morelia, Mexico: PME.

Mamede, E., Nunes T. & Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 281–288). Melbourne, Australia: PME.

Marshall, S. (1993). Assessment of Rational Number Understanding: A Schema-Based Approach. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers — An Integration of Research* (pp. 261–288). Hillsdale, New Jersey: LEA.

Monteiro, C. & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14(1), 89–104.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Evans, D., Wade. J. & Bell, D. (2004). Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. *Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences*, Paper presented in Paris : 28–31, January.

Post, T., Wachsmuth, I., Lesh, R. & Behr, M. (1985). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Cognitive Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (1), 18–36.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L. (1997). Charming fractions or fractions being charmed?, In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics — An International Perspective* (pp. 347–372). East Sussex: Psychology Press.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics — An International Perspective* (pp. 5–28). East Sussex: Psychology Press.