O SENTIDO DO SÍMBOLO DE ALUNOS DO 10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Daniela Nogueira
Escola Secundária D. Sancho I
danielanogue@gmail.com

Floriano Viseu
CIEd-Universidade do Minho
fviseu@ie.uminho.pt

Resumo

Na transição para o secundário, muitos alunos sentem-se mais à vontade a trabalhar com situações numéricas do que algébricas, o que tende a dever-se a um maior contacto com os números até ao final do 3.º ciclo. No desenvolvimento do pensamento algébrico, ganha relevância a compreensão do sentido do símbolo. O tema das funções do 10.º ano potencia essa compreensão. Recorrendo quanto possível à resolução de problemas, pretendemos averiguar como alunos do 10.º ano desenvolvem o sentido do símbolo no estudo deste tema. Seguindo uma metodologia qualitativa e interpretativa, com o formato de estudo de caso, analisamos os dados que foram recolhidos através da actividade dos alunos, da transcrição de aulas áudio-gravadas, de entrevistas e notas de campo. O estudo envolve três alunos com diferentes desempenhos de aprendizagem – Sílvia, Rui e Rute –, cuja informação é interpretada segundo as três fases que decorreram antes, durante e após a intervenção pedagógica que orientou o estudo das Funções. Os três alunos revelam capacidade de seleccionar a variável, embora Rute nem sempre seja capaz de rever o seu significado; tendem a aplicar preferencialmente algoritmos conhecidos, o que não os ajuda a afastarem-se do significado individual das variáveis e a analisar a expressão no seu todo. Em relação aos papéis das letras, mostram compreendê-las conforme o contexto em que surgem, embora tendam a não distinguir o papel de variável do de incógnita.

Palavras-Chave: Pensamento algébrico, Sentido do símbolo, Funções.

Introdução

A álgebra é um tema matemático que tem merecido uma especial atenção nas sucessivas reformulações do currículo escolar. A importância do seu estudo reside na compreensão e resolução de situações do dia-a-dia como também de pré-requisito para o aluno prosseguir os seus estudos. Porém, a aprendizagem de alguns tópicos algébricos não se torna fácil para muitos alunos. O estudo da álgebra, embora se encontre tendencialmente ligado à manipulação de símbolos e à aplicação de um conjunto de procedimentos, implica que os alunos apreendam os conceitos e as estruturas que permitem expressar relações e traduzir ideias matemáticas (Vale, Palhares, Cabrita & Borralho, 2006).

Atendendo à importância da álgebra na formação dos alunos, Kieran (1992) defende que este tema deve começar a ser estudado o mais cedo possível. Actualmente, os diferentes programas da disciplina de Matemática procuram articular entre si, nas mais variadas formas, a transição do estudo de temas a um nível concreto, próprio do currículo do ensino básico, para um estudo mais formal, próprio do currículo do ensino secundário. Procura-se efectuar gradualmente uma "transição entre a aritmética e a álgebra" (NCTM, 1991, p. 121). No entanto, os alunos quando iniciam o ensino secundário manifestam dificuldades na transição do pensamento concreto para o abstracto, o que tende a criar obstáculos ao desenvolvimento da capacidade de generalização, de resolução problemas e do uso de simbologia (Kieran, 1992). Para Vale et al. (2006), a dificuldade desta transição pode dever-se à introdução do conceito de variável, na maioria das vezes, de forma descontextualizada. Arcavi (1994) defende que o desenvolvimento da noção do sentido do símbolo associa a capacidade do aluno de reconhecer o seu poder e de saber quando o seu uso é adequado, a capacidade de manipular e lhe dar sentido em diferentes contextos de modo a que este se torne "pronto para ser posto em acção a um nível quase de um reflexo" (p. 32). Ao apercebermo-nos, de acordo com a nossa prática docente, que os alunos quando chegam ao 10.º ano tendem a procurar mais os processos numéricos do que algébricos para exprimir o seu raciocínio, procuramos averiguar como se desenvolve o sentido do símbolo de alunos deste ano escolar no tema de funções.

O uso de símbolos no desenvolvimento do pensamento algébrico

A álgebra desperta o interesse da investigação na área da educação matemática uma vez que é uma das suas linguagens de expressão. Ao mediar a transição do pensamento concreto para o abstracto, dá-se significado à álgebra como linguagem formal que ajuda os alunos a compreender melhor a matemática escolar. Essa compreensão traduz o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno (Arcavi, 1994; Kaput, 1999; Kieran, 1992) sem ficar preso à escrita da linguagem formal (Arcavi, 1994). A discussão sobre o entendimento de pensamento algébrico faz emergir um misto de aspectos que ajudam a caracterizá-lo. De acordo com as perspectivas de Kaput (1999) e Kieran (1992), trata-se da capacidade que o aluno demonstra para analisar e estabelecer relações, procurando fazer uso delas de modo a aplicá-las em novas situações através de uma linguagem cada vez mais simbólica para expressar e sintetizar as suas ideias. Associado a estes aspectos surge o uso de simbologia e o conceito de variável.

O uso de símbolos permite aglutinar as ideias tornando a informação mais fácil de compreender e manipular (Schoenfeld & Arcavi, 1988; Sfard & Linchevski, 1994). A noção de símbolo surge como um dos modos de representação de conceitos e procedimentos matemáticos, mas estende-se a qualquer coisa que a representa. Para Castro e Castro (1997), o símbolo é um ente que se toma como substituto de algo, ao qual se chama referente. Estes entes podem tomar uma variedade de formas, desde objectos concretos a marcas escritas no papel e podem representar desde conceitos simples a outros mais complexos. A capacidade de usar os símbolos permite manipulá-los no lugar de objectos que representam. Os símbolos matemáticos ajudam a generalizar ideias, a aplicar essas ideias a diversas situações e a facilitar a comunicação sobre elas. Porém, Davis e Hersh (1995) consideram que quando se perde de vista o significado daquilo que os símbolos representam, cai-se no formalismo e no uso perigoso do simbolismo. Castro e Castro (1997) advogam que muitas das dificuldades em matemática procedem de uma ênfase prematura no simbolismo e nas regras sem ter em conta a compreensão do significado matemático do referente. Estes autores defendem que o desenvolvimento da capacidade de usar os símbolos é fundamental, quando se introduzem aos alunos novos símbolos matemáticos, para estabelecer conexões entre o símbolo e o significado a ele associado.

A importância que a actividade de representar e analisar situações usando símbolos algébricos tem na promoção do pensamento algébrico, faz com que Arcavi (1994) defenda que se deve procurar o desenvolvimento do 'sentido de símbolo' (*symbol sense*). Ter 'sentido de símbolo' inclui a capacidade de seleccionar uma representação simbólica, o que faculta ao aluno o poder de decidir quando os símbolos são úteis e como devem ser utilizados para estabelecer relações e generalizar. Na procura de fazer com que os alunos entendam os símbolos, o autor apresenta seis componentes fundamentais: (1) simpatia com os símbolos, que inclui a sua compreensão, o sentido estético do seu poder, permitindo compreender quando e como devem ser utilizados para mostrar relações; (2) capacidade de 'manipular' e 'ler' através das expressões simbólicas, que inclui a capacidade de se afastar dos significados e ao mesmo tempo conseguir ter uma visão global das expressões simbólicas de modo a que as manipulações sejam rápidas e eficientes, em que o aluno faz uma leitura dos símbolos em vez de tentar um algoritmo em busca de uma solução; (3) consciência de que se pode estabelecer com sucesso relações simbólicas; (4) capacidade de efectuar uma escolha apropriada do símbolo; (5) consciência da necessidade de rever os significados dos símbolos durante a resolução de um problema e comparar os resultados obtidos com os esperados e ver a sua adequação ao contexto do problema; (6) consciência de que os símbolos podem desempenhar papéis distintos de acordo com os contextos em que são usados e desenvolver o sentido intuitivo dessas diferenças e a capacidade de trabalhar com eles.

Relacionado com o conceito de símbolo surge o de variável, que Schoenfeld e Arcavi (1988) consideram tratar-se de um conceito central no ensino e na aprendizagem da matemática. Para estes autores, compreender este conceito fornece a base para a transição da aritmética para a álgebra e é necessário para o uso com significado de muitos conceitos matemáticos. Os aspectos dinâmicos do conceito de variável devem ser apresentados aos alunos sempre que for oportuno, podendo-se, numa primeira fase, fazer observações simples de problemas de variação e, numa fase mais avançada, analisar relações de dependência.

Para ilustrar diferentes formas de usar letras em álgebra, Küchemann (1978) usa uma categorização que redefine o significado de variável ao apresentar seis níveis para o uso das letras: *letra avaliada*- a letra pode ser avaliada de imediato sem passos intermédios (se $a+5=8$ então $a=3$); *letra não considerada*- a existência da letra é reconhecida sem que lhe seja dado um significado (se $a+b=43$ então $a+b+2=45$); *letra como objecto*- é entendida como o nome de um objecto concreto (se um rectângulo tem c de comprimento e l de largura então o seu perímetro é $P=2l+2c$); *letra como incógnita*- é entendida como um número específico mas desconhecido; *letra como número generalizado*- representa um conjunto de valores (se $c+d=10$ e $c<d$ então c assume vários valores); *letra como variável*- é entendida como a representação de uma série de valores desconhecidos (na presença de duas expressões do tipo $2n$ e $n+2$ podemos analisar qual delas é a maior). Embora esta categorização ajude a entender o uso das letras por parte dos alunos em várias situações, o autor salienta que o importante em álgebra não é medir a capacidade do uso de técnicas e algoritmos, mas sim compreender como os alunos lidam com certos problemas matemáticos.

Considerando a utilização de variáveis intrinsecamente ligadas à álgebra, Usiskin (1988) advoga que estas são usadas de formas diferentes de acordo com a concepção da álgebra que se considere: (1) *estudo de estruturas*: as variáveis são usadas como símbolos arbitrários nas actividades de cálculo algébrico, tornando-se sinais que se manipulam; (2) *aritmética generalizada*: as variáveis são usadas como forma de traduzir e generalizar modelos; (3) *estudo de procedimentos para resolver problemas*: as variáveis são usadas como incógnitas ou constantes que podem ser simplificadas e onde se pode determinar o seu valor; (4) *estudo de relações entre grandezas*: as variáveis são usadas como argumentos ou parâmetros que permitem relacionar objectos e fazer gráficos. Perante esta pluralidade, o autor reforça a ideia de que o conceito de variável é multifacetado e embora a álgebra se relacione com a compreensão do significado das *letras* e das operações entre elas, limitá-la a este aspecto é muito redutor.

Aliado à capacidade de manipular símbolos surge a capacidade de os interpretar e usar de forma criativa para descrever situações e resolver problemas (Ponte, 2006). A resolução de problemas é uma actividade promotora da compreensão de significados e do uso da linguagem algébrica por apelar à representação de quantidades (NCTM, 2007). Vários estudos corroboram a importância da resolução de problemas no desenvolvimento do sentido do símbolo. Por exemplo, Freire, Cabral e Filho (2004) ao categorizarem as estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas, estes apresentaram estratégias simbólicas para representar as suas formas de pensar e exprimirem as suas ideias. Também Goldin (2002) identificou diferentes tipos de representação na resolução de problemas, entre os quais a representação simbólica, que considera serem factores decisivos no ensino−aprendizagem de Matemática, quer pelo uso de um sistema de símbolos, quer pelo papel que desempenham na conceptualização do mundo real.

Método

Com este estudo procuramos averiguar como alunos do 10.º ano desenvolvem o sentido do símbolo no tema de funções através, quanto possível, da resolução de problemas em grupo de quatro elementos. Com este objectivo, realizámos três estudos de caso com alunos de grupos distintos seleccionados em função do seu desempenho de aprendizagem a Matemática no 1.º período do ano lectivo de 2009/10: Rui (bom desempenho), Sílvia (desempenho médio) e Rute (desempenho fraco). Entre os 24 alunos que participaram no estudo optamos por estes três pela pertinência da informação que recolhemos de cada um deles. Os dados foram recolhidos através dos registos escritos que os alunos produziram na resolução das tarefas propostas antes da discussão em grupo turma; da transcrição da gravação da resolução das tarefas por cada grupo (RA); de uma entrevista (E) realizada numa sala de aula a cada um dos três alunos; e por notas de campo (NC). Com a entrevista efectuada após a leccionação do tema das funções, procuramos aceder com mais detalhe ao modo de pensar dos alunos acerca de algumas das tarefas trabalhadas. O estudo das funções do 10.º ano decorreu no 2.º período e no início do 3.º e foi orientado pela valorização da actividade do aluno na resolução das tarefas propostas, que foram elaboradas com base em estudos realizados por Arcavi (1994), Kieran (1992) e Küchemann (1978) e em alguns manuais escolares.

Após uma primeira leitura da documentação reunida procurámos examinar, categorizar e recombinar evidências (Yin, 2005) sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, retirando para este texto a informação relativa ao sentido do símbolo. A informação recolhida foi fragmentada na procura de regularidades mas sem retirar o sentido conferido pelos participantes. Novas leituras a estes fragmentos permitiram, como defendem Miles e Huberman (1994), organizar e sistematizar a informação em torno das seguintes categorias:

(1) *Simpatia com os símbolos*: escolher a variável de acordo com o contexto, revendo o significado dos símbolos usados e percebendo a sua importância na tradução de informações;

(2) *Ler através das expressões*: manipular a expressão através da informação que retirou da sua análise geral ainda que em termos numéricos; afastar-se do significado de um símbolo analisando uma expressão no seu todo podendo a posterior verificar o resultado obtido;

(3) *Distinguir os papéis dos símbolos*: reconhecer quando uma letra assume o papel de incógnita, parâmetro, variável ou número generalizado.

Em cada uma destas categorias, a informação é apresentada segundo o momento em que foi recolhida antes, durante e após a intervenção pedagógica que orientou o estudo das funções.

Desenvolvimento do sentido de símbolo

Simpatia com os símbolos

Antes da intervenção pedagógica. No início do estudo das funções, os três alunos revelam capacidade de interpretar enunciados de problemas próximos dos que trabalharam no 3.º ciclo, como se verifica, por exemplo, na resolução do seguinte problema:

Os três lados de um triângulo têm diferentes comprimentos. O segundo lado tem mais três centímetros que o primeiro e o terceiro lado mede o dobro do primeiro lado. Como podes representar o perímetro deste triângulo?

Rute usa a letra l para escrever as expressões relativas à medida do comprimento de cada um dos lados e identifica por P o valor do perímetro. Rui e Sílvia usam a letra x para representar a variação conjunta dos comprimentos dos diferentes lados de um triângulo escaleno e a letra P para representar o perímetro do triângulo. Na identificação do dobro de uma dada quantidade Sílvia transforma a soma de dois termos idênticos no seu quadrado (Fig. 1).

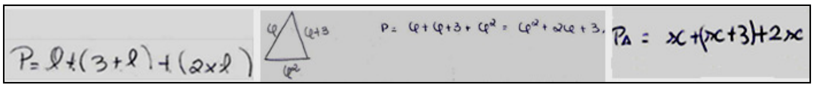
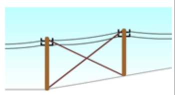


Figura 1: Tradução do perímetro de um triângulo escaleno por Rute, Sílvia e Rui.

Na tradução de enunciados de outros problemas, os alunos tendem a privilegiar o uso da letra x para representar quantidades desconhecidas.

Durante a intervenção pedagógica. Na resolução de problemas que implicam a descoberta de modelos matemáticos, Sílvia e Rui vêem-se confrontados com a necessidade de trabalhar com símbolos para exprimirem o seu raciocínio, como se verifica na resolução do problema "A inclinação dos postes":

Em dois postes, distanciados 11m um do outro, medindo um 8m e o outro 7m, foram colocadas duas cordas esticadas ligando o topo de uma à base de outra e vice-versa, tal como é sugerido na figura ao lado. A que distância do solo as cordas se cruzam? Na resolução explica como procedeste para chegar à solução e apresenta os cálculos que efectuaste.



Na abordagem ao problema, Sílvia insere um referencial que lhe permite estabelecer as relações que identifica e escolhe uma letra para representar o desnível do segundo poste em relação à horizontal: "um eixo por aqui, a altura vai aumentar, mas a distância entre os postes vai ser na mesma 11, aqui vai ser $(11, y)$" (RA15).

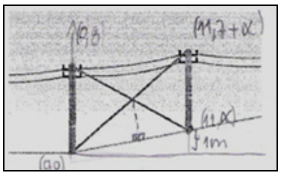
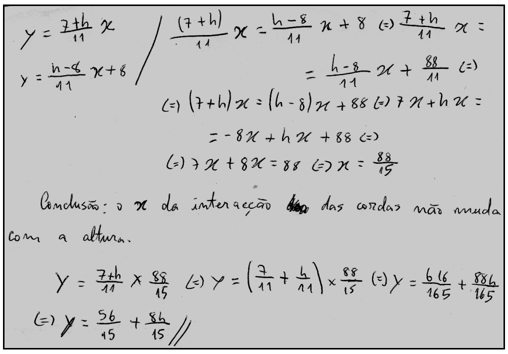


Figura 2: Representação de Sílvia do problema “A inclinação dos Postes”.

A aluna escolhe a letra y por esta corresponder à altura no eixo das ordenadas, sem se aperceber que deste modo “está a usar a mesma letra em situações diferentes” (NC10/05/10). Na discussão com os seus colegas de grupo opta por usar α pois “assim não se confunde com o y da função” (NC10/05/10).

Já Rui considera que precisa de “escrever as equações das rectas e calcular a intersecção” (RA15). Designa por x a distância do primeiro poste ao ponto de intersecção, por y a distância deste ponto ao solo no caso de o terreno ser regular e por h o desnível do segundo poste em relação à horizontal. O aluno apercebe-se que no caso de o terreno ser inclinado precisa de “modificar as coordenadas acrescentando um h à altura e fazer o cálculo normalmente até chegar à equação” (RA15) (Fig. 3).



$y = \frac{7+h}{11}x$

$y = \frac{h-8}{11}x + 8$

$\frac{(7+h)}{11}x = \frac{h-8}{11}x + 8 \Leftrightarrow \frac{7+h}{11}x =$

$= \frac{h-8}{11}x + \frac{88}{11} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (7+h)x = (h-8)x + 88 \Leftrightarrow 7x + hx =$

$= -8x + hx + 88 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7x + 8x = 88 \Leftrightarrow x = \frac{88}{15}$

Conclusão: o x da interacção das cordas não muda com a altura.

$y = \frac{7+h}{11} \times \frac{88}{15} \Leftrightarrow y = \left(\frac{7}{11} + \frac{h}{11}\right) \times \frac{88}{15} \Leftrightarrow y = \frac{616}{165} + \frac{88h}{165}$

$\Leftrightarrow y = \frac{56}{15} + \frac{8h}{15}$ //

Figura 3: Determinação da altura a que se cruzam as cordas por Rui.

Ao escreverem as coordenadas do segundo poste em função de α, ou a altura em função de h, Sílvia e Rui manifestam que compreendem o significado dos símbolos que escolheram. Rute, embora indicie evoluir em termos de capacidade para escolher um símbolo adequado ao contexto, apenas o consegue fazer perante problemas que envolvem menos variáveis. Neste problema não foi capaz de traduzir a relação simbolicamente, o que a impediu de o resolver.

Após a intervenção pedagógica. Os alunos representam algebricamente a informação que retiram dos enunciados de problemas, usando os símbolos de acordo com o contexto. Por exemplo, escolhem a letra *d* para representar a distância e a letra *t* para representar o tempo, como exemplificam as resoluções de Sílvia e Rute (Fig. 4).

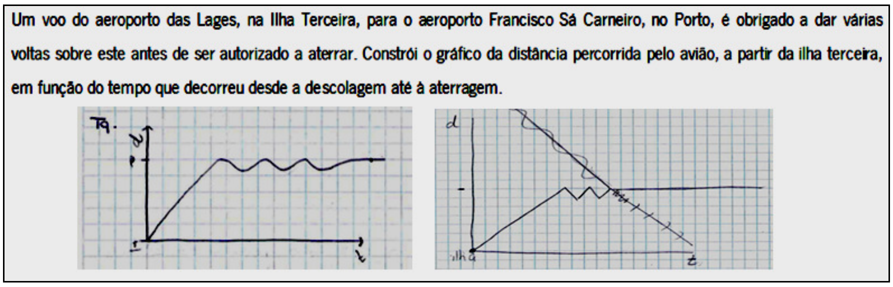


Figura 4: Esboço da distância percorrida por um avião segundo Sílvia e Rute.

Apesar de seleccionarem a variável de acordo com o contexto, apenas Rui e Sílvia, que apresentaram resoluções idênticas, revelam compreender como devem ser usadas as variáveis para mostrar informação. Rute evidencia não rever o significado dos símbolos que escolheu.

Noutra situação em que é pedida uma relação entre as quantidades que representam o número de professores e de alunos, Rui, Sílvia e Rute estabelecem a relação entre as variáveis sem atender à ordem da leitura que fazem (Fig. 5).

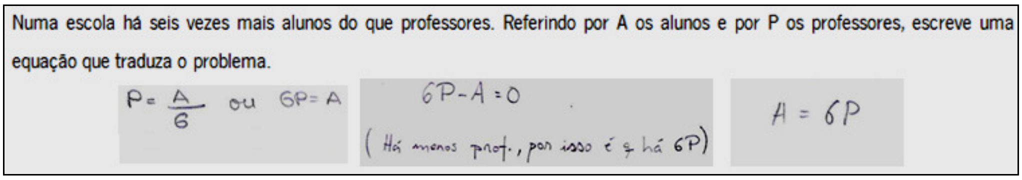


Figura 5: Relação entre o n.º de professores e alunos segundo Sílvia, Rute e Rui.

Sílvia apresenta duas expressões equivalentes, o que revela compreender a relação que estabelece e a dependência entre as variáveis. Rute opta por uma relação de diferença entre duas quantidades e apresenta a respectiva justificação, manifestando compreender o significado das letras que elas representam. Rui apresenta apenas uma expressão e coloca no primeiro membro a letra A, denotando compreender o poder dos símbolos que usou não se deixando influenciar pela ordem de leitura.

Ler através das expressões

Antes da intervenção pedagógica. A noção que os alunos mostram ter sobre o uso de letras surge associada à ideia de que para determinar o valor de uma expressão têm que aplicar um conjunto de procedimentos. Por exemplo, na determinação dos valores que verificam uma equação com várias letras, os alunos indiciam que a equação se pode reduzir à forma $y = p$. Mas, para Sílvia as letras ao serem diferentes significa que não podem assumir os mesmos valores, enquanto para Rute a igualdade entre duas letras leva-a a considerar que ambas assumem os mesmos valores (Fig. 6).

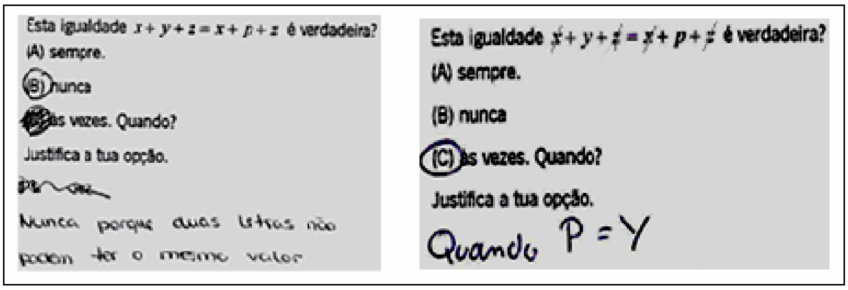


Figura 6: Comparação entre expressões de Sílvia e Rui.

Fruto da actividade que desenvolveram nos diferentes anos escolares, os alunos tendem a considerar o significado de cada uma das letras em particular não analisando uma expressão como um todo. No entanto, Rui apercebe-se da relação entre as duas variáveis.

A capacidade que Sílvia e Rui revelam na análise e simplificação de expressões algébricas inteiras já não é a mesma quando trabalham com expressões fraccionárias. Sílvia atribui valores particulares às letras em vez de procurar relações entre os termos que lhe permitisse simplificá-los. Rui opta por somar os numeradores das fracções como se os denominadores fossem iguais, desembaraçando-se deles como se fosse uma equação. Rute não consegue delinear nenhuma estratégia para simplificar a expressão (Fig. 7).

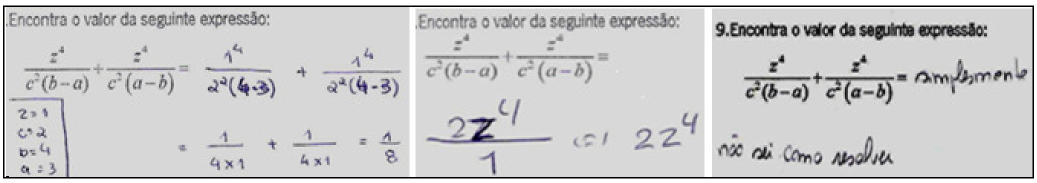


Figura 7: Simplificação de uma fracção por Sílvia, Rui e Rute.

A atribuição de valores diferentes às letras indicia que, para Sílvia, estas não podem assumir o mesmo valor. Ao unir com o sinal de igual a expressão dada com a expressão que obtém pelos valores que atribui às letras, a aluna não distingue o geral do particular. Rui não identifica que os termos são simétricos. Ao simplificá-los revela que não conseguiu ler a expressão.

Os alunos evidenciam diferentes formas de analisar e estabelecer relações entre expressões, como exemplifica a seguinte situação (Fig. 8).

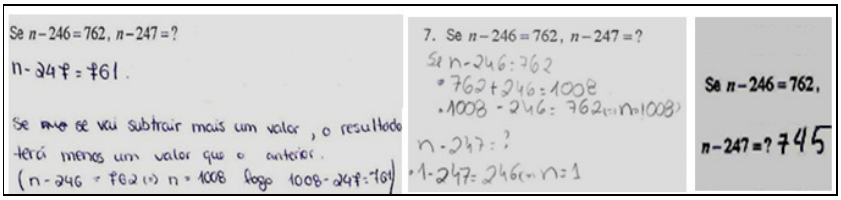


Figura 8: Análise de relações entre expressões de Sílvia, Rute e Rui.

Perante o conhecimento do valor de uma expressão, Sílvia apercebe-se da transformação que tem de fazer para determinar o valor de outra expressão. Exprime essa transformação em linguagem corrente, mas recorre à linguagem simbólica para dar significado à interpretação que efectuou. Rute aplica regras em detrimento de estabelecer relações entre as expressões. Rui apresenta um valor como solução desprovido de qualquer justificação, o que parece resultar da sequência numérica que estabelece entre o subtractivo das duas expressões. Considera o algarismo das centenas do número que traduz a primeira expressão (7) e os algarismos das restantes ordens advém da sequência que o aluno estabelece entre 46 e 47.

Durante a intervenção pedagógica. Os alunos tendem a analisar relações embora prevaleça a aplicação de procedimentos algébricos. Por exemplo, na resolução do problema "Volume das caixas" obtidas a partir do corte de quadrados iguais nos cantos de uma folha A4, Rui e Sílvia começam por conjecturar que o volume é o mesmo procurando provar através da aplicação da fórmula do volume de um prisma (Fig. 9).

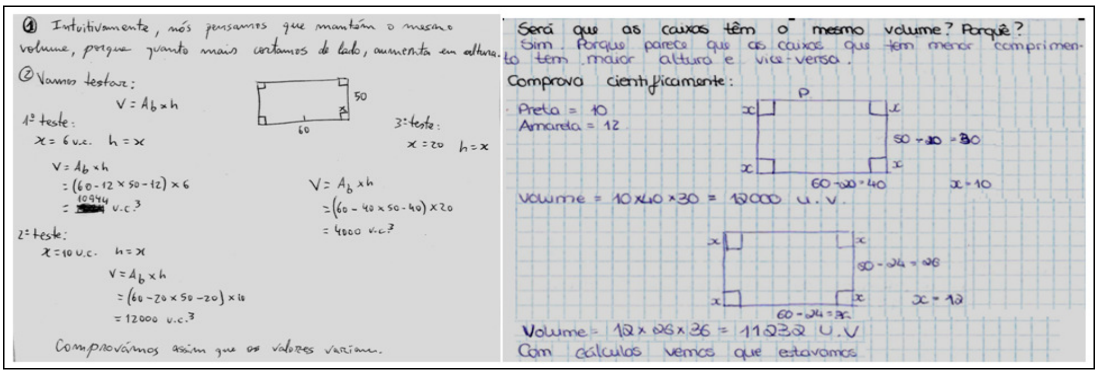


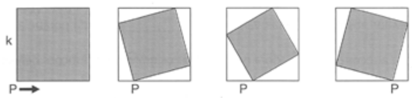
Figura 9: Variação do volume de "caixas" segundo Rui e Sílvia.

Já Rute conjectura que os volumes são diferentes, embora não apresente qualquer esboço nem justificação que ilustre a variação do volume.

Ao obterem valores diferentes para o volume nos casos que testam, aceitam ou refutam a sua conjectura com base num reduzido número de casos, como exemplifica a afirmação de Rui: “depois de todas as tentativas chegamos à conclusão que quanto menor for o corte maior é o volume” (RA17).

Na resolução de outro problema, “Imagens em movimento”, os três alunos mostram capacidade para analisar as relações entre duas variáveis que variam conjuntamente. Sílvia e Rui atribuem letras às variáveis e estabelecem um modelo que representa a situação em causa. Rute apenas usa a linguagem corrente para expressar a sua compreensão da situação (Fig. 10).

Uma loja de fotografia tem um modelo de uma moldura digital. A moldura tem a forma de uma quadrado com 6 cm de lado. Dentro dessa moldura vai-se movendo uma fotografia, também de forma quadrada, gerando sequências de quadrados inscritos, dando movimento à imagem estática, como sugere a figura que a seguir se apresenta.



Quais os possíveis valores para o deslocamento da fotografia dentro da moldura?

Esboçar um possível gráfico, sem fazer nenhum cálculo, que represente a variação da área do quadrado inscrito à medida que o ponto P se desloca.

Estabelecer o modelo matemático que relaciona a área de cada quadrado com o deslocamento do ponto P.

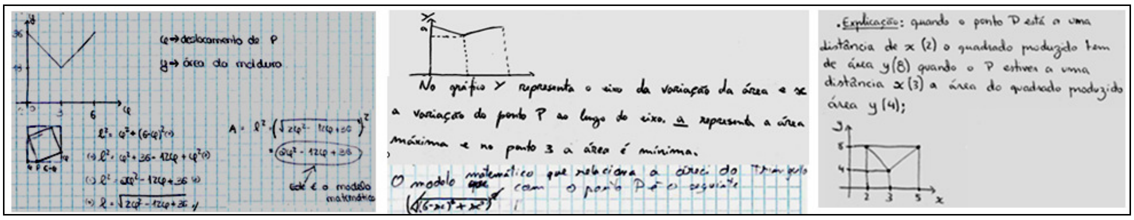


Figura 10: Esboço da variação da área de um quadrado de Sílvia, Rui e Rute.

No esboço gráfico que desenham, Sílvia e Rui preocupam-se em atribuir significado às letras que escolhem para representar as duas variáveis e mostram compreender a relação de dependência de uma em relação à outra. Rute não mostra ser capaz de se afastar do significado de cada uma das letras.

Após a intervenção pedagógica. Os alunos parecem alterar a forma como pensam quando analisam relações. Enquanto Sílvia e Rui antes da intervenção pedagógica procuravam encontrar alguns valores que satisfizessem uma igualdade, agora procuram dar sentido à relação entre as expressões, como se observa na resolução que apresentam de uma equação fraccionária. Embora não conheçam ainda o procedimento de resolução destas equações, apercebem-se da relação que há entre as expressões do numerador e do denominador que constituem a expressão do 1.º membro da equação. Já Rute opta por concretizar a variável para se aperceber dessa relação (Fig. 11).

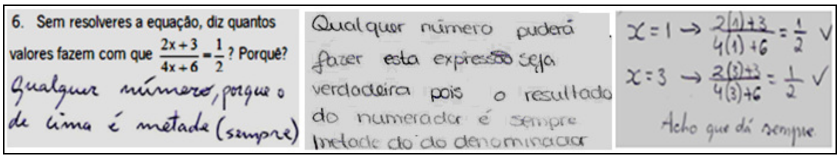


Figura 11: Resolução de uma equação fraccionária por Rui, Sílvia e Rute.

A capacidade de manipular as expressões também se verifica na resolução da desigualdade entre expressões algébricas, embora Rute continue a aplicar regras mesmo em situações em que as expressões não apresentem denominadores ou mais do que uma variável (Fig. 12).

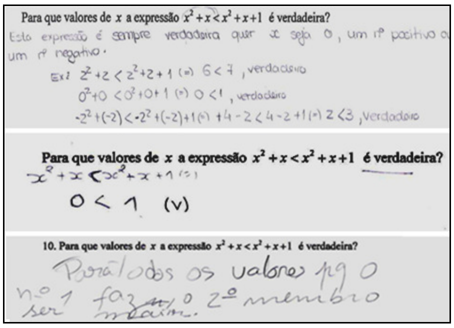


Figura 12: Comparação de expressões por Sílvia, Rute e Rui.

Sílvia, para além de explicar o seu raciocínio através da linguagem corrente, fundamenta a sua resposta através da concretização de três valores. Rute identifica os termos semelhantes e reduz a inequação a uma forma mais simples: "eu fiz de cabeça, cortei x^2 com x^2 e x com x" (NC14/06/10). Constata que a desigualdade é sempre verdadeira independentemente dos valores de x, mas não explicita o conjunto de valores que a variável pode assumir: "se é verdade é porque x pode ser qualquer coisa" (NC14/06/10). Rui apercebe-se que as expressões diferem de uma unidade para qualquer valor que atribua à variável.

Distinguir os papéis dos símbolos

Antes da intervenção pedagógica. Na tradução do significado das letras, como por exemplo nas expressões algébricas $A=c\times l$, $n+3$ e $a+1=24$, os alunos indiciam compreender que estas nem sempre assumem o mesmo papel (Fig. 13).

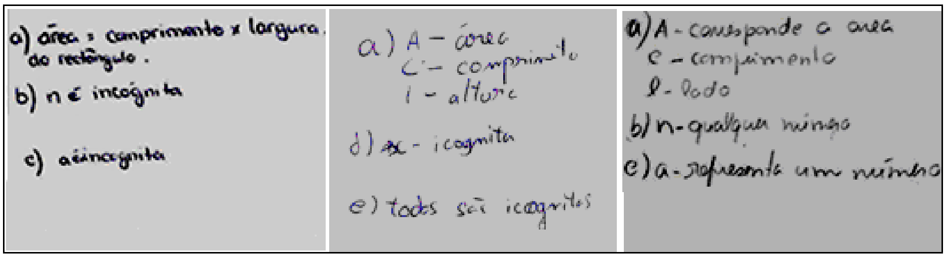


Figura 13: Identificação dos papéis das letras por Sílvia, Rui e Rute.

No caso em que as letras representam uma incógnita ou uma variável, Sílvia e Rui têm tendência a designá-las por incógnita. Rute, ao considerar que as letras representam um número ou um valor desconhecido, tende a vê-las como rótulos ou objectos reconhecendo-as pelo nome da entidade que representam.

Durante a intervenção pedagógica. A análise da influência da variação dos parâmetros que compõem uma expressão que representa uma função quadrática, nas relações que podem estabelecer entre os gráficos, permite aos alunos aperceberem-se dos diferentes papéis que as letras assumem. Sílvia e Rui consideram a influência dos parâmetros na deslocação da parábola sem efectuar qualquer concretização, enquanto Rute necessita de exemplificar substituindo os parâmetros por números inteiros (Fig. 14).

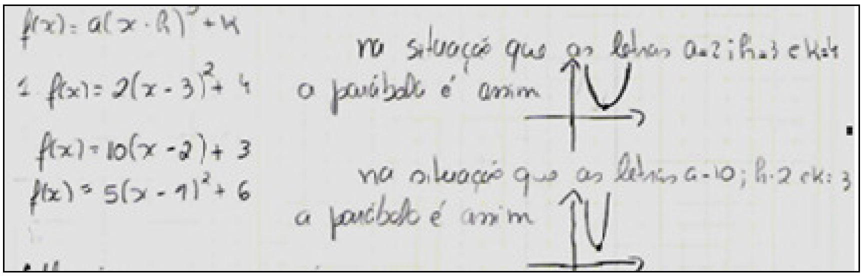


Figura 14: Efeito dos parâmetros na transformação de parábolas segundo Rute.

Os três alunos diferenciam o papel que as variáveis, dependente e independente, desempenham em relação aos parâmetros. No entanto, Sílvia e Rute apenas se apercebem de algumas das transformações, enquanto Rui constata a influência que a variação dos parâmetros tem nas relações que pode estabelecer entre gráficos, quando afirma que "recorri à calculadora e ao experimentar mudar o a, vi as parábolas a virar, e ao mudar os outros vi todas ao mesmo tempo" (RA12).

Após a intervenção pedagógica. Na análise da translação do gráfico de uma função, os alunos reconhecem que há valores associados ao vector da deslocação que podem ser representados por letras e fazem a distinção entre parâmetro e variável. Por exemplo, Sílvia e Rui recorrem à calculadora para comparar o gráfico de $y = x$ com o gráfico de $y = |x|$. A partir do esboço gráfico da segunda função, Sílvia fez uma extensão à família de funções que resultam da translação do gráfico desta função (Fig. 15).

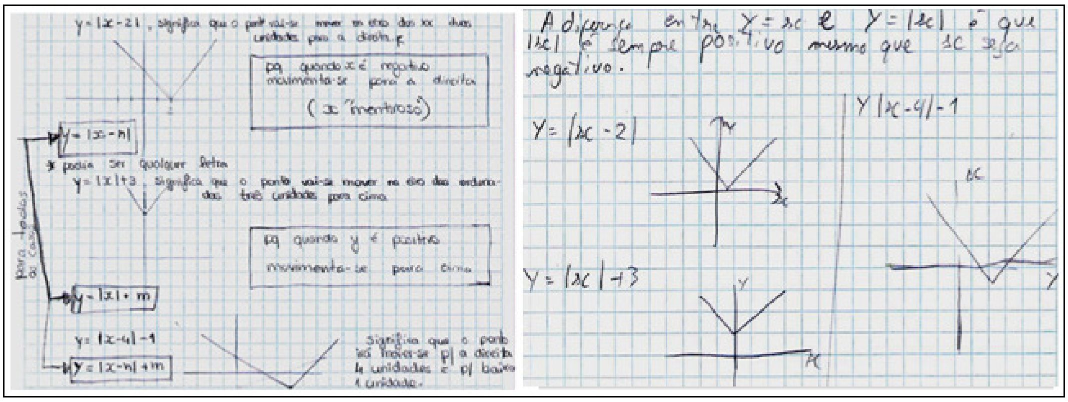


Figura 15: Efeito dos parâmetros na transformação de gráficos segundo Sílvia e Rui.

Da observação de um número limitado de casos, da translação do gráfico da função $y = |x|$, a aluna infere que a deslocação na vertical é intuitiva o que já não acontece na horizontal: "quando somo valores positivos o gráfico sobe, quando somo valores negativos desce; quando faço isso no x é ao contrário" (E). Rui apenas se limita a fazer as suas observações em termos concretos. Apesar de não escrever uma expressão que generalize as transformações que efectuou mentalmente, manifesta compreender a influência dos parâmetros, no caso geral, tendo por isso assumido que o seu raciocínio se aplica em qualquer situação, independentemente do número de unidades que o gráfico original se desloque. Quanto a Rute, reconhece que a variação dos parâmetros influencia a deslocação no eixo dos xx ou no eixo dos yy "porque eu pensei assim, esta é $2x$ tem que cortar o eixo do xx, e esta é $y = 3$, tem que cortar o eixo do yy" (E). Quando tenta explicar o seu raciocínio, baseado nos gráficos das funções linear e constante, decide testar a sua afirmação na calculadora e reconhece que "não me lembrei (…) vai descer duas unidades (…) está a mexer em x, e o eixo dos xx é 'mentiroso', porque está menos e vai deslocar-se duas unidades para a direita" (E). A relação que estabelece entre a expressão algébrica inicial e as seguintes permite-lhe esboçar os gráficos e depreender a influência dos valores que altera.

Conclusões

Simpatia com os símbolos

Sílvia, Rui e Rute iniciam o estudo de funções a traduzir enunciados de problemas da linguagem corrente para linguagem matemática, reconhecendo a utilidade do símbolo que escolhem para estabelecer uma relação. Durante o estudo deste tema, Rui e Sílvia revelam capacidade para rever os símbolos que usam, enquanto Rute tende a escolher símbolos de acordo com o problema, denotando fazê-lo com sucesso em casos em que os problemas envolvem poucas variáveis. Os três alunos, por vezes, recorrem em simultâneo à notação simbólica e à designação em linguagem corrente do que a variável representa, o que para Arcavi (1994) evidencia a capacidade de usar os símbolos de acordo com o contexto. Após a intervenção pedagógica, destaca-se a capacidade que adquiriram para saber quando usar os símbolos. Rui e Sílvia mostram compreender como os usar, numa maior diversidade de situações. Para Arcavi (1994), a capacidade de trabalhar com letras parece ter influência na forma como se usa e compreende os símbolos algébricos. A diversidade de situações em que as letras podem ser usadas e com as quais foram confrontados, parece ter influenciado a capacidade que os alunos adquiriram para seleccionar o símbolo que melhor representa a situação no contexto do problema.

Ler através das expressões

Embora os três alunos privilegiem a aplicação de algoritmos, Rui e Sílvia conseguem manipular expressões através da sua análise global. Rui é quem revela maior capacidade para compreender a relação entre as variáveis quando as expressões são inteiras. Na manipulação de símbolos algébricos, Sílvia nem sempre se preocupa com aquilo que eles representam, o que, em algumas situações, a impede de compreender os resultados que obtém, como foi o caso em que considerou que letras diferentes não podem assumir o mesmo valor. Em situações que envolvem relações com expressões fraccionárias, os alunos não as analisam numa perspectiva global preferindo aplicar regras suas conhecidas, o que parece dever-se a práticas rotineiras e mecanizadas, como defende Kieran (1992).

Durante o estudo, os alunos tendem a fazer as suas conjecturas com base numa análise geral da situação e a posteriori procuram verificá-las através da concretização das variáveis. Como defendem Lins e Gimenez (1997), por concretizações numéricas os alunos inferem algumas das relações. Rui e Sílvia tendem a usar progressivamente uma linguagem simbólica para traduzir as relações que estabelecem procurando dar significado aos símbolos que usam. Rute tende a fazê-lo nas suas próprias palavras denotando uma maior dificuldade em se afastar do significado individual dos símbolos. Assim, os três alunos embora desenvolvam a capacidade de trabalhar com letras, não deixam de inferir algumas relações a partir de casos particulares, o que revela que em expressões que envolvem muitas variáveis nem sempre conseguem ler através das expressões, nem são capazes de as manipular através das informações que dela podem retirar (Arcavi, 1994). A evolução dos alunos parece dever-se ao tipo de tarefas que trabalharam e à possibilidade de as discutir.

Distinguir os papéis dos símbolos

Os três alunos reconhecem que as letras podem assumir diferentes papéis mas nenhum deles os identifica claramente. Na análise que fazem de algumas expressões, Rui, Sílvia e Rute identificam o papel das letras como objecto (Küchemann, 1978), quando estas estão associadas à inicial do nome da entidade que representam. Quando as letras representam incógnitas ou variáveis, Rui e Sílvia tendem a designá-las como incógnita, o que parece resultar do uso acrítico que fazem das letras (Kieran, 1992), como exemplifica a afirmação de Sílvia: "eu acho que é melhor pôr aqui como aparece na máquina" (NC01/02/10). Por isso, Sílvia e Rui tendem a usar, na maior parte das situações, a letra x.

Durante a intervenção pedagógica, os três alunos reconhecem o papel das letras ao distinguirem as variáveis dependente e independente dos parâmetros. Sílvia e Rui nem sempre recorrem à concretização para inferir relações, enquanto Rute tem necessidade de o fazer.

Após a intervenção pedagógica, Sílvia evidencia ter uma noção mais clara do papel das letras, quando afirma: "varia e influencia a forma como o gráfico aparece" (E), ou quando usa letras para generalizar uma relação. Rui, apesar de mostrar capacidade para inferir as mesmas conclusões tende a privilegiar sínteses em linguagem corrente.

Quanto a Rute, de acordo com Kaput (1999), tende a manipular símbolos algébricos sem a preocupação de perceber o que eles representam. Esta aluna evidencia reconhecer que as letras que usa, ainda que de forma arbitrária, assumem papéis diferentes. Este facto, é corroborado pela sua afirmação: "aqui fazia, ia por tentativas, mas não pode ser (…) vou usar letras para representar coisas desconhecidas que assim dá para muitos casos" (E). Este uso arbitrário das letras revela, segundo Lins e Gimenez (1997), uma tendência "letrista. O facto dos três alunos continuarem a revelar alguma dificuldade em identificar o papel das letras quando estas assumem o papel de variável parece dever-se ao múltiplo uso que o conceito de variável assume como defendem Shoenfeld e Arcavi (1988).

Referências

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35.

Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. In L. Rico (Coord.), *La educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-122). Barcelona: Editorial Horsori.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Freire, S., Cabral, C., & Filho, C. (2004). Estratégias e erros utilizados na resolução de problemas algébricos. In *Anais do VIII ENEM - Comunicação Científica GT 2 - Educação Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental*. Acedido em 3 de Agosto, 2010, de http://www.proativa.virtual.ufc.br/publicacoes/artigos/fe344475950fa0e968e183661eff2bcb.pdf.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Küchemann, D. (1978). Childrens' understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 7 (4) pp. 24-28.

Lins, R. C., & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.* Campinas: Editora Papirus.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook*. Thousand Oaks: Sage.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of the variable. In *Mathematics Teacher, 81* (6), 420-427.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). *Between Arithmetic and Algebra: in the search of a Missing link the case of equations and inequality*. Acedido em 8 de Agosto, 2010, de http://seminariomatematico.dm.unito.it/rendiconti/cartaceo/52-3/279.pdf.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In F. Coxford (Ed.), *The Ideas of algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., & Borralho, A. (2006). Os padrões no Ensino- Aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 193-212). Lisboa: Secção de Educação.

Yin, R. K. (2005). *Estudo de Caso: planejamento e métodos.* Porto Alegre: Bookman.