Universidade do Minho
Instituto de Estudos da Criança

Maria Teresa Pimentel Cardoso

O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação contínua?

Janeiro de 2010

O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação contínua?

Maria Teresa Pimentel Cardoso

UMinho | 2010

Universidade do Minho
Instituto de Estudos da Criança

Maria Teresa Pimentel Cardoso

O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que relações com um programa de formação contínua?

Tese de Doutoramento em Estudos da Criança
Área de Conhecimento em Matemática Elementar

Trabalho efectuado sob a orientação do
Prof. Doutor Pedro Palhares
e da
Prof.ª Doutora Isabel Vale

Janeiro de 2010

Ao Benjamim

À Rita

À Inês

Cinzenta, meu amigo, é toda a teoria
e verde a mais dourada árvore da vida.
Goethe

Agradecimentos

À Isabel Vale e ao Pedro Palhares, meus orientadores e amigos, pelo valor das suas opiniões críticas e construtivas, pelas suas preciosas sugestões e pela sua inteira disponibilidade e abertura.

Ainda à Isabel Vale, pelo desafio inicial e por todos os momentos de presença e cumplicidade.

À Lina Fonseca, pelo seu empenho na revisão de parte deste trabalho, apoio e amizade.

Aos quatro professores participantes neste estudo, pela sua total disponibilidade e colaboração.

À Filipa e à Daniela Salé, pelo seu excelente trabalho de transcrição.

À minha amiga Manuela Malhado, pelo seu apoio na tradução.

A todos os colegas e amigos que “bateram com os dedos na madeira”, dando-me força e estímulo nos momentos mais cinzentos.

À minha família, em especial aos meus pais, pelo seu apoio e incentivo.

Resumo

Este estudo centra-se num programa de formação contínua em Matemática para professores do 1.º ciclo do Ensino Básico lançado em Portugal a partir de 2005 e procura compreender a influência da dinâmica da formação em quatro professores participantes. Em particular, pretendia-se investigar o impacto do programa no seu conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, nas suas perspectivas sobre a matemática e o seu ensino e aprendizagem e nas atitudes e aprendizagens dos alunos envolvidos.

Estes professores foram acompanhados durante dois anos na sua actividade profissional no contexto da sua frequência do programa de formação numa Escola Superior de Educação e, durante o segundo ano, foi-lhes sugerido o tema do pensamento algébrico para ancorarem o seu trabalho autónomo, já que, entre outros factores, era um tema com fortes potencialidades no ensino e aprendizagem da matemática e que estes professores não dominavam visto não fazer parte dos conteúdos do Programa de Matemática em vigor.

Trata-se de uma investigação de natureza qualitativa e interpretativa, concretizada na modalidade de estudo de caso longitudinal de quatro professores. Privilegiou-se uma recolha de dados com base em entrevistas, observações e documentos variados utilizados na formação e na sala de aula. A investigadora assumia também o papel de formadora destes professores e foi assim a principal fonte de recolha de dados.

A análise dos dados revelou que a proximidade da formação com a prática de sala de aula, nomeadamente o acompanhamento em sala de aula por parte da formadora, foi um aspecto crucial. Houve uma efectiva necessidade de mudança das práticas provocada pelo programa de formação e, da reflexão sobre as novas práticas, emergiu a constatação da evolução nas atitudes e aprendizagens dos alunos, o que mediou a mudança nas perspectivas destes professores sobre o ensino e aprendizagem da matemática.

O conhecimento matemático e didáctico foi desocultado e desenvolvido no contexto das tarefas propostas e das questões suscitadas pela reflexão sobre as aulas. Por outro lado, a incidência do trabalho autónomo no pensamento algébrico resultou numa experiência curricular rica e inovadora, tendo dado aos professores a oportunidade de desenvolver o seu conhecimento matemático e didáctico num tema que acabou por se revelar integrador do currículo. A investigação colocou em destaque a importância da descoberta de padrões e da generalização como processos matemáticos que, partindo da relação dialógica entre o desenvolvimento do sentido do número e do cálculo mental, permitem atingir verdadeiramente o cerne do pensamento algébrico.

Na evolução destes professores foi notória a constatação de que o desenvolvimento profissional, para ser eficaz, tem de se centrar numa modalidade de formação contínua de imersão na prática por um período longo de tempo.

Como resultado desta investigação levantam-se questões sobre as mudanças verificadas nestes professores por efeito do programa de formação: Que mudanças se consolidaram? Quais os aspectos que acabaram por ser abandonados? Que atitudes regrediram? E ainda em relação aos alunos envolvidos: A evolução nas suas aprendizagens reconhecida e observada neste estudo terá consequências nas suas aprendizagens e desempenho futuro? Qual o impacto a longo prazo da introdução do pensamento algébrico em alunos do 1.º ciclo?

Estas são questões a que importará dar resposta num futuro próximo.

Abstract

This study focus on an in-service education program in Mathematics for primary school teachers. It was launched in Portugal in 2005 and aims at understanding the influence of the dynamics of training on four participant teachers. We intended to investigate, in particular, the impact of the program on their mathematical and didactic knowledge, with incidence in algebraic thinking, on their perspectives on mathematics and its teaching and learning, and on the attitudes and learning process of the students involved.

These teachers were supervised in their professional activity for two years, in the context of their attendance of the program in a School for Education. During the second year, it was suggested to them that they anchored their autonomous work in algebraic thinking, for two reasons among others: on the one hand, this subject has great potential for the teaching and learning of mathematics; on the other hand, it is a topic they did not master as it is not one of the contents of the current mathematics curriculum.

This is a qualitative and interpretive research, based on a longitudinal case study design of four teachers. The data collection was based on interviews, direct observation and different documents used either in the training sessions or in the classroom. The main source of data collection was the researcher herself, as she was also their trainer.

The data analysis has revealed as crucial the proximity of training and teaching practice, namely the trainer's supervision in the classroom. The program arose the necessity of changing the teaching practices, while reflection upon the new practices made it clear that the students had evolved positively both in terms of learning and attitudes. This has changed the teachers' perspectives regarding the teaching and learning of mathematics.

Their mathematical and didactic knowledge was uncovered and deepened in the context both of the tasks they were proposed and the questions suggested by the reflection upon the lessons. The incidence of autonomous work on algebraic thinking resulted in a rich and innovative curricular experiment, having allowed the teachers to develop their mathematical and didactic knowledge of a topic which eventually revealed itself as integrating of the curriculum. The research has highlighted the importance either of patterning or generalization, as mathematical processes that, starting from the dialogic relation between the development of number sense and mental computation, do make it possible to reach the core of algebraic thinking.

The development of these teachers has made it clear that professional development, to be effective, has to be carried out on an in-service training modality embedded in practice for a significant period of time.

As a result of this research some questions arose regarding the changes undergone by these teachers, as an effect of the teacher education program: Which changes have been consolidated? Which aspects ended up by being abandoned? Which attitudes have receded? And related to the students involved: The evolution in their learning, acknowledged and observed in this study, will have any consequences for their future learning and performance? Which is the long-term impact of the introduction of algebraic thinking in elementary students?

It would be interesting to find answers to such questions in a near future.

Índice

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

O trabalho de campo no ensino, através do seu inerente carácter reflexivo,
ajuda os investigadores e os professores *a fazer com que o familiar*
se torne estranho e interessante novamente.
Erickson

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Este estudo pretende debruçar-se sobre os saberes científico e didáctico de professores do 1.º ciclo do ensino básico e analisar a influência que neles teve a participação num programa de formação contínua em matemática de âmbito nacional.

O interesse neste tema justifica-se pelo envolvimento da investigadora no referido programa enquanto fazendo parte da equipa de planificação e coordenação das actividades a nível distrital no ano lectivo de 2005/06 e também como formadora nos anos de 2006/07, 2007/08, 2008/09 e 2009/10.

O percurso da investigadora como professora de matemática do ensino secundário tem sido ao longo dos anos tocado pela necessidade de entrosamento nas questões do ensino e aprendizagem na educação básica devido a funções desempenhadas na formação inicial e contínua de professores numa Escola Superior de Educação durante 14 anos. À medida que foi tomando conhecimento deste nível de ensino foi também ganhando a convicção de que o início das aprendizagens formais, ou seja, o primeiro ciclo do ensino básico, é determinante em termos de captação do gosto das crianças por esta disciplina, sendo, consequentemente, condicionante de aprendizagens futuras. De facto, a tendência social para considerar a matemática como uma disciplina muito difícil, só acessível a alguns, de que as crianças estão desculpadas à partida se não houver desempenho positivo conduz à criação de baixas expectativas para muitos alunos. De modo a inverter esta tendência é necessário o desenvolvimento, desde muito cedo, de atitudes positivas face à matemática, com base na auto--confiança nas suas capacidades e no reconhecimento da utilidade da matemática na sua vida diária e na sua profissão futura, valorizando nesta disciplina o seu carácter instrumental e prático. O reforço dos aspectos lúdicos e estéticos da matemática e a demonstração de que esta ciência também é cultura são estratégias com potencialidades. Por outro lado, o à-vontade e a curiosidade no trabalho com a matemática e a perspectiva de que podem aprendê-la com compreensão vão determinar a extensão e a qualidade das aprendizagens dos alunos. Neste percurso ambicioso os professores têm um papel fundamental a desempenhar.

Assim, considera-se que o aprofundamento através deste estudo do tema do ensino nos primeiros anos e das primeiras aprendizagens matemáticas pode iluminar a profissão mesmo enquanto professora doutro nível de ensino.

Pertinência do estudo

As fragilidades no ensino e aprendizagem da matemática em todos os níveis de ensino são, no nosso país, uma evidência. Esta constatação baseia-se, entre outros, em resultados das provas de aferição e dos exames nacionais de matemática; nas taxas de insucesso dos alunos ao longo do percurso escolar; e nos indicadores dos estudos internacionais PISA (GAVE, 2004) e TIMSS (Amaro, Cardoso & Reis, 1996).

Para este estado de coisas contribui uma grande diversidade de factores de ordem social e organizacional ao nível do sistema de ensino. Outro tipo de factores que podem condicionar o sucesso escolar dos alunos em Matemática prende-se com ideias negativas sobre a disciplina muito arreigadas nos alunos, por vezes nos próprios professores e na sociedade em geral. Esta tendência também se faz sentir a nível internacional. Kilpatrick e Silver (2004) adiantam mesmo que na nossa sociedade é habitual a tendência para considerar que apenas uns poucos escolhidos têm capacidade matemática. Ora, embora nem todas as crianças tenham os mesmos interesses e capacidades em matemática, é necessário que as comunidades e escolas criem condições para a educação matemática de todas as crianças. Todos os alunos podem aprender a raciocinar e a resolver problemas, a estabelecer conexões entre diversos tópicos e a comunicar as suas descobertas. As oportunidades de os alunos aprenderem e desenvolverem o seu poder matemático, e a própria predisposição em relação à matemática, estão intimamente relacionadas como o modo como aprendem (NCTM, 1991).

E aqui entram em jogo os principais agentes da mudança nos processos de ensino e aprendizagem: os professores. Estes têm de criar nas suas aulas um ambiente em que haja um envolvimento dos alunos em tarefas desafiadoras, um predomínio do raciocínio sobre os procedimentos rotineiros, uma caminhada em direcção à formulação de conjecturas e à resolução de problemas, uma valorização das relações entre os diversos tópicos mais do que uma abordagem da matemática como uma sobreposição de factos isolados, um realce no desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática dos alunos, tal como vêm preconizando diversos documentos curriculares tais como o Programa de Matemática para o 1.º ciclo (ME, 1990), o Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (ME-DEB, 2001), o Relatório Matemática 2001 (APM & IIE, 1998), os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2000), e, mais recentemente, o Programa de Formação Contínua para Professores do Primeiro Ciclo (ME, 2005) e o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007).

Contudo, este tipo de ensino que agora se recomenda é muito diferente daquele que os próprios professores, muitos deles, experimentaram enquanto alunos de matemática. Daí que seja necessária um boa preparação dos professores e um apoio continuado.

Mas que tipo de formação será necessária? Qual a intervenção adequada? Em que momento? Quais devem ser os actores principais?

A formação de professores reveste-se de grande importância no âmbito do ensino da matemática no nosso país. De facto, esta parece ser problemática em todos os níveis de ensino mas particularmente débil nos níveis iniciais (Ponte, 2000). É também um lugar-comum considerar que, a nível elementar, qualquer um pode ensinar depois de ter feito a sua aprendizagem escolar. Num estudo feito com professores do 1.º ciclo, Gomes (2003) verifica que, embora estes assumam não ter bases em Matemática, consideram que o que têm de ensinar é tarefa fácil. Ora, como defende Vale (2002), só o domínio dos conteúdos permite ao professor proporcionar aos alunos explicações mais conceptuais em vez de meramente procedimentais. Sob pena de se limitarem a ensinar técnicas, os professores precisam de abordar os tópicos de matemática escolar de tal modo que possam desenvolver uma compreensão mais profunda das ideias e relações existentes entre os conceitos (NCTM, 1991).

Contudo, o saber matemático não é o único a condicionar o processo de ensino-aprendizagem (Ponte, 2000); o conhecimento profissional comporta também o conhecimento curricular e o conhecimento didáctico. De facto, os professores precisam de uma visão de conjunto da matemática que atravesse os vários níveis, de modo a poderem compreender não só os conceitos matemáticos mas a forma como se relacionam com outras partes do currículo. Por outro lado, os professores devem conhecer e avaliar materiais e recursos, conhecer estratégias de ensino e modos de organização da sala de aula, modos de promover o discurso matemático, e ainda conhecer e articular diversos modos de representação das ideias matemáticas. De acordo com a investigação (Ponte, Matos & Abrantes, 1998), a formação dos professores de matemática de todos os níveis de ensino terá de combinar três vertentes: (a) científica; (b) didáctica; e (c) desenvolvimento profissional e organizacional.

São objectivos principais da formação promover no professor uma maior segurança, autonomia, iniciativa e capacidade de reflexão. Ao nível da formação inicial, as reformas não parecem ter resolvido a questão da elevação dos níveis de qualidade. Há a questão da formação científica e, sobretudo, as questões da articulação da teoria com a prática e do acompanhamento dos jovens professores nos seus primeiros anos de carreira. Por outro lado, a formação inicial, mesmo que seja de grande qualidade, não pode proporcionar todos os conhecimentos necessários à vida profissional (Estrela, Eliseu, Amaral, Carvalho & Pereira, 2005). Além disso, os jovens professores tendem a assimilar a cultura dominante nas escolas e abandonar o que aprenderam na formação inicial.

Estes problemas sugerem a necessidade de uma grande aposta na formação contínua. Em Portugal, o processo de formação contínua teve o seu início institucional a partir dos anos noventa, altura em que foram criados os Centros de Formação de Associações de Escolas e de Associações de Professores. No entanto, o problema mais acentuado deste modelo foi o de, por vezes, serem organizados cursos de carácter predominantemente teórico, que se limitavam a reproduzir o modelo escolar da formação inicial, entendendo-se que os professores precisavam era de actualizar os seus conhecimentos sem qualquer ligação à prática. Resultados de investigação evidenciam as seguintes dificuldades na formação contínua: os professores co-responsabilizarem-se pela sua formação; a dinâmica das sessões ter reflexos reais na sua prática diária; e haver uma efectiva articulação entre teoria e prática, compatibilizando as perspectivas e interesses de formandos e formadores (Ponte et al., 1998).

Com vista a combater esta situação, foi lançado em 2005 pelo Ministério da Educação, em parceria com o Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior e dinamizado por instituições de Ensino Superior, o Programa de Formação Contínua para professores do 1.º ciclo do Ensino Básico. Este programa, em que os professores se inscrevem voluntariamente, tem como finalidade última a melhoria das aprendizagens dos alunos, através da valorização de uma formação matemática de qualidade para o professor:

> O professor do 1.º ciclo é também um professor de Matemática, cabendo-lhe proporcionar aos seus alunos experiências de aprendizagem neste domínio. Para tal, é imprescindível que o professor possua um conhecimento matemático de qualidade, articulado com o conhecimento curricular e didáctico específico, bem como um conhecimento sobre os processos de aprendizagem dos alunos, sendo capaz de identificar e reconhecer as dificuldades dos alunos, respectivas origens, e de aproveitar o erro como fonte de aprendizagem. (ME, 2005, p. 1)

A competência profissional exigível ao professor inclui naturalmente o conhecimento dos conteúdos matemáticos e da respectiva inter-relação. Mas também inclui o conhecimento das orientações curriculares, uma visão da aprendizagem que valorize o papel do aluno, e, no âmbito da referida necessidade de articulação entre teoria e prática, englobe o tipo de tarefas a propor aos alunos. Assim, o programa tem também como objectivo fundamental a realização de experiências de desenvolvimento curricular em Matemática que contemplem a planificação, condução e reflexão sobre as aulas por parte dos professores envolvidos. De modo a cumprir estes objectivos foram idealizadas as seguintes vertentes fundamentais: sessões conjuntas de formação, prática de sala de aula acompanhada pelo formador e reflexão sobre a prática.

Estas diversas vertentes constituem uma mudança radical e um corte com os modelos tradicionais de formação contínua, sobretudo no que se refere ao acompanhamento em sala de aula. Um programa de formação com estas características inovadoras, que abrange um vastíssimo número de professores do 1.º ciclo, a nível nacional, não tem sido prática corrente no nosso país e considera-se de especial importância haver estudos naturalistas e longitudinais, que se estendam por um período alargado de tempo, que permitam contribuir para a discussão das suas virtualidades. Em particular, é importante conhecer e compreender o impacto da formação no desenvolvimento do conhecimento profissional dos professores e em que medida este se reflecte nas suas práticas de ensino da matemática, estabelecendo o paralelo entre este programa de formação em matemática e outros em que os professores tenham já participado. Assume também particular relevância o estudo das perspectivas dos professores sobre a matemática e o seu ensino e aprendizagem, uma vez que, como é apontado por numerosos investigadores (e.g. Pajares, 1992; Philipp, 2007; Schoenfeld, 2008), os pensamentos e crenças dos professores condicionam as suas acções como profissionais do ensino. Por fim, o aspecto fulcral da investigação sobre o ensino, que reúne todos os apontados anteriormente e para o qual convergem todos os esforços no âmbito da educação, é obviamente a forma e o modo como se dirige aos alunos. Assim, é imperativo analisar em que medida um programa de formação de professores que poderá provocar mudança nos conhecimentos, perspectivas e práticas pode também, neste encadeamento, produzir mudanças dos alunos em relação ao modo como encaram a matemática e às suas próprias aprendizagens e desempenho na disciplina.

Objectivos e questões do estudo

Esta investigação realiza-se no quadro de um programa de formação contínua em matemática de âmbito nacional sem tradição no nosso país, e centra-se numa das instituições de Ensino Superior a quem foi conferida pela tutela a tarefa da formação de professores do 1.º ciclo em matemática. Neste contexto, pretende-se analisar até que ponto a frequência do programa de formação contínua influencia o conhecimento matemático e didáctico, e a própria visão sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, de professores do primeiro ciclo, e as repercussões dessa influência nas práticas de ensino que implementam e nas atitudes e aprendizagens dos seus alunos.

Delinearam-se algumas questões servindo de orientação para o trabalho e a que se procurará dar resposta em relação a cada um dos professores envolvidos:

- Em que medida o programa de formação contínua contribui para incrementar o conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do 1.º ciclo?
- Como se caracterizam as práticas lectivas dos professores do 1.º ciclo em estudo?
- Qual o impacto do referido programa

  - nas práticas destes professores, designadamente quanto às dinâmicas produzidas e quanto à natureza das tarefas seleccionadas?

- nas perspectivas dos professores participantes sobre a matemática e o seu ensino e aprendizagem e como se articulam essas perspectivas com as suas práticas?

- nas atitudes e aprendizagens dos alunos envolvidos?

Desenhou-se uma metodologia de investigação qualitativa na modalidade de estudo de caso. Para concretizar o estudo foram considerados quatro professores do 1.º ciclo que frequentaram este programa de formação. Trata-se de um estudo longitudinal, que se desenvolve ao longo de dois anos, nos quais há um acompanhamento sistemático dos professores participantes.

Este programa de formação tem como um dos principais objectivos promover o aprofundamento dos conhecimentos matemático, didáctico e curricular dos professores nele envolvidos. A opção deste estudo pelos dois primeiros não significa de modo algum a exclusão do conhecimento curricular, antes a assunção de que este está presente e permeia toda a actividade profissional do professor, designadamente na planificação de aulas e selecção de tarefas.

Por outro lado, considera-se importante explicitar desde já a opção feita pela incidência no pensamento algébrico no âmbito do conhecimento matemático e didáctico.

Foram delineadas duas fases distintas neste estudo. Na primeira fase – que correspondeu sensivelmente a um ano – recolheram-se dados sobre aspectos genéricos do percurso profissional destes quatro professores: a relação do professor com a matemática enquanto aluno e depois como professor, a forma como encara o seu ensino, as expectativas em relação ao progresso dos seus alunos, a forma como ia reagindo aos reptos da formação. Em suma, procurou-se conhecer as pessoas e acompanhá-las ao longo do seu percurso formativo, estabelecendo laços estreitos entre a formação e a prática, designadamente no que diz respeito à selecção e organização de tarefas a propor aos alunos e outros materiais de ensino. Os conteúdos matemáticos e a forma de os explorar foram sendo escolhidos de modo a integrarem-se no trabalho que ia sendo realizado com os alunos, dentro do leque global de propostas realizadas nas sessões conjuntas de formação, ou outras entretanto criadas ou seleccionadas pelos professores, apenas com a condicionante de se integrarem no espírito do programa de formação. Aos poucos foram sendo estabelecidas, pela equipa de formação, determinadas linhas de força dentro dos tópicos a trabalhar, quer por serem novas orientações curriculares, quer por serem recomendações de especialistas nacionais e internacionais, quer ainda por se terem entretanto detectado, com a experiência dos formadores no terreno, fragilidades e necessidades de formação dos professores nesses domínios. Uma delas foi precisamente o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Na segunda fase, que correspondeu ao segundo ano de acompanhamento, procurou-se ganhar algum distanciamento entre a formação e a prática, observando e acompanhando do mesmo modo os professores mas possuindo estes agora uma maior dose de autonomia no seu trabalho. A selecção e organização de tarefas a propor aos alunos e outros materiais de ensino esteve agora mais a cargo de cada professor. Em relação aos conteúdos matemáticos a trabalhar nas aulas em que se fez o acompanhamento optou-se nesta segunda fase por afunilar os temas a trabalhar focando-os no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Deste modo, o presente estudo centra-se nas práticas de professores do 1.º ciclo e procura compreender a influência que nelas tem um programa de formação contínua. Numa época de mudanças e desafios curriculares significativos, escolheu-se um tema particular de matemática com fraca implantação neste nível de ensino e fortes potencialidades, o pensamento algébrico, para servir de âncora a uma progressiva autonomia do trabalho dos professores.

Organização do estudo

Este trabalho está organizado em quatro partes. A primeira busca uma fundamentação teórica dos aspectos centrais em torno dos quais assenta o estudo, a segunda faz uma revisão e discussão sobre metodologias de investigação em educação com vista a definir a opção metodológica do estudo, a terceira começa por caracterizar o contexto do estudo, o programa de formação contínua em matemática para professores do 1.º ciclo, apresentando de seguida o trabalho empírico, e finalmente na quarta apresentam-se os resultados e as principais conclusões.

A primeira parte compreende os Capítulos 2, 3 e 4, que abordam, respectivamente, uma revisão de literatura e discussão sobre o conhecimento profissional do professor, a formação contínua de professores e o ensino e aprendizagem da matemática, convergindo progressivamente este último para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A segunda parte apresenta as opções metodológicas e dá corpo ao Capítulo 5.

A terceira parte inicia-se no Capítulo 6 por uma caracterização dos princípios e orgânica do programa de formação contínua a nível nacional, e em seguida pelo modo como foi implementado pela equipa de formadores num distrito do país, explicitando a sua interpretação local à luz dos princípios nacionais e a definição de linhas de força. Prossegue com a descrição e análise dos quatro casos escolhidos dentre os professores envolvidos na formação, que preenchem os Capítulos 7, 8, 9 e 10.

No Capítulo 11 apresentam-se e discutem-se os principais resultados do estudo e retiram-se conclusões.

Na parte final incluem-se as referências bibliográficas e os anexos.

Quem pode, faz; quem compreende, ensina.
Shulman

Capítulo 2

O CONHECIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Este estudo incide sobre um programa de formação contínua em matemática para professores do 1.º ciclo. Deste modo, torna-se pertinente analisar e discutir o tipo e a natureza do conhecimento que o professor deve possuir enquanto profissional de ensino. É o que procurará fazer-se neste capítulo.

O saber do professor

Todas as profissões que possuem reconhecidamente um estatuto de profissionalidade afirmam-se pela posse de um saber próprio, exclusivo do grupo e que lhes legitima o exercício da função. No caso dos professores tem sido notória a influência de duas tendências opostas: uma que, adoptando um discurso humanista muito abrangente, não permite baixar ao que há de específico no saber do professor; e outra que, considerando o professor como um técnico que deve aplicar umas quantas normas, considera dispensáveis o saber aprofundado e a reflexão. Ambas as tendências são prejudiciais à afirmação da profissionalidade por conduzirem ao descrédito e ao escasso reconhecimento (Roldão, 2007).

Por seu lado, Tardif e Gauthier (2001) questionam a própria noção de "saber", afirmando que as investigações sobre o saber do ensino, a profissão e a formação de professores são caracterizadas e prejudicadas por dois excessos: (a) "o professor é um erudito" e (b) "tudo é saber". Na primeira destas concepções o professor é dotado de uma racionalidade baseada quase exclusivamente em aspectos cognitivos, conduzindo a uma visão científica e tecnológica do ensino. O facto de o pensamento e o fazer dos professores serem regidos pelo saber, concebido em função de uma prática instrumentalizada, tecnicista e estratégica, não corresponde ao modelo de professor. A segunda acepção caracteriza as abordagens etnográficas quando levadas ao limite. Nesse espírito, tudo se torna saber: os hábitos, as emoções, a intuição, o saber fazer, as opiniões, a personalidade das pessoas, o senso comum. E deste modo, se tudo é saber, em última análise o saber perde o seu significado. Revendo as concepções de saber dos filósofos ao longo da História, estes autores identificam como traço comum em todos eles a exigência de racionalidade, passando assim a designar por "saber" unicamente os pensamentos, as ideias, os julgamentos, os discursos, os argumentos que obedecem a essas exigências, ou seja, que são passíveis de ser justificados por quem os defende. No entanto, esta exigência de racionalidade não conduz a uma ciência do ensino mas mais àquilo que os autores designam por "jurisprudência da pedagogia". Defendem que o julgamento do professor se aproxima do jurídico, pois, não tendo a pretensão de rigor e universalidade do julgamento científico, também não se limita ao particular, estabelecendo uma norma que lhe permite administrar casos particulares, e por outro lado não é somente normativo e prescritivo, mas é também pragmático e criativo. Assim, as competências do professor relacionam-se directamente com a sua capacidade de racionalizar a sua prática, ou seja, criticá-la, objectivá-la, fundamentá-la. Por outras palavras, a racionalidade defendida é concreta, enraizada nas práticas quotidianas, e por isso contingente e mutável.

Esta linha é consistente com a de outros teóricos do conhecimento. Já anteriormente o filósofo da educação Fenstermacher (1994) defendia que há problemas epistemológicos sérios em identificar como conhecimento aquilo em que os professores acreditam, imaginam, intuem, sentem e reflectem. Segundo este autor, estas actividades mentais podem conduzir ao conhecimento mas têm de ser previamente submetidas a uma avaliação do seu mérito epistémico que passa por uma garantia ou justificação.

Popper (2003) trata o tema do conhecimento duma forma muito mais abrangente do que a do conhecimento profissional; no entanto encontram-se pontos de contacto com a matéria em discussão. Este autor introduz um elemento aparentemente negativo na aceitação do conhecimento, distinguindo como linha de demarcação entre a ciência e a metafísica o critério da refutabilidade. Isto significa que um sistema só deverá ser considerado científico se fizer afirmações que possam ser confrontadas com a observação. E o sistema é testado por tentativas de produzir essas colisões, ou seja, por tentativas de o refutar. Assim, os conceitos de testabilidade e de refutabilidade tornam-se equivalentes. Esta é uma perspectiva da ciência que encara a abordagem crítica como a sua característica fundamental.

> Um cientista deve olhar para uma teoria do ponto de vista da sua possibilidade de ser criticamente discutida, ou seja, da sua disposição para se expor ou não a todos os tipos de crítica; e, em caso afirmativo, da sua capacidade de resistência a essas críticas (Popper, 2003, p.345).

Daqui se depreende que o conhecimento não é um fenómeno estático mas concebido em termos de uma construção progressiva, numa lógica de ensaio e erro. E nesta visão há efectivamente ligações com o conhecimento do professor em estudo. Em vez de esperar que as repetições imponham padrões de regularidade, Popper (2003) defende que nós é que tentamos impor essa regularidade ao mundo, construindo conjecturas para serem postas à prova e refutadas no caso de colidirem com as observações. Assim é também, na perspectiva deste trabalho, o conhecimento do professor: nenhuma teoria deve ser aceite como verdadeira se não puder ser filtrada pela observação crítica e pela experiência.

A natureza do conhecimento do professor

Na busca de uma definição do conhecimento do professor, emerge inevitavelmente na literatura a dicotomia entre a teoria e a prática. É claro que serão necessários contributos de saberes teóricos variados e o saber-fazer em situação. Pode-se no entanto distinguir duas correntes fundamentais conforme o predomínio de uma das componentes (Roldão, 2007): Uma linha mais analítica preconizada por Shulman (1986), que especifica várias componentes do conhecimento do professor, identificando conhecimentos prévios necessários, que se especificarão adiante, e uma outra, influenciada por Schön, que parte da prática do professor e aí enraíza a construção do conhecimento do professor num processo reflexivo. Schön (1983; 1995) defende a reflexão-na-acção como um conhecimento que o professor adquire a partir da análise e interpretação da sua própria actividade. Por exemplo, a capacidade de ouvir o aluno e deixar-se surpreender por ele, tentando descobrir as razões que o levam a dizer certas coisas. Neste processo o professor ajuda o aluno a articular o seu conhecimento-na-acção, ou seja, a representação figurativa que traz para a escola, próxima das suas vivências, com o saber escolar. Deste modo o professor poderá interpretar as confusões e mal-entendidos do aluno em relação ao saber escolar formalizado. Por outro lado, pode mais tarde ter um olhar retrospectivo sobre os acontecimentos reflectindo sobre o processo de reflexão-na-acção. A propósito desta nova epistemologia da prática, afirma Pérez (1995): "O *pensamento prático* do professor não pode ser ensinado, mas pode ser aprendido. Aprende-se fazendo e reflectindo *na* e *sobre* a acção" (p.112).

Esta perspectiva é também defendida por Elbaz (1983) no seu estudo de uma professora, Sara, com o objectivo de caracterizar o seu conhecimento prático. Elbaz considera cinco áreas deste conhecimento prático: conhecimento de si, do meio, do conteúdo, do currículo e da instrução. Além disso o conhecimento prático é representado na prática de três formas: regras práticas, que estabelecem o que fazer numa situação concreta, princípios práticos, menos explícitos e mais inclusivos do que as regras, e imagens, que captam aspectos essenciais do ensino ou da situação e organizam o conhecimento próprio do professor em diferentes áreas. No seu estudo, Elbaz conclui que o que Sara sabe não é teórico, mas como gerir tarefas de sala de aula, resolver conflitos, etc., ou seja, é "conhecimento prático".

Por seu turno, os investigadores canadianos Clandinin & Connelly (1988) consideram que as acções didácticas são acções de conhecimento, sendo simultaneamente causa e consequência do conhecimento pessoal do actor. Na linha da valorização da natureza prática do conhecimento de Elbaz, introduzem o conceito de *conhecimento prático pessoal*. Especificando, os autores definem *conhecimento* como:

> [...] esse corpo de convicções e de significados conscientes ou inconscientes, que surgiram da experiência íntima, social ou tradicional, e que se expressam nas acções de uma pessoa (Clandinin & Connelly, 1988, p.41).

Aqui o termo *expressão* é utilizado para traduzir uma qualidade do conhecimento e não a sua aplicação ou tradução. Por *pessoal* estes autores não entendem algo exterior à sociedade ou às circunstâncias do indivíduo mas um factor individual local existente para além dessas instâncias em que se baseia o carácter, o passado e o futuro do indivíduo. Pessoal também não significa que seja secreto; começa por ser privado mas pode dar-se a conhecer tanto pelas acções da pessoa como pela comunicação verbal. Como componentes deste conhecimento prático pessoal apresentam a imagem e a unidade narrativa. Esta corresponde no fundo à experiência contínua de vida mais ou menos indiferenciada. A partir dela, e pela necessidade de actuar em situações concretas, cristalizam-se e formam-se as imagens que passam a constituir deste modo formas poderosas de conhecimento pessoal.

Assim, para além da formação, o professor vai construindo e enriquecendo o seu próprio conhecimento profissional com base nas suas acções e nos seus projectos, individuais e colectivos (Ponte, 2000). Também Nóvoa (1991) apresenta, como resultado da análise da evolução dos currículos de formação de professores, uma alteração sucessiva de foco em três domínios distintos: *metodológico*, com especial atenção às técnicas e aos instrumentos de acção; *disciplinar*, tendo como referência o conhecimento dum dado ramo de saber; e *científico*, com base nas ciências da educação, *de per se* ou interligadas com outras ciências sociais, particularmente a psicologia. Considera o autor, a este propósito, que estes pólos tendem a reproduzir dicotomias como conhecimento fundamental/conhecimento aplicado, saberes/métodos, ciência/técnica, etc. Procurando uma alternativa, o autor afirma, consistentemente com o que se tem vindo a expor:

> Neste domínio, o pensamento mais estimulante tem procurado delimitar os saberes profissionais a partir de um olhar sobre a especificidade da acção concreta dos professores (Nóvoa, 1991, p.26).

Calderhead (1988), numa tentativa de síntese das características do conhecimento dos professores, e baseado em resultados de investigação, aponta as seguintes: (1) o conteúdo organiza-se em estruturas (esquemas) o que facilita a acção profissional; (2) o conhecimento parece desenvolver-se essencialmente por tentativa e erro; (3) as estruturas do conhecimento contêm conceitos prototípicos que facilitam a identificação de situações típicas; (4) as estruturas e esquemas também contêm "guiões" que guiam respostas típicas a situações típicas ("rotinas"); (5) os professores podem possuir conhecimentos e habilidades que lhes permitem por vezes identificar factos duvidosos e adaptar as suas rotinas de acordo com eles; (6) os esquemas dos professores contêm diversos aspectos do conhecimento especializado, próprio de situações didácticas (currículo, papéis do professor, alunos, etc.) e estes podem interrelacionar-se entre si e com as diversas metas do professor de modos muito complexos e diferentes; (7) os esquemas desenvolvem-se dentro do contexto do conhecimento e crenças relacionados com o ensino; (8) os esquemas podem conter proposições imperativas que se associam com fortes crenças ou afectos; (9) os esquemas dos professores não são sempre logicamente coerentes, e os professores podem ter de simplificar muito a sua compreensão de certos aspectos do seu trabalho; e (10) parte do conhecimento que guia as acções dos professores pode ser tácito e impossível de verbalizar.

De acordo com Roldão (2007) as duas vertentes acima referidas, analítica e prática, são importantes pois a primeira, mais normativa, permite desocultar a natureza do conhecimento profissional por análise das suas componentes e a segunda, mais descritiva, permite iluminar a sustentação do conhecimento profissional na reflexão na e sobre a prática. Na primeira vertente apresenta-se a análise do que "deve" caracterizar o conhecimento profissional e na outra caracteriza-se o conhecimento profissional como o que fazem e como fazem os bons professores. Esta autora identifica um conjunto de cinco aspectos distintivos do conhecimento profissional docente: (a) a sua natureza compósita; (b) a capacidade analítica; (c) a natureza mobilizadora e interrogativa; (d) a meta-análise; e (e) a comunicabilidade e circulação. O primeiro aspecto refere-se à integração das várias componentes do conhecimento mas sobretudo à sua transformação, passando a constituir-se como parte integrante uns dos outros. O segundo aspecto abrange o poder conceptualizador de uma análise sustentada em conhecimentos e experiências exercida sobre as diferentes valências do saber, técnica e criadora. O terceiro aspecto tem em conta o questionamento permanente, quer da acção prática, quer do conhecimento declarativo, quer da experiência anterior. O aspecto da meta-análise implica uma postura de distanciamento e auto-crítica implícita nos pressupostos de uma prática reflexiva mas que não pode prescindir dos vários tipos de conhecimento formal. Finalmente, o último aspecto exige a transformação do saber tácito do docente num saber articulado e sistemático que possa ser transmitido e discutido na comunidade. Com a sua proposição de que “ensinar é fazer aprender alguma coisa a alguém” (Roldão, 2005, p.16) a autora defende e justifica a necessidade de o professor dominar o saber de conteúdo da sua área de ensino equilibrando-o com o modo como o usa e mobiliza para que seja apropriado pelos alunos.

Fenstermacher (1994), na sua elaboração filosófica sobre o valor do conhecimento prático, conclui (por análise de programas de investigação conduzidos por ou baseados em Schön (1983), Connelly & Clandinin (1985; 1988; 1990), Cochran-Smith & Lytle (1990; 1993) e Shulman (1986)) que existe de facto algo denominado conhecimento prático. Mais ainda, que este tem um potencial de mudança e avanço na prática de ensino nunca apresentado pelas ciências sociais convencionais. Este potencial é devido ao facto de o conhecimento prático estar embebido no discurso da prática. Tal como foi referido anteriormente, a aceitação deste conhecimento prático como forma de conhecimento exige a passagem pela garantia ou justificação. O autor afirma que essa garantia é dada de forma não muito acentuada nos estudos referidos. Introduzindo de seguida o conceito de *metamente* ("metamind" de Lehrer, 1990, referido por Fenstermacher, 1994), que se refere ao pensamento sobre o pensamento, o sentimento ou a emoção, Fenstermacher defende que esta noção é crucial para a investigação futura sobre o conhecimento dos professores, devendo o objectivo fulcral ser, não que os investigadores saibam o que os professores sabem, mas que os professores sejam conhecedores dos seus conhecimentos. Reforça ainda que este conhecimento deve ser sujeito a justificação.

> O desafio para a investigação sobre o conhecimento do professor não é simplesmente mostrar-nos que os professores pensam, acreditam ou têm opiniões, mas que eles *sabem*. E ainda mais importante, que eles *sabem* que *sabem* (Fenstermacher, 1994, p.51)

A propósito deste tema, podem-se encontrar ainda outras abordagens: a teoria da cognição situada questiona a aceitação de um fulcro cognitivo independente do contexto e intenção (Putnam & Borko, 2000). O modo como a pessoa aprende um conjunto de conhecimentos e destrezas, e a situação na qual a pessoa aprende, influencia decisivamente o que é aprendido. Enquanto que as perspectivas tradicionais de aprendizagem – quer o *behaviorismo* que atende aos comportamentos observáveis dos alunos numa lógica de processo-produto, quer o construtivismo que defende que o conhecimento é construído pelo aluno - se centram fundamentalmente no indivíduo, as perspectivas situacionistas focam-se em sistemas interactivos que incluem indivíduos como participantes, interactuando uns com os outros bem como com materiais e sistemas de representação. Voltar-se-á a este tema no capítulo sobre o ensino e a aprendizagem. Este ponto de vista é aqui abordado por remodelar a própria noção de conhecedor e conhecido. A comunidade educativa e a sociedade em geral têm considerado tipicamente o conhecimento como algo que a pessoa possui e pode transferir de um contexto para outro. Aplicado à formação de professores, corresponde à abordagem tradicional da aprendizagem de princípios genéricos que depois serão aplicados nas aulas. Na perspectiva situacionista, o que parecem ser princípios gerais são efectivamente conjuntos de padrões específicos que se manifestam em muitas situações. O conhecimento profissional é desenvolvido em contexto, armazenado em conjunto com as características das turmas e das actividades, organizado em volta das tarefas que os professores cumprem na sala de aula e acedido para uso em situações semelhantes. Relacionando a cognição situada com o trabalho de Schön de aquisição de conhecimento profissional através do conhecimento-na-acção, pode concluir-se que os adultos aprendem durante a experiência, enquanto actuam em situação, mais do que como consequência da experiência. Em termos de formação de professores, esta teoria sugere que os mais novos poderão aprender em interacção e aculturação com outros colegas, artefactos e ideias, adquirindo conhecimento útil com a imersão em situações práticas reais, com o apoio de colegas mais experientes (Glickman, Gordon & Ross-Gordon, 1998).

Apresenta-se aqui, por se achar relevante ao questionar a natureza por vezes demasiado dogmática deste debate conceptual, a última ideia do artigo de Putnam & Borko (2000) que traduz a noção de que estas questões da relação entre o conhecimento em contexto e entre o investigador e o contexto da investigação não ficam com esta teoria resolvidas de uma vez por todas. "Tal como Sísifo, carregaremos essas pedras até à montanha uma e outra e outra vez" (p.13).

O conteúdo do conhecimento do professor

Parece ser importante analisar neste momento um pouco mais aprofundadamente o que constitui o conhecimento do professor, ou seja, o seu conteúdo, para uma melhor compreensão dos argumentos defendidos.

Shulman (1986), no seu artigo *Those who understand: Knowledge growth in teaching*, inicia com a máxima bem conhecida de Bernard Shaw: *Quem sabe, faz; quem não sabe, ensina*. O autor começa por rejeitar o conteúdo desta afirmação que considera ofensiva para os professores. Numa resenha histórica sobre o papel e o valor do professor defende que já na Idade Média as universidades eram instituições de preparação dos mais prestigiados profissionais: os professores. Mesmo nos nossos dias, o mais elevado grau académico é o de doutor cuja etimologia significa professor.

De seguida, este investigador, defendendo um maior realce da investigação no conhecimento científico dos professores – que designa por "paradigma perdido" por considerar que tem sido desvalorizado pelos recentes investigadores em educação -, discute as diferentes perspectivas sobre o conhecimento do professor, sugerindo a distinção do conhecimento em três categorias: (a) conhecimento do conteúdo; (b) conhecimento didáctico[1] e (c) conhecimento curricular.

Em relação ao conhecimento do conteúdo, Shulman afirma que este implica ir além do conhecimento de factos ou conceitos, atingindo a compreensão da estrutura. Não basta o professor compreender que uma coisa é assim; tem de compreender porquê. Além disso, terá de saber distinguir o essencial do acessório na disciplina, a fim de poder fazer uma boa gestão curricular.

Quanto ao conhecimento didáctico, o autor refere que este se desvia do conhecimento do conteúdo direccionando-se para o conhecimento para ensinar: "Ainda falo aqui de conhecimento de conteúdo, mas da forma particular de conhecimento de conteúdo que inclui os aspectos do conteúdo mais relativos ao seu ensino" (Shulman, 1986, p.9).

O professor deverá dominar formas de representação, analogias, exemplos, explicações e apresentações, isto é, que estratégias usar para que o conteúdo se torne compreensível para os alunos. Deve também possuir alternativas para o caso de as primeiras não funcionarem como se previa. Estas formas de representação alternativas podem provir tanto da investigação como da experiência.

Por fim o conhecimento curricular prende-se com o conhecimento dos programas e sua articulação horizontal e vertical mas também com os materiais adequados a determinado tópico, sejam eles textos, programas, *software*, materiais manipuláveis, filmes, apresentações laboratoriais ou convites à pesquisa.

Em paralelo com as três categorias de conhecimento dos professores referidas, Shulman considera três formas de conhecimento segundo as quais cada uma dessas três categorias pode estar organizada: (a) conhecimento proposicional; (b) conhecimento de caso; e (c) conhecimento estratégico.

O conhecimento proposicional, que é o mais comum, assume a forma de afirmações, quer baseadas na investigação – designando-se estas por *princípios* – quer na sabedoria prática – que são designadas por *máximas* – quer ainda em valores éticos – recebendo o nome de *normas*. Um exemplo apresentado pelo autor como uma máxima é "nunca sorrias antes do

[1] Optou-se por esta tradução de *pedagogical content knowledge* já que é a usada por investigadores nacionais (Ponte, 1999; Vale, 2002; Roldão, 2007). De notar, no entanto, que há outros autores que optam por conhecimento científico-pedagógico (Infante, Silva & Alarcão, 1996).

Natal". Esta forma de conhecimento é descontextualizada e por isso isenta de pormenor ou emoção.

O conhecimento de caso é um conhecimento de eventos descritos e documentados de forma detalhada. Embora não sejam generalizáveis, podem no entanto, do ponto de vista prático, iluminar a actuação do professor. Do mesmo modo que na forma anterior, são distinguidos os *protótipos*, que provêm de princípios teóricos, os *precedentes*, que se baseiam na prática, e as *parábolas*, que assentam em normas éticas. O autor cita como exemplo um caso muito interessante que pode constituir tanto um precedente de gestão da aula como um protótipo do princípio de evitar reforçar inadvertidamente comportamentos desadequados: um professor cujos alunos vinham habitualmente sem lápis para a aula, em vez de lhes dar um ou pedir que se sentassem sem trabalhar, tinha uma caixa de lápis minúsculos e obrigava o aluno a trabalhar todo o dia com o mais pequeno de todos.

Finalmente, o conhecimento estratégico surge quando o professor se confronta com contradições dos princípios e não há solução simples para o problema. Por exemplo, um autor afirma que dar aos alunos mais tempo produz níveis de processamento cognitivo mais elevados, mas há outro autor que adverte que os tempos de paragem provocam indisciplina.

Na última parte do artigo o autor defende uma visão sobre o ensino e a formação de professores como profissionais que não se limitam a actuar mas têm consciência dessa actuação e das suas implicações. Os programas de formação de professores devem para tal basear-se tanto no processo como no conteúdo, entendendo por conteúdo não só o conhecimento das estruturas da área científica mas também o conhecimento didáctico e o conhecimento curricular específico. Termina, em resposta a Shaw, com o princípio: *Quem sabe, faz; quem compreende, ensina.*

Na transição de uma visão genérica do conteúdo do conhecimento do professor como a que foi exposta para uma focalização no conhecimento do professor de matemática encontramos Ponte (1999) e Ponte e Santos (1998) para quem o conhecimento profissional inclui uma componente fundamental virada para a prática lectiva que se desdobra em quatro vertentes: (1) o conhecimento dos conteúdos de ensino; (2) o conhecimento do currículo; (3) o conhecimento do aluno; e (4) o conhecimento do processo instrucional.

O conhecimento dos conteúdos de ensino inclui terminologia e conceitos, conexões entre eles ou com outras áreas, e conhecimento sobre a natureza da matemática enquanto ciência e as suas formas de raciocínio, argumentação e validação. O conhecimento do currículo engloba finalidades e objectivos e a sua articulação horizontal e vertical, incluindo utilização de materiais. O conhecimento do aluno envolve a forma como aprende, os factores que facilitam ou dificultam o processo de aprendizagem, os interesses e dificuldades dos alunos e as suas características sociais e culturais. Finalmente o conhecimento do processo instrucional diz respeito à preparação, condução e avaliação da sua prática lectiva. Esta envolve a estruturação da aula, tarefas propostas e discurso produzido.

Um grande realce no conhecimento matemático, embora numa perspectiva muito abrangente, é dado pela investigadora chinesa Liping Ma. Esta autora defende que, para um professor ensinar bem, tem de possuir o que designa por uma *compreensão profunda da matemática fundamental*. Esta autora identifica quatro aspectos do conhecimento do professor: (a) conexidade *(connectedness)*; (b) múltiplas perspectivas; (c) ideias básicas; e (d) coerência longitudinal (Ma, 1999). A primeira propriedade exprime uma compreensão da relação entre ideias simples e fundamentais em matemática e reflecte-se num ensino unificado dos conhecimentos em vez de um ensino fragmentado de tópicos isolados. A consideração de múltiplas perspectivas e diferentes abordagens a ideias matemáticas conduz a uma compreensão flexível da disciplina. O conhecimento acerca de ideias básicas subjacentes ao currículo de matemática, simples mas poderosas, não só encoraja os alunos a abordar problemas mas guia-os na actividade matemática. Finalmente, o conhecimento de todo o currículo de matemática elementar e da sua coerência longitudinal leva os professores a explorar oportunidades de rever com os alunos aspectos cruciais de aprendizagens anteriores bem como lançar os fundamentos das aprendizagens subsequentes.

Depois desta breve visão sobre o conhecimento do professor, quanto à sua natureza e conteúdo, focar-se-ão mais pormenorizadamente as três categorias de Shulman atrás descritas, já que são as que correspondem às três formas de conhecimento a desenvolver nos professores também preconizadas pelo documento oficial do programa de formação contínua em que a investigação se situa: o conhecimento matemático, o conhecimento didáctico e o conhecimento curricular. Como se verá, é por vezes difícil estabelecer uma fronteira nítida entre estes tipos de conhecimento já que todos se interpenetram no acto de ensino – o conhecimento científico, por si só, não garante um bom ensino, e o domínio científico de um professor não tem de ser como o de um matemático. Por seu lado, o conhecimento didáctico não faz sentido desligado dos tópicos matemáticos que lhe dão corpo. Por último, o conhecimento curricular pode ser considerado a argamassa que permite unir e pôr em acção os outros dois tipos de conhecimento.

Do conhecimento matemático ao conhecimento didáctico

A investigação realizada nos últimos vinte anos tem dado uma grande importância aos conhecimentos e crenças dos professores. No entanto, muito pouca atenção tem sido dada ao conhecimento matemático necessário para ensinar bem. Ball, Lubienski & Mewborn (2001), numa revisão de literatura de investigação sobre o ensino da matemática e o conhecimento do professor nos Estados Unidos, verificam que, embora 15% dos artigos revistos incidam sobre conhecimentos e crenças dos professores, só 5% mostravam como o conhecimento matemático dos professores afectava a sua prática e apenas 2% examinavam o efeito desse conhecimento sobre a aprendizagem dos alunos. Estas autoras apontam vários factores que podem justificar o insucesso das reformas do ensino no sentido de melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática. O primeiro é uma visão da matemática que oculta o seu poder, elegância e beleza. O segundo é uma concepção do conhecimento e aprendizagem baseada exclusivamente nos factos e procedimentos rotineiros. Outro diz respeito a factores organizacionais nas escolas, tais como a duração das aulas, o número de alunos por turma, a pressão de directores, pais e da sociedade em geral para "cumprir os programas" nos seus aspectos mais básicos. Uma quarta razão prende-se com os materiais usados, designadamente livros de texto em que muitas vezes os conceitos são desenvolvidos de forma desadequada. Um quinto aspecto deriva da formação e desenvolvimento profissional dos professores. Com efeito, defendem que a formação inicial tende a ter fracas repercussões no conhecimento dos professores e mesmo a formação contínua, embora tenha sido efectuada, resume-se muitas vezes a umas sessões intelectualmente superficiais, desligadas das questões profundas do currículo e da aprendizagem, fragmentadas e não acumulativas. Estes aspectos serão retomados mais à frente, a propósito da formação de professores.

Ao conduzir uma investigação acerca das razões que poderiam explicar o facto de os estudantes chineses ficarem à frente dos norte-americanos em estudos internacionais sobre competência matemática, embora a escolarização dum professor na China seja substancialmente menor, Ma (1999) encontrou uma resposta para este paradoxo na compreensão das ideias matemáticas elementares, que é nos professores chineses muito mais profunda.

É inquestionável a importância do conhecimento matemático dos professores. Como defende Ponte (2000), "a proposição 'sem um bom conhecimento de Matemática não é possível ensinar bem a Matemática' é incontornável" (p.2). Por seu lado, Warren (2006) considera o conhecimento, tanto matemático como didáctico, a chave de um ensino efectivo, defendendo que os professores com um conhecimento mais explícito e organizado tendem a focar o seu ensino em conexões conceptuais, representações adequadas e variadas e num discurso do aluno activo e significativo. Porém, parece não haver consenso sobre que conhecimento matemático é necessário. Há para esta questão respostas institucionais e respostas de investigação. As primeiras normalmente produzem listas de tópicos que os professores têm de dominar, que incluem, obviamente, os tópicos que vão ensinar. As respostas de investigação dividem-se em duas abordagens distintas. Uma, que valoriza as características do professor, dá realce sobretudo aos cursos e graus académicos e outros certificados; é mais do agrado do poder político por ser facilmente quantificável. Outra abordagem, que não substitui mas completa a anterior, dá atenção ao conhecimento do professor, incluindo uma visão qualitativa da natureza do conhecimento do professor e baseando-se em parte na noção de conhecimento didáctico, tal como foi apresentada por Shulman (1986) e explicitada anteriormente. Acontece que esta segunda análise tem sido conduzida a alguma distância da prática.

Recentemente, o Relatório Final do National Mathematics Advisory Panel nos EUA (NMAP, 2008) continua a sublinhar a insuficiência de investigação sobre o conhecimento necessário para o professor ensinar bem matemática. Uma das suas recomendações é transparente:

> Os professores devem saber em detalhe o conteúdo matemático que são responsáveis por ensinar e as suas conexões com outra matemática importante, tanto anterior como subsequente ao tópico que devem ensinar. No entanto, como a maior parte dos estudos se basearam em meios indirectos sobre o conhecimento matemático do professor, [...] a investigação existente não fornece evidência definitiva sobre o conhecimento matemático específico e *skills* que são necessários para ensinar (p. 37).

Como se vê, torna-se difícil trabalhar o conhecimento matemático dos professores de forma "pura", já que ele surge inevitavelmente ligado ao acto de ensinar. Poderá questionar-se como avaliar o conhecimento matemático dos professores. Por aplicação de testes com questões matemáticas? A este propósito, Shulman (1986) defende que nunca deverá passar num exame que teste o conhecimento dos professores um indivíduo que não tenha sido preparado para ser professor. Daí que se ache interessante e pertinente apresentar aqui o modo como Liping Ma (1999) analisa o conhecimento matemático de professores do ensino básico, já que o faz colocando-os perante quatro situações “banais” de sala de aula.

Primeiro cenário: Face à questão (por exemplo)

$$\begin{array}{r} 5\,2 \\ \underline{-\,2\,5} \end{array}$$

o que acha que os seus alunos do 2.º ano devem compreender ou saber antes para abordar a subtracção com reagrupamento?

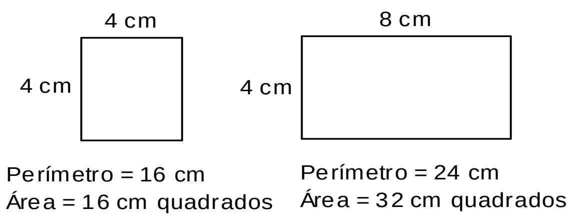
Segundo cenário: Alguns professores do 6.º ano notaram que os seus alunos faziam sistematicamente o mesmo erro ao multiplicar números grandes. Os alunos pareciam esquecer-se de “chegar à esquerda” os resultados nos produtos parciais:
O que é que faria se lhe acontecesse o mesmo?

$$\begin{array}{r} 1\,2\,3 \\ \times\,6\,4\,5 \\ \hline 6\,1\,5 \\ 4\,9\,2 \\ 7\,3\,8 \\ \hline 1\,8\,4\,5 \end{array}$$

Terceiro cenário: Imagine que está a ensinar divisão com fracções. Para tornar o tema significativo para os alunos, que história da vida real lhes contaria como modelo da seguinte situação?

$$1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$$

Quarto cenário: Imagine que uma das suas alunas lhe aparece, muito entusiasmada, com a seguinte descoberta: À medida que o perímetro de uma figura fechada aumenta a área também aumenta. E ilustra a sua nova teoria com o seguinte esquema:



O que responderia à sua aluna? (Ma, 1999, pp. 1, 28, 55, 84)

Como se verifica, a autora quis realizar uma abordagem ao conhecimento matemático de forma a contextualizar o conteúdo. Apresentando uma ideia matemática num cenário de sala de aula no qual essa ideia desempenhasse um papel importante, pôde examinar o conhecimento matemático necessário para ensinar de uma forma muito diferente da avaliação exclusiva de conhecimentos matemáticos, por exemplo através de um teste de matemática.

No entanto, há ainda uma lacuna neste procedimento, segundo Ball et al. (2001). Os estudos relatados por estas investigadoras revelam que estudar o que os professores sabem, ou definir o conhecimento que os professores devem ter, é insuficiente para resolver o problema da compreensão do conhecimento necessário para ensinar. Falta a visão do conhecimento matemático no contexto de ensino. Assim, a abordagem alternativa proposta constrói-se sobre as duas apresentadas, sobre o professor e sobre o conhecimento, mas reporta-se essencialmente ao ensino e ao uso pelo professor do conhecimento matemático. Uma subtileza é acrescentada: não interessam só os cursos que o professor frequentou ou mesmo o que ele sabe, mas se e como o professor *é capaz de usar* o conhecimento matemático na sua prática. As duas primeiras abordagens começam nos professores, ou no conhecimento, para identificar o conhecimento necessário para ensinar. Esta identificação é feita, em algumas investigações descritas, por análise do currículo usado ou por entrevistas aos professores de modo a detectar os seus conhecimentos, como é o caso de Ma (1999). Depois de se definir por estas vias o que precisam de saber, tenta-se que adquiram esse conhecimento. Mais tarde voltam a surgir os problemas devido a dois factos: (a) muitas vezes os professores não conseguem aplicar o que sabem; e (b) o que sabem nem sempre encaixa nas necessidades do seu trabalho em contexto. Assim, conclui-se que a investigação deve olhar de perto o ensino de modo a poder desvendar o uso do conhecimento matemático que não é visível a outros níveis, e, deste modo, a prática tem de ser o centro da investigação.

Mais recentemente, Deborah Ball e outros colaboradores (Ball, Bass, Sleep & Thames, 2007) apresentam quatro domínios distintos do conhecimento matemático para ensinar. Estes domínios emergiram inicialmente de análise conceptual de ensino em sala de aula e foram posteriormente refinados ao mesmo tempo que eram desenvolvidas e implementadas medidas de conhecimento matemático para ensinar. São eles: (a) *Conhecimento de conteúdo comum* – o conhecimento matemático do currículo escolar. Por exemplo saber o que é um número primo, multiplicar fracções ou converter uma fracção em decimal; (b) *Conhecimento de conteúdo especializado* – o conhecimento matemático que os professores utilizam para ensinar que vai além do conhecimento matemático do ponto anterior. Contrariamente ao conceito descrito atrás de conhecimento didáctico de Shulman, este é conhecimento matemático, não situado entre conhecimento dos alunos e pedagogia. É o conhecimento de matemática necessário especificamente para a tarefa de ensinar, que exige uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos de modo a poder fazer análise de erros e a explicar aos alunos o significado dos conteúdos e porque é que as coisas fazem sentido. Podemos dizer que é nesta acepção equivalente ao *Conhecimento matemático para ensinar* de Ma (1999) apresentado acima; (c) *Conhecimento dos alunos e do conteúdo* – situa-se na intersecção entre o conhecimento acerca dos alunos e do conhecimento da matemática; e (d) *Conhecimento do ensino e do conteúdo* - na intersecção entre o conhecimento sobre o ensino e o conhecimento da matemática, envolve conhecimento sobre compreensão dos conceitos pelos alunos, os seus gostos e interesses e previsões sobre o seu desempenho em tarefas determinadas. Inclui também conhecimento acerca de sequências de ensino, exemplos úteis para iluminar questões matemáticas importantes e vantagens e desvantagens de representações usadas para ensinar determinado conceito. Os dois últimos domínios é que se situam mais próximos do conhecimento didáctico.

Numa conceptualização mais recente mas relacionada com a anterior, Hill, Ball & Schilling (2008) propõem o seguinte modelo, apresentado na Figura 1, para o *Conhecimento matemático para ensinar*, constructo que abrange quer o conhecimento de conteúdo quer o conhecimento didáctico na perspectiva de Shulman:

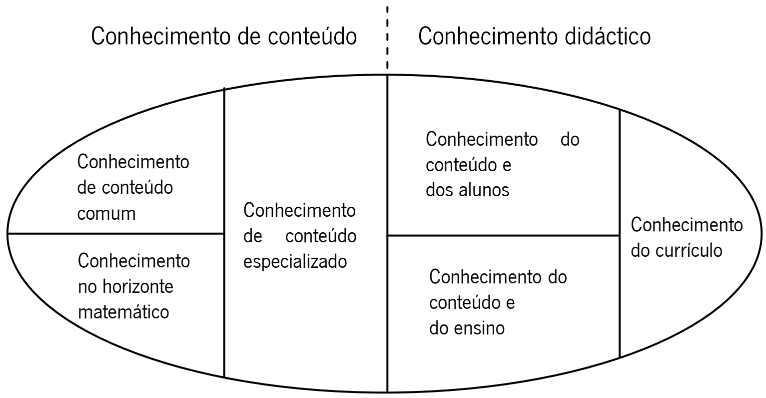


Figura 1. Mapa do domínio do conhecimento matemático para ensinar
(Hill, Ball & Schilling, 2008)

O lado esquerdo da oval contém dois itens que estão fora do conhecimento didáctico de Shulman: o conhecimento de conteúdo comum, que é usado no ensino do mesmo modo que é utilizado nas outras profissões que também usam a matemática, e o conhecimento de conteúdo especializado, que permite aos professores abordar determinadas tarefas de ensino, nomeadamente a representação de ideias matemáticas, a explicação de regras e procedimentos, a apreciação de diferentes modos de resolução de um problema. O primeiro é, de acordo com estes autores, o *conhecimento matemático* de Shulman e o segundo é uma conceptualização diferente, mas ambos são conhecimento matemático. O lado direito da oval representa domínios do conhecimento didáctico de Shulman, que incluem o conhecimento de conteúdo e ensino e também o conhecimento do conteúdo e dos alunos, que pressupõe o conhecimento de determinado conteúdo interligado com o conhecimento de como os alunos pensam, conhecem ou aprendem esse conteúdo. Estes autores desenvolveram um estudo experimental que pretendia desenvolver instrumentos de medição deste conhecimento, o conhecimento do conteúdo e dos alunos, tendo obtido um sucesso parcial. Por exemplo, depararam com dificuldades nos testes psicométricos de escollha múltipla que elaboraram pelo facto de pretenderem medir um conhecimento explicitamente multidimensional, já que foi operacionalizado com itens quer especificamente ligados à disciplina quer aos alunos.

Mewborn (2001) apresenta uma crítica à actual investigação sobre a natureza do conhecimento matemático dos professores desdobrada em três ordens de razões. A primeira é que os estudos de investigação abrangem um leque muito estreito de áreas de conteúdo. Por exemplo, há muitos estudos sobre valor posicional, divisão e números racionais mas poucos sobre novos conteúdos como probabilidades, análise de dados, funções, transformações geométricas ou teoria dos números. A autora considera ainda a importância de estudos em áreas transversais do ensino da matemática como a justificação. Em segundo lugar os estudos apresentam normalmente instantâneos do conhecimento dos professores num momento determinado; era necessária uma visão longitudinal do conhecimento do professor e de como ele vai mudando ao longo do tempo. A terceira razão diz respeito aos dados recolhidos, que afirmam que cerca de 50% dos professores mostram falhas no conhecimento conceptual, mas não fornecem dados acerca dos outros 50% de professores que possuem um forte conhecimento conceptual da matemática. Seria importante, por exemplo, analisar os processos de raciocínio utilizados por esses professores na resolução de problemas novos, para além de saber como, quando e onde é que esse conhecimento foi adquirido.

Numa monografia sobre o ensino baseada num fragmento de 6 minutos duma aula de matemática de Deborah Ball num terceiro ano de escolaridade, vários autores teorizam sobre a sua análise. Entre esses autores, Schoenfeld (2008) encontra mais um argumento para defender, através da teoria do ensino-em-contexto, construída a partir de um projecto de investigação que desenvolve com outros colaboradores desde há mais de uma década na Universidade de Berkeley na Califórnia, que as decisões tomadas pelos professores no decurso da sua prática são função do seu conhecimento, objectivos e crenças. Este autor desenvolve um modelo, que se aplica a vários casos estudados, de rotinas didácticas que podem ter utilidade geral, ou seja, que poderão servir para outros professores aprenderem a usar. Na Figura 2 transcreve-se uma rotina flexível e passível de interrupção para a discussão de um tópico que Shoenfeld apresenta realçando que o excerto de 6 minutos da aula de Ball executa cinco ciclos. Omitem-se as codificações dos episódios do excerto da aula relacionadas com cada passo da rotina, já que não seria possível a sua análise extensiva aqui.

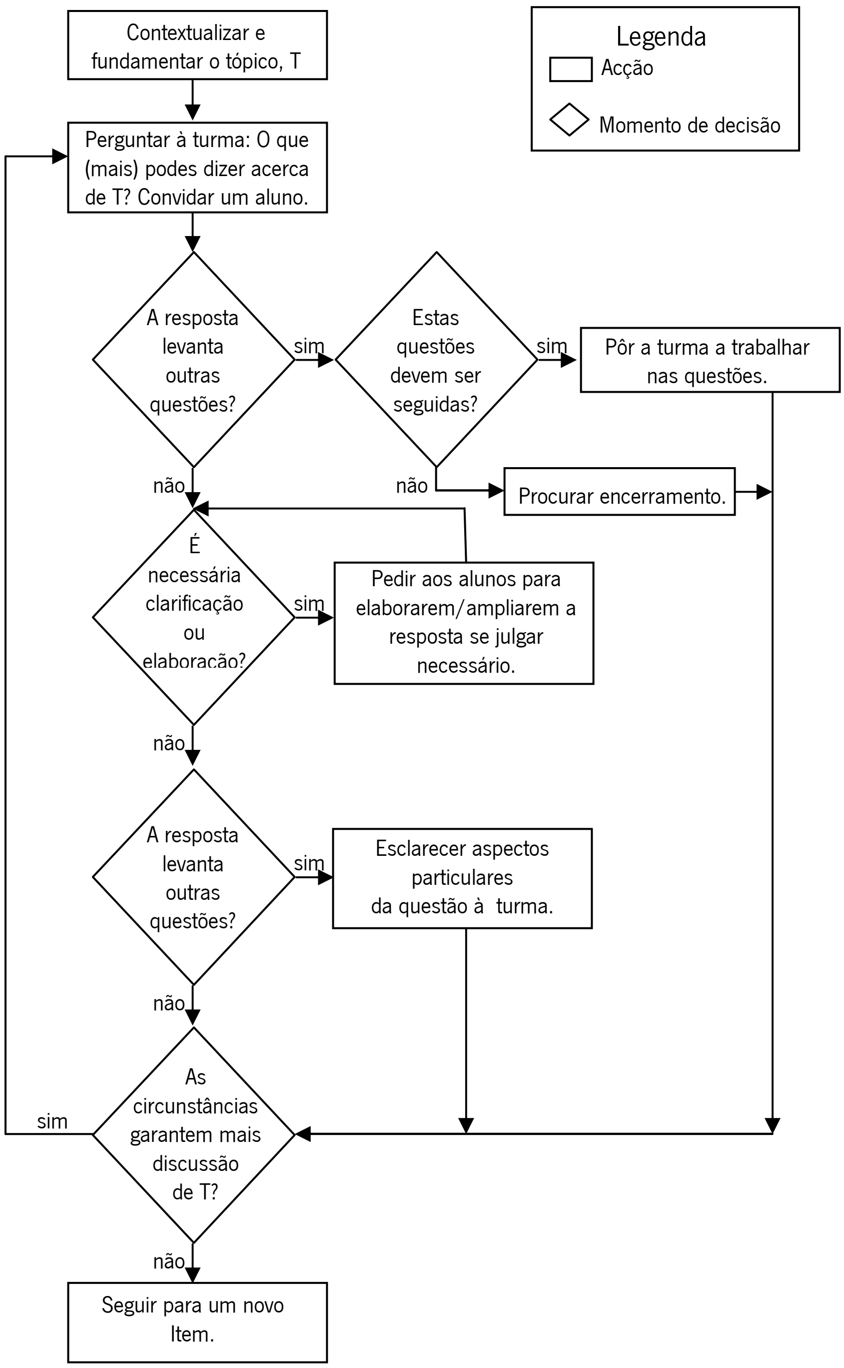


Figura 2. Rotina flexível e passível de interrupção para discutir um tópico (Schoenfeld, 2008)

Na mesma monografia, Ball, Lewis & Thames (2008) preocupam-se com o trabalho que o professor desenvolve para ajudar os alunos a fazer conjecturas matemáticas. Na introdução, Lewis (2008) aponta o facto de a investigação em educação estar ainda muito longe de produzir uma análise articulada dos domínios do conhecimento e destrezas necessárias para ensinar. No entanto, o trabalho de Ball, Lewis & Thames (2008) identifica aspectos do trabalho matemático no qual os alunos estão envolvidos através do discurso da sala de aula, e usam esses aspectos para examinar o trabalho do professor. São eles: (a) nomear e usar terminologia; (b) fazer e interpretar conjecturas; e (c) avaliar afirmações matemáticas. Defendem que o discurso de sala de aula é uma ferramenta essencial para moldar entre si o conteúdo matemático e o trabalho dos alunos. Argumentam que o objectivo não é os alunos inventarem matemática por si mas conseguirem ver a base matemática do que está a ser ensinado e aprendido, para o que é necessário preparar a matemática para o envolvimento dos alunos, bem como preparar os alunos para fazerem e aprenderem matemática. Esta tarefa do professor, que está largamente relacionada com o desenho e a reconfiguração do discurso, permanece muitas vezes invisível. Os autores concluem que o seu esforço para mostrar o trabalho dos professores com os seus alunos na sala de aula proporciona a aprendizagem dessas práticas e consequentemente uma generalização deste tipo de trabalho. Schoenfeld (2008) reforça a ideia de que estas tomadas de decisão do professor em situação são função e reflexo do seu conhecimento, discriminando e incluindo as categorias a que chama clássicas: o conhecimento matemático, o conhecimento de pedagogia geral e o conhecimento didáctico, além do conhecimento da história da sala de aula e o conhecimento dos alunos.

A leitura e análise destes estudos permite resumir as acções dos professores na aula que são função do seu conhecimento matemático e didáctico em quatro domínios fundamentais: (a) contextualiza e fundamenta o tópico matemático em estudo, que se desdobra em usar contextos motivadores e terminologia matemática; (b) convida a turma a pronunciar-se sobre o tópico, discriminando-se o suscitar o aparecimento de conjecturas e usar formas de representação adequadas; (c) orienta as respostas dos alunos para a compreensão e interpretação de conjecturas, fomentando a comunicação; e (d) gere a avaliação de afirmações, que se desdobra em promover a tendência para a justificação e fazer sínteses, esclarecendo, se necessário, aspectos particulares da questão á turma.

A investigação em Portugal. Serrazina (1998) conduziu um estudo sobre o desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo em que conclui que, no caso destes professores, a capacidade para organizar e implementar novas tarefas na sala de aula depende do desenvolvimento da compreensão matemática e, como consequência, do aumento do conhecimento didáctico[2].

Também Rocha (1995), num estudo sobre o mesmo tema, refere que os conhecimentos relativos a conteúdos matemáticos e às tarefas apropriadas – conhecimento didáctico de conteúdo – revelou-se determinante, tendo por vezes, quando pobre, dificultado a consideração de uma estratégia alternativa ou a adaptação da actividade perante dificuldades dos alunos.

Num estudo sobre o conhecimento matemático de professores do 1.º ciclo, Gomes (2003) constata uma preparação muito deficiente dos futuros professores do 1.º ciclo a nível de conhecimento matemático. Estes professores, embora assumindo não gostar de matemática e ter muitas dificuldades na disciplina, têm no entanto a convicção de que a matemática elementar é simples e que, portanto, será fácil ensiná-la. A investigadora considera, tendo como finalidade uma formação matemática sólida dos (futuros) professores, que deve ser dada uma atenção nuclear ao conteúdo matemático nos programas de formação.

Conhecimento curricular

O conhecimento curricular é naturalmente o conhecimento que os professores têm do currículo. No entanto, para se abordar o conhecimento curricular será útil fazer-se neste momento uma pequena digressão por alguns aspectos da definição de currículo, já que este termo pode ser utilizado com significados muito diferentes. Numa acepção mais restrita, o currículo é a sequência de disciplinas constituintes dum curso. Do outro lado do espectro, o termo pode significar tudo o que os alunos aprendem, de modo formal com os professores ou mesmo em situações informais e imprevistas, constituindo, neste caso, aquilo que se designa por currículo escondido (Ponte, Matos e Abrantes, 1998). Poderemos considerar, de acordo com estes autores, que um currículo contempla, de forma articulada, objectivos, conteúdos,

[2] Tradução da expressão da autora "pedagogical mathematics knowledge".

metodologias, materiais e formas de avaliação. Para mais, com o desenvolvimento de muito e variado material curricular, o conceito de currículo evoluiu para referir os recursos materiais construídos para serem utilizados pelos professores na sala de aula, tais como "currículos baseados nos Standards" (Stein, Remillard & Smith, 2007).

Ao longo do tempo têm sido vários os modelos de desenvolvimento curricular. Tendo como referência a estrutura curricular e o papel desempenhado pelo professor, podemos classificá-los em modelos baseados nos objectivos, no processo e na situação (Pacheco, 2001). O modelo centrado nos objectivos corresponde a uma perspectiva educativa que vigorou até meados dos anos setenta, baseada na corrente filosófica behaviorista. O currículo é um plano estruturado de aprendizagem dos alunos, estabelecendo como meta objectivos formulados em termos comportamentais rígidos quanto à previsão e precisão de resultados, numa pretensão de transformação da escola numa espécie de empresa de serviços a quem se exige resultados e sucesso. Estabelece-se uma cadeia hierárquica na estrutura curricular de que o professor se torna um mero executor de um projecto planeado por peritos. O modelo centrado no processo, baseando-se numa perspectiva construtivista, considera o currículo como um projecto de que o professor é um sujeito activo e participante. Deste modo torna-se não algo a gerir sem discussão mas uma ferramenta nas mãos do professor. Neste modelo o professor é o protagonista e deve tomar decisões adaptadas às necessidades de aprendizagem dos alunos. Nesta base de autonomia, o professor é um mediador decisivo entre o currículo estabelecido e os alunos. O modelo curricular centrado na situação, ou modelo crítico, tem por base a ideia de emancipação das pessoas, que podem, em colaboração, modificar as organizações. Nesta perspectiva, o professor, não isoladamente mas agindo numa comunidade reflexiva e crítica de colaboração, teria a liberdade de elaborar programas e materiais e de escolher a metodologia. Realça-se assim a colaboração e a colegialidade dos professores enquanto interventores na mudança da escola.

No modelo baseado no processo, que recolhe actualmente mais adesões, podemos encarar o conceito nos seus diferentes níveis (Pacheco, 2001; Gimeno, 1992), no processo de passagem por vários mediadores até aos alunos, que o vão sucessivamente transformando. O primeiro é o do currículo *formal* ou *prescrito* que é aquele que é apresentado pelo poder político e administrativo. O segundo corresponde já a uma interpretação, por exemplo dos autores de manuais escolares, e é este que constitui muitas vezes o currículo *apresentado* aos professores e alunos. Num terceiro nível o currículo é modelado ou *organizado* pelos professores quando efectuam a sua planificação. Vem de seguida o currículo *em acção*, ou seja, o que efectivamente acontece na sala de aula. Finalmente podemos considerar o currículo *avaliado*, que é aquele sobre o qual incidem as avaliações, muitas vezes externas, tendo por isso uma enorme influência como regulador das práticas dos professores. Gimeno (1992) apresenta (Figura 3) o esquema do currículo como processo:

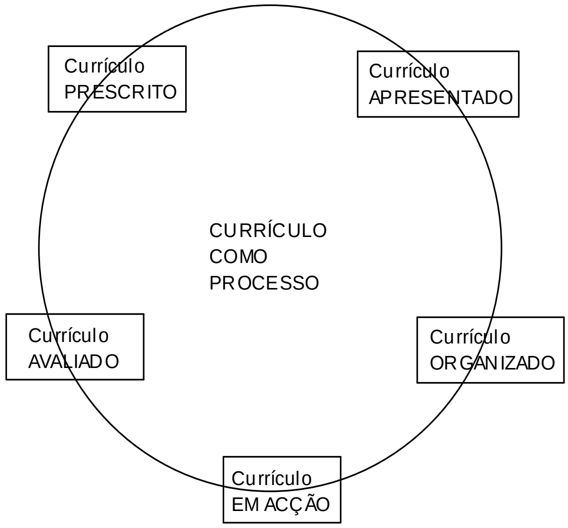


Figura 3. O currículo como processo (Gimeno, 1992)

Neste processo podemos inferir que o papel do professor é o de alguém que, conhecendo o currículo prescrito e materiais curriculares postos à sua disposição, o interpreta e o põe em acção contribuindo assim para que os alunos o aprendam. Mas esta interpretação não define o grau de intervenção ou autonomia que o professor pode ou deve ter na criação de materiais curriculares ou em experiências de inovação. Este aspecto estará sempre condicionado por considerações de ordem política e ética.

Voltando ao modo como o mesmo objecto evolui e se transforma podemos verificar que este é condicionado por uma série de factores. Essa evolução e as suas condicionantes são apresentadas por Stein et al. (2007) como fruto de uma revisão de literatura de estudos nos Estados Unidos sobre o impacto dos materiais curriculares na aprendizagem dos alunos. O professor figura com maior proeminência nessas explicações. Com efeito, são citados as crenças dos professores sobre a matemática, o ensino e a aprendizagem, o seu conhecimento sobre a matemática e as suas experiências como professores e como alunos. Mais recentemente foram identificados outros factores como a identidade do professor e a sua orientação e posicionamento face aos materiais curriculares. Mas há também factores relacionados com os alunos, nomeadamente o modo como respondem a tarefas envolvendo um pensamento independente de nível mais elevado e o receio que os professores têm de que os seus alunos não consigam enfrentar esses desafios, bem como as baixas expectativas que por vezes os professores têm em relação aos seus alunos. Os autores apontam ainda factores de contexto, tais como limitações de tempo, quer para planeamento quer para instrução, diferenças culturais e apoio aos professores. Por último, reconhecem que o próprio currículo é factor de influência das transformações do currículo oficial para o concretizado, enumerando factores como a natureza do próprio currículo, que pode ser convencional ou "baseado nos Standards" e características do currículo como a estruturação e a sequência dos temas.

Retomando a definição de Shulman, podemos considerar o conhecimento curricular como o conhecimento dos programas e a sua articulação horizontal e vertical e também o conhecimento de materiais de ensino disponíveis abrangendo os vários tópicos do currículo. Estes materiais podem ser textos, programas, *software*, materiais manipuláveis, filmes, apresentações laboratoriais ou convites à pesquisa (Shulman, 1986). Não obstante, verificamos que esse conhecimento curricular não é estático e que os professores interpretam e aplicam o currículo formal de diferentes modos que têm a ver com as suas características próprias como pessoas, com os seus alunos (ou as percepções que têm sobre eles), com o contexto e com o currículo em si. Como afirma Gimeno (1992), um currículo é um processo complexo, condicionado por factores históricos e culturais, que não deverá apenas reproduzir mas intervir na sociedade, onde as ideias se interligam com a prática e que tem de ser suficientemente flexível para possibilitar a intervenção dos professores.

O conhecimento e as crenças dos professores

Até agora tem vindo a analisar-se o conhecimento dos professores nas suas várias dimensões. Mas no acto de ensino há muitos outros factores em jogo. De acordo com Schoenfeld (2008), a tomada de decisões dos professores é uma função complexa dos seus conhecimentos, objectivos e crenças. Como é que se distinguem conhecimentos de crenças? É certo que factores de ordem não cognitiva como as crenças dos professores afectam grandemente as suas perspectivas sobre o ensino, a aprendizagem e a natureza da matemática, com realce para as que se enraízam nas suas experiências passadas enquanto estudantes, muito frequentemente em salas de aula em que a matemática era definida como uma disciplina a ser transmitida. De acordo com Ponte (1992) as concepções são de natureza predominantemente cognitiva, actuando como uma espécie de filtro. E se, por um lado, são geradoras de sentido, sendo por isso indispensáveis, também podem limitar as possibilidades de actuação e compreensão, actuando como bloqueadoras. Têm uma génese simultaneamente individual e social, quer resultando da experiência quer das relações com os outros. Assim, as concepções sobre a matemática e o seu ensino e aprendizagem resultam das nossas experiências e das representações sociais dominantes. Este autor considera as crenças, de carácter não racional, uma base de apoio do conhecimento, enquanto que as crenças têm um carácter organizador desse mesmo conhecimento. Guimarães (1992), por seu lado, realça que o termo "crenças" (*beliefs* na literatura inglesa) aparece com mais frequência e por vezes é identificado com o termo "concepções". Outros autores consideram concepções como um termo mais geral, incluindo crenças, perspectivas, preferências. Pajares (1992), considerando que a distinção entre crença e conhecimento mais habitualmente feita é a de que a crença é baseada na avaliação e juízo enquanto que o conhecimento é baseado em factos objectivos, propõe a definição de crença como "um julgamento individual de verdade ou falsidade de uma proposição, que pode apenas ser inferido duma compreensão colectiva do que os seres humanos dizem, tencionam e fazem" (p. 316).

Philipp (2007) faz uma extensa revisão da investigação em crenças e afectos nos últimos vinte anos. Este autor propõe as seguintes definições:

> Afecto – Disposição ou tendência ou emoção ou sentimento ligado a uma ideia ou objecto. Compreende emoções, atitudes e crenças.
>
> Crenças – Compreensões suportadas psicologicamente, premissas ou proposições acerca do mundo que são aceites como verdadeiras. São mais cognitivas, são sentidas menos intensamente e são mais difíceis de mudar que as atitudes. Podem ser consideradas como lentes que afectam a nossa visão acerca de algum aspecto do mundo ou disposições em relação à acção (p.259).

Segundo este autor, o conhecimento foi definido por Platão como uma *crença que é verdadeira* mas, para evitar o choque com o construtivismo radical, poderá definir-se como uma *crença que possui um razoável grau de certeza*. São encontradas por vários investigadores inconsistências entre as crenças e as práticas dos professores. O autor apresenta algumas explicações encontradas pelos investigadores revistos: (a) maior alinhamento com as crenças acerca da matemática do que com as crenças acerca do ensino e aprendizagem; (b) condicionantes de tempo, recursos, comportamento dos alunos; (c) aquilo que descontextualizado parecia inconsistência, visto numa perspectiva situada deixou de o ser; (d) as crenças ficaram na sombra perante prioridades educacionais como ganhar a confiança dos alunos ou gerir a turma; e (e) o estudo das crenças dos professores sobre a matemática é insuficiente para explicar a sua actuação; teria de se estudar também as suas crenças sobre as crianças, a sociedade e a educação.

Do que parece não haver dúvida é de que as crenças dos professores afectam grandemente a aquisição e interpretação do conhecimento e consequentemente as práticas de ensino dos professores. No entanto, a discussão sobre a relação entre crenças e mudança pode estabelecer-se nos dois sentidos; para alguns investigadores (Pajares, 1992) para mudar o comportamento terão de mudar as crenças. Mas esta visão levanta a questão do que poderá suscitar a mudança das crenças. A abordagem inversa, apoiada por Guskey (1986, citado em Philipp, 2007), defende que uma mudança nas práticas que provoque melhorias na aprendizagem dos alunos pode mudar as crenças dos professores. Resta neste caso a questão de como induzir a mudança das práticas. Neste sentido, Ponte (1992) afirma que o aparecimento de novos materiais curriculares, a participação em acções de formação ou a leitura de textos educativos podem provocar processos de mudança. Em relação a este debate, Fosnot & Dolk (2001) esclarecem que proporcionar aos professores novos manuais escolares ou novas estratégias pedagógicas apenas produzirá mudanças superficiais. As novas estratégias seriam aplicadas dentro do sistema de crenças existente, já que este é tão forte que resiste a novas aprendizagens, sobretudo se essas novas aprendizagens estão divorciadas da prática. Estes autores defendem que, para construir novas crenças, uma nova visão do que significa ensinar e aprender matemática, os professores precisam de experimentar eles próprios um ambiente onde a matemática seja ensinada como uma actividade humana de matematização e a aprendizagem seja realizada como construção. Quando os professores modelam eles próprios situações, constroem resoluções, descobrem relações e defendem as suas ideias com os pares, a sua visão acerca da matemática e da didáctica começa a mudar. Reflectindo na sua própria aprendizagem e o que a facilitou começam a formar novas crenças. Daí a importância dum determinado estilo de formação de professores. No capítulo seguinte discutir-se-ão mais pormenorizadamente estes aspectos.

Numa extensa discussão sobre a definição do termo crença, Pajares apresenta vários outros autores que utilizam o termo 'perspectiva' com um significado semelhante. Devido à dificuldade e não unanimidade de concordância da tradução do termo *belief* por crença

(Guimarães, 1992), adoptar-se-á neste texto o termo perspectivas englobando todos os conceitos relacionados com concepções, pensamentos, convicções e crenças dos professores.

Síntese

Neste capítulo fez-se uma revisão sobre o conhecimento do professor, começando por uma busca de definição do que é o conhecimento. Embora não haja unanimidade no plano teórico, optou-se, em consonância com os autores referidos, por admitir como componente necessária do conhecimento o estatuto de racionalidade, isto é, daquilo que é susceptível de argumentação, crítica e eventual refutação (Tardif e Gauthier, 2001; Fenstermacher, 1994; Popper, 2003). Quanto à natureza teórica ou prática do conhecimento, encontram-se duas linhas fundamentais. A de Shulman (1986), mais analítica, defende três componentes principais de conhecimento do professor: o conhecimento de conteúdo, o conhecimento didáctico e o conhecimento curricular. A de Schön (1983), baseada na prática, considera que a construção do conhecimento se dá através de um processo reflexivo sobre a acção. Estas correntes têm ambas grandes virtualidades e podem considerar-se em vários pontos complementares. De facto, a primeira vertente analisa o que deve caracterizar o conhecimento profissional e a outra caracteriza o conhecimento profissional como o que fazem e como fazem os bons professores. Neste estudo assume particular importância a posição de Shulman, por facilitar a elaboração de um esquema conceptual e ainda por apresentar as três categorias de conhecimento do professor que são preconizadas pelo programa de formação contínua de professores em que se insere o trabalho. Assim, procurou-se definir cada uma das categorias mas encontrou-se uma zona de sombra, de transição do conhecimento matemático para o conhecimento didáctico, já que o conhecimento matemático que o professor deve ter não é como o conhecimento dum matemático, isto é, o professor deve estar de posse dos conceitos puramente matemáticos que se prendem com os conteúdos que ensina mas deve possuir aquilo que é designado por alguns autores como o conhecimento matemático para ensinar (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Ma,1999). Este conhecimento envolve não só o "saber que é assim" mas a compreensão profunda das ideias matemáticas e dos melhores modos de facilitar a sua compreensão pelos alunos e de fazer análise de erros, e neste aspecto aproxima-se da concepção de conhecimento didáctico de Shulman. Quanto ao conhecimento curricular, este inclui o conhecimento dos programas e sua articulação horizontal e vertical mas também a familiarização com os materiais adequados a determinado tópico. Nestes termos, o professor torna-se um mediador do currículo prescrito enquanto planifica e executa em face das circunstâncias (Gimeno, 1992). Por último, discute-se a importância dos aspectos afectivos como emoções e crenças na visão dos professores sobre o ensino e a aprendizagem – sendo estas últimas difíceis de mudar - e a relação dialéctica que as crenças mantêm com a mudança, sugerindo alguns autores (Philipp, 2007) que a mudança de práticas que melhore a aprendizagem dos alunos pode ser um factor de mudança de crenças e outros, (Fosnot & Dolk, 2001), que esta mudança pode ser atingida através da aprendizagem da matemática pelos professores dentro dos moldes do construtivismo, em que os próprios professores se envolvem no mesmo tipo de tarefas e processos de matematização que se espera que venham a explorar com os seus alunos. Ambas se complementam e têm como suporte o desenvolvimento profissional. Por razões pragmáticas, optar-se-á neste texto por usar o termo perspectivas para designar todos os conceitos relacionados com concepções, pensamentos, convicções e crenças dos professores.

Todo o mundo é composto de mudança,
tomando sempre novas qualidades.
Luís de Camões

Capítulo 3

FORMAÇÃO CONTÍNUA DE PROFESSORES

Neste capítulo começa por dar-se uma breve perspectiva da importância da formação continua de professores, fazendo a transição para o novo conceito de desenvolvimento profissional, para logo de seguida se centrar na formação contínua em matemática. Neste âmbito descrevem-se alguns programas de formação contínua implementados a nível internacional, passando-se depois para a discussão de objectivos e características deste tipo de programas de formação. Por último faz-se uma breve síntese sobre o panorama no nosso país.

Importância da formação contínua

A profissão de professor surgiu em Portugal nos fins do séc. XVIII quando o Estado substituiu a Igreja na responsabilidade do ensino (Nóvoa, 1995). Mas foi a partir de meados do séc. XIX, quando se institucionalizou o sistema educativo actual, que começou a ser valorizada a formação de professores e foram, consequentemente, criadas as escolas normais. Durante o Estado Novo, vão-se agudizando duas facetas cujas repercussões duram décadas: a primeira é uma degradação progressiva do estatuto socioeconómico do professor, que começa a ser questionada a partir dos anos sessenta do séc. XX por movimentos políticos, sindicais e científicos; a segunda é uma visão do professor como um funcionário, que tem persistido até aos nossos dias.

Pelos anos sessenta do séc. XX, os indicadores estatísticos de analfabetismo colocam Portugal nos últimos lugares a nível europeu; a partir de então surgem várias reformas educativas, sendo a de maior fôlego a de Veiga Simão (1970-1974). A partir daí, a formação inicial de professores é fortemente impulsionada. Mas a enorme expansão do sistema escolar a partir de 1974 colocou a necessidade de contratação de muitos mais docentes, o que levou à profissionalização em serviço de muitas pessoas sem as qualificações científicas e pedagógicas exigíveis. No fim de mais esta etapa, os problemas estruturais da formação de professores parecem ter encontrado solução.

Todavia, embora se reconheça a utilidade do que aprendemos num determinado momento da nossa vida, a ideia de que a formação inicial nos proporciona todos os conhecimentos de que vamos necessitar para a nossa vida profissional não corresponde à verdade (Estrela et al., 2005). Há mesmo referências na literatura à pouca força do papel da formação inicial; mesmo que ela seja de qualidade, os novos professores têm tendência a, uma vez chegados às escolas, deixarem-se absorver pela ideologia ou pelo modelo dominante, que são muitas vezes contrários aos da formação inicial (Palhares, 2000; Ball et al., 2001; Roldão, 2005). Além disso, no caso do 1.º ciclo, é muito difícil preparar bons professores de matemática em apenas quatro anos quando se começa com alunos que muitas vezes têm uma compreensão da matemática muito limitada (Sowder, 2007).

Em Portugal, foi a partir dos anos oitenta que surgiu legislação sobre o direito e a importância da formação contínua de professores. Em 1986, a Lei de Bases do Sistema Educativo (Lei n.º 46/86 de 14 de Outubro) consagra o direito dos professores à formação contínua, pelo aprofundamento e actualização de conhecimentos e competências profissionais, associando-a à progressão na carreira.

Em 1990, o Estatuto da Carreira Docente reafirma o direito do professor à formação contínua e a necessidade da mesma para a progressão na carreira (art.15.º). Assim, surgem a partir de 1992 os Centros de Formação de Associações de Escolas e de Associações de Professores que vão evoluindo nos seus objectivos, ao longo dos anos noventa, por força da legislação entretanto introduzida que reforça a autonomia das escolas, com projecto educativo próprio e competência na identificação de necessidades de formação dos seus professores. Deste modo, há uma deslocação da prioridade dada nos centros de formação ao professor enquanto indivíduo isolado para perspectivar o professor integrado numa estrutura escolar.

A meta-análise realizada por Estrela et al. (2005) acerca da investigação sobre formação contínua de professores refere que:

> Os estudos focam a importância de analisar as implicações da formação nas práticas profissionais, através de dispositivos que incluam o acompanhamento de processos desenvolvidos nas escolas durante e após a formação (p.129).

Consistente com esta ideia é a proposta de Roldão (2005) para a formação contínua de professores, defendendo uma cultura profissional assente em parcerias institucionais efectivas, na supervisão como processo sustentador de formação e de produção de conhecimento profissional, na institucionalização da indução com possibilidade de redes e ainda na formação em contexto assistida e investigação como rotina das escolas.

A formação contínua e o desenvolvimento profissional

Esta visão abrangente da formação contínua é actualmente designada por vários teóricos por *desenvolvimento profissional*. Alguns autores referem-se à formação contínua como uma actividade que o professor realiza com um objectivo formativo para um desempenho mais eficaz das suas funções actuais ou a preparação de funções futuras. Outros consideram o desenvolvimento profissional como um conceito muito mais rico e elaborado (Day, 2001), que, no entanto, não exclui a formação contínua de professores, na forma de programa planeado de aprendizagens acreditadas e não acreditadas. Nesta acepção, a formação contínua pode contribuir de forma significativa para o desenvolvimento profissional dos professores (Nóvoa, 1995). O conceito de desenvolvimento profissional adapta-se melhor à noção de professor como profissional do ensino (Garcia, 1999). Com efeito, o termo *desenvolvimento* tem uma conotação de evolução e continuidade que supera a justaposição tradicional entre formação inicial e aperfeiçoamento. Além disso, apresenta uma abordagem de formação num sentido de integração num contexto organizacional e orientada para a resolução dos problemas escolares que supera o carácter marcadamente individualista da noção tradicional de formação como "reciclagem". Como afirma Garcia (1999), "Vemos o desenvolvimento profissional dos professores como [...] a *cola* que permite unir práticas educativas, pedagógicas, escolares e de ensino" (p. 139)

Neste trabalho adopta-se uma noção de formação contínua no sentido mais abrangente, em consonância com Jacobs, Franke, Carpenter, Levi & Battey (2007), que vêem o desenvolvimento profissional como um meio de proporcionar aos professores oportunidades de aprender por períodos alargados de tempo. Estes autores acreditam que o desenvolvimento profissional deve estar explicitamente ligado ao trabalho diário dos professores com os alunos, aprendendo, por exemplo, a analisar produções escritas dos alunos e o pensamento revelado por estes como forma de melhorar a sua prática.

A finalidade última da formação contínua é produzir melhorias no ensino que possam reflectir-se na qualidade das aprendizagens dos alunos. De acordo com Day (2001) há dados que demonstram que a formação contínua produz impacto no pensamento e na prática dos professores e, consequentemente, nas experiências de aprendizagem dos alunos na sala de aula. Para isso a formação deve ter em atenção as necessidades particulares de desenvolvimento dos professores enquanto pessoas, quer a nível intelectual quer emocional. Por outro lado, há imperativos de mudança das expectativas e resultados de aprendizagem e dos padrões de ensino e por vezes o desejo de avaliar os resultados prematuramente. E a gestão destas interacções é de grande complexidade e pode comprometer os resultados a longo prazo. Discutindo as diferentes dimensões interna e externa do desenvolvimento profissional, Bolhuis (2006) defende que a aprendizagem profissional ocorre em programas desenhados para atingir determinados objectivos, mas também ocorre espontaneamente durante o trabalho. Assim, esta aprendizagem espontânea deve ser tomada em linha de conta por forma a atingir e apoiar mudanças nas práticas dos professores, já que a aprendizagem constrói-se sempre sobre o conhecimento prévio. Esta aprendizagem profissional tem de ser compreendida como um processo social no contexto cultural do trabalho, o que implica uma abordagem ampla, combinando conhecimentos de teorias cognitivas e comportamentais bem como teoria social, histórica, cultural e crítica. Este autor aponta a importância dos aspectos implícitos, comportamentais e emocionais da aprendizagem espontânea dos professores tais como a identidade, a motivação e a orientação pessoal para uma maior ou menor tolerância à incerteza. O autor afirma que, por exemplo, embora os professores tenham à partida baixas expectativas em relação à aprendizagem de um grupo de alunos, se no entanto tentarem uma nova estratégia de ensino e forem bem sucedidos a ajudar esses alunos a aprender, as suas crenças provavelmente mudarão. Conclui realçando que a aprendizagem social através da reflexão crítica envolve uma mudança do implícito para o explícito, da autonomia individual e da autoridade do poder para uma responsabilidade partilhada no diálogo e na acção conjunta.

Procurar-se-á de seguida colocar o foco na necessidade e perspectivas de formação contínua ao nível da disciplina de matemática.

Formação contínua em matemática

Judith Sowder (2007) inicia um artigo recente sobre formação de professores com uma frase curta mas significativa: "Teachers matter" (p.157). De facto, segundo esta autora, são inúmeros os investigadores, a nível internacional, que afirmam como resultado de investigações haver uma estreita relação entre, por um lado, o conhecimento e a formação dos professores e, por outro, o sucesso das reformas e a melhoria das aprendizagens. Há assim um crescente reconhecimento de que a formação de professores deve ser uma prioridade.

Objectivos da formação contínua

A matemática constitui no presente uma componente fundamental da escolaridade obrigatória em todo o mundo, mas o seu ensino e aprendizagem faz-se de modos muito diferentes devido a diferentes contextos culturais e organizacionais. Em particular, a natureza e extensão do apoio à formação contínua e desenvolvimento de professores de matemática varia de país para país e mesmo dentro do próprio país (Silver, Mills, Castro, Ghoussein & Stylianides, 2007). Tem também variado substancialmente ao longo do tempo. Tradicionalmente considerava-se que para ensinar matemática bastava saber matemática. Esta ideia era mais popular entre os matemáticos e os professores de matemática de níveis de escolaridade mais elevados. Em oposição a esta ideia surgiu outra, mais sofisticada, de que saber matemática inclui conhecimento da história da matemática, epistemologia da matemática, filosofia da matemática (Boero, Dapueto & Parenti, 1996). O que infelizmente aconteceu nestes casos é que os professores continuavam a ter uma formação tradicional baseada em exposição de matérias e resolução de exercícios e depois frequentavam uns cursos ou seminários que se destinavam a dar-lhes algumas perspectivas históricas ou epistemológicas. Esta opção de formação acabava por ser apenas um "verniz cultural" sem influência prática nas escolhas profissionais e nas actividades de sala de aula.

Mais tarde começou a prevalecer a ideia de que a formação contínua em matemática é um processo muito mais complexo do que simplesmente desenvolver o conhecimento matemático dos professores, já que é importante não só o que se aprende mas o modo como se aprende (Cooney & Krainer, 1996). Isto sugere a necessidade de realçar a componente reflexiva em que os professores analisam explicitamente as implicações das suas próprias experiências de aprendizagem no seu ensino, criando contextos em que o conhecimento científico e didáctico estejam ligados. Esta reflexão sobre a prática, ditada pelo trabalho de Schön (1983) pressupõe que o professor é um ser pensante, não podendo por isso ser "objecto" de um programa de formação. Cooney & Krainer (1996) apontam como princípios fundamentais a ter em conta num programa de formação contínua a valorização dos pontos fortes dos professores em vez das suas dificuldades, a realização de investigação-acção de modo a promover reflexão sistemática e a comunicação e cooperação entre professores e entre professores e investigadores.

Nos EUA conseguiu-se um consenso parcial sobre a natureza da matemática e o seu ensino e aprendizagem (Simon, 1994). Este consenso é representado pelos documentos do *National Council of Teachers of Mathematics,* traduzidos em Portugal pela Associação de Professores de Matemática: *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* (NCTM, 1989), *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática* (NCTM, 1991) e posteriormente *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2000). Estes documentos dão uma visão da aula de matemática onde os alunos se envolvem activamente na exploração de situações matemáticas, comunicação escrita e oral de ideias e validação dessas ideias, defendendo uma mudança radical em relação às aulas tradicionais, e apresentam referências para um ensino de qualidade. Em *Normas Profissionais* defendem-se cinco aspectos inovadores: aulas que sejam comunidades matemáticas, diferentes das aulas como colecção de indivíduos; verificação da correcção dos resultados através da lógica e da evidência matemática, longe do professor como única fonte de autoridade para a confirmação das respostas; raciocínio matemático, em vez de técnicas mecanizadas; formulação de conjecturas, invenção, resolução de problemas, em vez do foco na procura de respostas; e conexões da matemática, das suas ideias e aplicações, substituindo uma visão da matemática como corpo de conceitos e procedimentos isolados. Para poderem ensinar deste modo, os professores precisam de desenvolver seis aspectos (Simon, 1994): (1) conhecimento de matemática; (2) conhecimento acerca da matemática; (3) teorias úteis e significativas sobre a aprendizagem da matemática; (4) conhecimento do desenvolvimento nos alunos das ideias matemáticas; (5) capacidade para planificar aulas desta natureza; e (6) capacidade para interagir com os alunos.

Tendo havido, nos últimos anos, um crescente reconhecimento desta necessidade de mudança, surgiu a consequente necessidade de criar modelos de formação alternativos. Julga-se pois importante analisar vários programas recentes de formação de professores em diversos países de modo a, por um lado, conhecer em pormenor as suas características e modos de actuar e, por outro, na expectativa de que a sua discussão e conclusões possam eventualmente contribuir de algum modo para iluminar o percurso do programa de formação sobre o qual se debruça este estudo.

Descrição de alguns programas de formação contínua

Apresentam-se as ideias-base de um projecto conduzido pela investigadora americana Catherine Fosnot e o investigador holandês Maarten Dolk durante mais de uma década, num trabalho de colaboração ligado à formação de professores (Fosnot & Dolk, 2001) em que procuram ajudar os professores a basear a sua prática em como as pessoas aprendem matemática, a ver o mundo através de uma lente matemática – em suma, a matematizar o seu mundo. Partindo da constatação de que as crenças dos professores afectam as suas decisões, consideram necessário que os professores analisem e reflictam sobre o seu sistema de crenças baseando-se numa nova visão da prática. Isto significa muitas vezes criar desequilíbrios em relação a crenças anteriores. O modelo de formação de professores que preconizam baseia-se na *phronesis* e no construtivismo. *Phronesis* é conhecimento em situação específica relacionado com o contexto em que é usado – neste caso, o processo de ensino e aprendizagem. O construtivismo descreve a aprendizagem como o processo de construção de compreensão por modificação de esquemas e estruturas prévias. Mais do que ensinar teoria aos professores que se espera que apliquem, têm de lhes ser dadas experiências que os envolvam na acção, reflexão e conversação no contexto do ensino e da aprendizagem. Se os professores modelarem eles próprios situações matematicamente, resolverem problemas, estabelecerem relações e comunicarem as suas ideias aos colegas, as suas crenças sobre a matemática e o seu ensino começarão a mudar. As novas crenças serão a base do modo como vão reagir, questionar e interagir com os seus alunos. Terão de encarar a matemática como uma actividade humana de matematização e terão, na sua prática, de caminhar na linha fronteira entre a estrutura da matemática e o desenvolvimento dos alunos, adquirindo uma compreensão profunda dos tópicos matemáticos que ensinam e da "paisagem" da aprendizagem – as grandes ideias, as estratégias e os modelos. Por grandes ideias os autores entendem as ideias centrais, organizadoras da matemática, que deste modo estão profundamente relacionadas com as estruturas. Por estratégias entendem padrões de comportamento ou esquemas na perspectiva piagetiana, cujo desenvolvimento é uma característica importante da aprendizagem. Finalmente como modelos entendem ferramentas para pensar, na medida em que permitem ver, organizar, interpretar e representar. Assim, o ensino tem de estar relacionado com a aprendizagem dos alunos, baseada em esquematizar, estruturar e modelar. Neste projecto os autores procuraram envolver os professores em verdadeiras experiências de matematização. Por exemplo, no primeiro dia de um curso de verão para professores do ensino básico, a investigadora pediu para se organizarem em grupos de seis ou sete e se apresentarem mutuamente, descobrindo cada um qualquer coisa em comum com cada um dos outros. Cada grupo, depois, teria de descobrir o número dessas conexões para o seu grupo e predizer o número de conexões para a turma toda, para todo o instituto e para um grupo com qualquer número de pessoas.

O investigador britânico Jeremy Hodgen (2003) descreve um estudo longitudinal sobre a mudança profissional de professores envolvidos como professores investigadores num projecto designado por *Primary Cognitive Acceleration in Mathematics Education (CAME)*. A equipa do projecto inclui quatro investigadores, quatro professores investigadores e o coordenador local dos professores de matemática. No primeiro ano a equipa reuniu quinzenalmente para avaliar a praticabilidade da abordagem e para desenvolver aulas de pensamento matemático especificamente para alunos do ensino básico. Durante a segunda fase do projecto, nos dois anos lectivos seguintes, um grupo de professores juntou-se ao grupo inicial para começarem a aplicar as aulas de pensamento matemático de forma mais generalizada. O primeiro grupo de quatro professores continuou a desenvolver aulas, ao mesmo tempo que liderava sessões de desenvolvimento profissional para os novos colegas e funcionando como seus tutores apoiando-os nas suas aulas.

A análise de um dos casos permitiu concluir que se operou nessa professora uma grande mudança nas suas crenças acerca da matemática e do seu ensino. Por exemplo, a noção inicial de autoridade externa em relação ao conhecimento matemático (validado por especialistas) foi substituída por uma de *author/ity*[3]. Este conceito, desenvolvido por Povey (Povey, 1997, citado em Hodgen, 2003), pretende realçar a raiz comum de autoridade e autoria, a primeira ligada a poder e validação do conhecimento e a segunda ligada a origem, criação de uma acção ou um estado de coisas; os dois termos ligados conduzem à construção duma epistemologia que reconhece cada pessoa como criadora de conhecimento, avaliando criticamente as autoridades instituídas. A mesma professora desenvolveu também a concepção da matemática como uma disciplina com uma rede de conexões entre diferentes ideias. O autor pretende defender aqui o ponto de vista de que a reflexão que conduziu a professora a esse desenvolvimento profissional não foi feita isoladamente mas porque as circunstâncias o requereram – o facto de se tornar tutora dos colegas mudou a sua identidade, descentrando-a dela própria e permitindo um distanciamento e simultaneamente uma motivação que proporciona e facilita a reflexão que se encontra na origem da mudança. Assim, a reflexão é apresentada como algo que tem de ser construído e exige duas componentes fundamentais: a distanciação e a motivação. Deste estudo ressalta a importância dum modelo de formação de professores em que estes não só se envolvem criticamente com o currículo de matemática como professores e como estudantes de matemática mas também os coloca em situações em que, como tutores de professores ou construtores de currículo, possam animar outros colegas a envolver-se criticamente de forma semelhante.

Um outro estudo é apresentado pelos americanos Olson e Barrett (2004) e integrado no Projecto *PRIME*, uma parceria entre a Universidade de Illinois, escolas básicas e professores,

[3] Mantém-se o original inglês por fidelidade à ideia do autor.

com a finalidade de desenvolver novas concepções de como ensinar matemática apoiando-se na reforma curricular. Utilizam um formato designado por formação cognitiva (*cognitive coaching*), que pressupõe o desenvolvimento profissional através de um processo de reflexão. O professor começa por identificar uma preocupação durante uma conversa anterior à aula, o formador (que é cada um dos autores do artigo) recolhe dados durante a observação da aula, e os dois analisam e reflectem sobre a aula numa reunião posterior. Assim, a modalidade de formação pressupõe ciclos de actividade-reflexão, assentes em formação cognitiva, que foi expandida pelos investigadores com diferentes abordagens como o uso de tarefas ricas e discussão dos conceitos matemáticos envolvidos, a modelação de ensino pelo formador nalguns casos, a colaboração durante a planificação e a instrução, e a reflexão sobre as aulas. É referido como de grande utilização um livro de propostas de trabalho de índole investigativa abrangendo vários temas da matemática do ensino básico. A análise das práticas indicou que o uso de tarefas matematicamente ricas e a discussão dos conceitos matemáticos delas emergentes, por si só, não conduz ao crescimento profissional. Em dois casos essas tarefas inovadoras foram utilizadas de modos tradicionais, continuando a considerar a matemática como a ciência do certo ou errado e conduzindo o discurso de maneira a desencorajar a compreensão dos alunos; noutro caso a professora permitia múltiplas resoluções mas era incapaz de as interpretar se fossem diferentes do manual. Assim, as quatro abordagens de formação utilizadas não foram capazes de despoletar a desejada mudança das práticas. Os autores concluem ser necessário espevitar a curiosidade dos professores para que eles tenham interesse em investigar o pensamento matemático dos seus alunos. Deste modo, aconselham os formadores a pedir aos professores para predizerem as respostas dos seus alunos a uma dada questão.

Joanna Higgins apresenta uma análise comparativa de dois estilos de formação de professores do ensino básico em matemática na Nova Zelândia (Higgins, 2005). O apoio aos professores é designado pela autora como «pedagogia da facilitação». Na primeira abordagem as acções de facilitação ou apoio são baseadas num manual para o professor e numa sequência de actividades baseada em materiais que os professores devem aplicar. Por contraste, a segunda abordagem coloca a ênfase na orientação para os professores se centrarem em componentes estruturais de modo a ganharem competências necessárias para a flexibilidade na sala de aula. Esta segunda via é a que está a ser agora preconizada pelo Ministério da Educação neozelandês na implementação do *Numeracy Project*. A Tabela 1 compara as duas abordagens na ênfase que dão a quatro características: manual, materiais, tarefas[4], método de ensino e modelação da nova prática.

Tabela 1: *Comparação das orientações das acções de facilitação com vista à mudança das práticas de ensino dos professores (Higgins, 2005)*

Características da nova prática	Orientação das acções de apoio A: Apoio orientado para adesão ao *design*	Orientação das acções de apoio B: Apoio orientado para a sensibilidade ao contexto
Manual do professor	Ênfase na adesão ao *design* do programa e ao manual	Ênfase no uso de elementos estruturais para interpretar o manual
Materiais (tarefas)	Ênfase no envolvimento activo dos estudantes com os materiais	Ênfase na compreensão pelo professor das propostas matemáticas e conceitos subjacentes aos materiais
Método de ensino	Ênfase no efeito experiencial das tarefas	Ênfase nas representações dos estudantes da sua compreensão matemática
Modelação da nova prática	Ênfase no uso "adequado" dos materiais pelos estudantes	Ênfase na extensão de conceitos em resposta às acções e explicações dos alunos

A ênfase da primeira orientação, de adesão ao *design* do programa, assenta em práticas de sala de aula procedimentais. Os procedimentos esperados estão estabelecidos sem ambiguidade no livro do professor. Em suma, a actividade é vista como fundamental, ainda que as tarefas sejam exploradas superficialmente. Em contraste, a ênfase da segunda orientação, de sensibilidade ao contexto, foca-se em estratégias dos estudantes, tarefas significativas e múltiplas representações. Resumindo, é fundamental a compreensão dos alunos e a investigação com uso de raciocínio.

A autora defende que é necessária mais investigação para responder a questões como "Que dimensões de estrutura apoiam uma orientação com sensibilidade ao contexto e permitem aos professores interiorizar novas práticas para o seu contexto de trabalho?" ou "Que acções dos facilitadores garantem uma dinâmica de evolução a desenvolver numa escola que conduza à sustentação dessas novas práticas?" ou ainda "Como preparar os facilitadores para uma orientação de sensibilidade ao contexto?" (Higgins, 2005, pp.142-143).

[4] Optou-se por traduzir por *tarefas* o original *activities* por estar mais de acordo com a linguagem utilizada neste texto, no sentido de proposta de trabalho feita pelo professor a que o aluno pode aderir – entrando em *actividade*.

Um estudo incidente no debate sobre o conhecimento matemático e o conhecimento didáctico e das suas inter-relações é apresentado por Adler, Davis, Kazima, Parker & Webb (2005). Estes investigadores pretendem estudar e compreender como e em que medida é que a matemática e o ensino são produzidos em três instituições de formação contínua de professores na África do Sul que valorizam de modo diferente a integração entre a matemática e o ensino. Os programas variam no grau em que as oportunidades para os professores (re)aprenderem a matemática e o ensino estão embutidas em problemas da prática de ensino da matemática. O estudo baseia-se no trabalho com as produções matemáticas dos alunos (interpretar, analisar, julgar) que é feito em todas as instituições mas que emerge e é abordado de modos diferentes, iluminando de formas interessantes este elemento do conhecimento matemático para ensinar. Os cursos analisados são de formação em serviço para professores do ensino secundário. Foram identificados em cada curso vários "eventos avaliativos" que são objecto de estudo pela equipa de investigação, nos quais são identificados conhecimentos de matemática para ensinar requeridos e legitimados no discurso pedagógico, na assunção de que através deles se revele o tipo de conhecimento matemático e didáctico que acaba por ser privilegiado. Foi encontrada nas três instituições uma quantidade surpreendente de situações que fazem apelo simultâneo aos dois domínios, matemático e didáctico.

Edward Silver e os seus colaboradores (Silver et al., 2007) desenvolvem nos Estados Unidos um projecto plurianual de formação contínua de professores de matemática do ensino básico (middle school), BI:FOCAL (Beyond Implementation: Focusing On Challenge And Learning), em que utilizam sistematicamente duas abordagens distintas de formação, análise de casos de vídeo ou narrativos e estudo de aulas - *lesson study*[5] -, que, por serem diferentes, se complementam beneficiando cada uma, nas suas limitações, das potencialidades da outra. Com efeito, os casos de vídeo ou narrativos permitem aos professores analisar episódios de ensino e artefactos da prática autênticos, mas tipicamente de professores exteriores, enquanto que com o estudo de aulas os professores trabalham em conjunto planificando, implementando,

[5] O termo *lesson study* surgiu como a tradução do termo japonês *jugyokenkyuu,* que designa um processo de desenvolvimento profissional utilizado pelos professores japoneses para uma análise sistemática da sua prática. Este processo consiste em trabalho colaborativo de professores em pequenos grupos, que inclui planificação, observação e crítica de aulas entretanto observadas pelos colegas (Kelly, 2002).

analisando a implementação e revendo aulas que eles próprios dão ou observam. Os primeiros são promissores para o desenvolvimento profissional, já que tornam o ensino visível e acessível e promovem a reflexão sobre a prática, tendendo a colmatar o hiato entre as generalidades do saber teórico e as particularidades do saber contextualizado. Surpreendentemente, há muito poucos resultados de investigação sobre a sua eficácia e impacto na prática. Os segundos baseiam-se numa ideia simples – colaborar com colegas na planificação, observação e reflexão de aulas - mas difícil de implementar e de que também há pouca evidência empírica.

A Tabela 2 apresenta as facetas complementares das duas abordagens segundo estes autores:

Tabela 2: *Características complementares da análise de casos e do estudo de aulas (Silver et al., 2007)*

Pontos fortes da análise de casos e *Necessidades* para estudo de aulas bem sucedido	*Limitações* da análise de casos e *Pontos fortes* do estudo de aulas
• Vontade de desocultar o ensino na sala de aula em discussões com colegas • Adoptar uma atitude analítica em relação ao ensino em geral • Aprender a fazer afirmações baseadas mais em dados do que em opiniões • Atender a objectivos educacionais e questões gerais • Considerar uma aula como uma unidade de análise	• Aplicar ao seu próprio ensino ideias decorrentes da análise do ensino de outros • Adoptar uma atitude analítica em relação ao seu próprio ensino • Empenhar-se no aperfeiçoamento constante do ensino • Analisar questões educacionais genéricas em relação ao seu ensino • Considerar uma aula como uma unidade de aperfeiçoamento

O projecto pretende desenvolver o conhecimento matemático dos professores, o conhecimento sobre o pensamento dos alunos e o reportório de estratégias que facilitem o uso de materiais curriculares inovadores com o fim de envolver os alunos em actividade intelectual complexa. O programa dá especial importância à planificação por envolver todos os aspectos do conhecimento do professor – matemático, didáctico e sobre os alunos. Para além disso, parece ser um ponto crítico para a eficácia da instrução. Em termos práticos, doze professores de cinco escolas básicas de Detroit encontraram-se mensalmente durante um ano. A análise do estudo efectuado por estes investigadores baseou-se no trabalho produzido por esses professores, incluindo planos de aula, reflexões e relatórios feitos, assim como em dois questionários e entrevistas. Como resultados apontam uma maior atenção aos pormenores na planificação de estratégias, antecipando o pensamento dos alunos, incluindo concepções erradas; promoveu a auto-reflexão; o trabalho colaborativo exigiu a procura de uma linguagem comum mas a planificação conjunta produziu uma discussão interactiva frutífera e teve impacto na prática individual; a simultaneidade de abordagens produziu uma forte sinergia entre os dois conjuntos de experiências; em particular, o trabalho com os casos de vídeo ou narrativos produziu intuições que puderam ser utilizadas na planificação de aulas. Também a linguagem comum usada para descrever e analisar a prática no contexto dos casos foi assimilada pelos professores e aplicada no trabalho de planificação e análise das aulas. Curiosamente, os investigadores realçam que as vantagens dessa sincronia nem sempre foram apercebidas pelos professores, que valorizaram muito mais a segunda abordagem, do estudo de aulas, do que a análise dos casos ou do que a combinação das duas.

Heuvel-Panhuizen e De Goeij (2007) descrevem um curso de formação na Holanda para coordenadores de matemática em escolas elementares (Projecto NCRC). A existência destes especialistas na área da matemática é justificada pelo facto de a escola elementar abranger seis anos e os professores serem generalistas. O papel e a importância do coordenador assenta na necessidade de um reforço do conhecimento científico na educação. O curso está desenvolvido em módulos ocupando cada um cinco sessões de três horas. Dá-se muita importância à partilha de experiências de ensino, à reflexão sobre a prática e ao desenvolvimento da auto-imagem do professor. Cada módulo inclui pequenas sessões expositivas, a resolução de problemas matemáticos, e elaboração de tarefas de ensino e a análise do trabalho dos alunos, a visualização de gravações de actividades de sala de aula, a discussão de resultados de investigação e materiais de ensino. Também inclui a partilha e reflexão de forma a beneficiar da experiência dos colegas. Os (futuros) coordenadores devem também desenvolver actividades de informação e partilha na Internet. Através do estudo de caso de uma destas formandas os investigadores concluíram que a recepção pelos colegas da escola não foi das melhores; estes não concordaram que essa professora fizesse experiências e investigação na sua sala de aula argumentando que isso ia contra a planificação prévia feita na escola, talvez por temerem que os resultados da investigação fizessem alargar a mudança de práticas a todos o que não seria para eles desejável; por circunstâncias várias que se prendem com o facto de só haver coordenador na área da matemática, houve uma reacção de desconfiança às funções do coordenador por parte dos colegas; e ainda a falta de atribuição de tempo extra para o desempenho das funções, que não foi o caso desta professora mas acontece na generalidade dos outros casos, pode ser um entrave ao desempenho das funções. Assim, os investigadores concluíram que há um hiato entre teoria e prática e sobretudo um choque entre políticas e prática que pode comprometer o sucesso dos esforços para colocar um coordenador em escolas em que a generalidade dos professores não é especialista em matemática.

De seguida, apresentam-se três programas especificamente virados para o desenvolvimento do pensamento algébrico, que é o tema matemático mais em realce neste estudo. Kaput & Blanton (2001) e Blanton & Kaput (2003), reconhecendo como problemática a abordagem tardia da álgebra nos currículos, propõem o desenvolvimento do raciocínio algébrico de forma a aprofundar a compreensão dos alunos ao desenvolver neles competências de generalizar, bem como de exprimir e justificar generalizações. Para atingir este objectivo desenvolveram um programa de formação de professores cuja estratégia central é a de *algebrização* da experiência matemática dos professores, que se enraíza na atenção dada pelo professor a processos de os alunos generalizarem o seu pensamento matemático e de exprimirem e justificarem as suas generalizações, e que possui três dimensões:

(a) Construção de oportunidades de raciocínio algébrico, tais como generalização e formalização progressiva a partir de materiais de ensino adequados, incluindo a *algebrização* de problemas aritméticos conhecidos de uma-resposta-numérica em oportunidades de construir padrões, conjecturar, generalizar e justificar factos e relações matemáticas;

(b) A descoberta e apoio do pensamento algébrico dos alunos pelo desenvolvimento nos professores de "olhos e ouvidos algébricos" de modo que possam identificar oportunidades de generalização e sua expressão sistemática (incluindo expressão escrita) e explorá-las quando ocorrem;

(c) A criação de uma cultura de sala de aula e práticas de encorajamento de processos de generalização e formalização no contexto de conjecturas e argumentação intencional, de modo que ocorram frequentemente oportunidades de raciocínio algébrico e sejam exploradas quando ocorrerem.

O primeiro passo traduz-se no uso de problemas matematicamente desafiadores e que os professores poderão modificar para uso nas suas aulas. Estes problemas devem possuir características especiais como conter ideias matemáticas importantes, permitir abordagens a diversos níveis, gerar debates ricos do ponto de vista matemático, envolver raciocínio e cálculo. Um exemplo desses é o conhecido *problema dos apertos de mão*:

> *Vinte pessoas estão numa festa. Se cada pessoa apertar a mão uma vez a todos os presentes, quantos apertos de mão serão dados? Quantos, se forem vinte e uma pessoas? Como cresce o número de apertos de mão à medida que uma nova pessoa entra para o grupo?*

Procurou-se que os professores se envolvessem na aprendizagem e reflexão de ideias matemáticas poderosas e representações a utilizar, mas também na construção de materiais de ensino que veiculassem esse mesmo tipo de pensamento. Uma outra característica importante deste trabalho com os professores é apoiá-los em actividades de generalização e formalização com os alunos de modo a que estas actividades passem a ser parte da sua prática habitual, não uma actividade que se faz esporadicamente como forma de enriquecimento.

O problema dos apertos de mão obedece aos requisitos citados, mas é claramente de descoberta de padrões e portanto revela mais facilmente uma possibilidade de generalização e formalização – que será o de começar com números pequenos mas de seguida levar os alunos a "dar o salto" para um número que já não apeteça ou não consigam resolver, por exemplo, com um desenho. Ainda assim, podemos distinguir algumas subtilezas na abordagem: esta pode ser construir a sequência 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... e procurar uma fórmula recursiva, o que é mais pobre do que usar sequências de somas "não calculadas". Pondo entre parênteses o número de pessoas do grupo, tem-se: (1) 0+0=0; (2) 0+1=1; (3) 1+2=3; (4) 3+3=6; (5) 6+4=10; (6) 10+5=15; ... reflectindo o facto de que, cada vez que uma pessoa entra, o número de apertos de mão é aumentado dum número igual ao número de pessoas que já estavam. Mas ainda mais reveladora é a escrita da soma com todas as parcelas à vista, por exemplo: (6) 0+1+2+3+4+5. Esta opção não só revela mais claramente o padrão como relaciona o problema com outros que foram ou poderão vir a ser trabalhados como números triangulares, triângulo de Pascal, etc. A chave da abordagem é o *tratamento da própria soma como um objecto algébrico*, usando-a como um recurso para raciocinar em vez de a considerar apenas uma indicação de cálculo para preencher uma sequência.

Para tornar mais visível a possibilidade de partir de problemas aritméticos conhecidos de uma-resposta-numérica e transformá-los em algébricos, é apresentado outro exemplo:

Quero comprar uma tee shirt que custa \$14 e só poupei \$8. Quanto é que devo ganhar para poder comprá-la?

Este problema vulgar pode ser enriquecido com a seguinte extensão:

Podemos considerar o custo variável. Supõe que a tee shirt custa \$15, \$16, \$17 ou \$26. Usando P (ou quadradinho) para o preço da compra, escreve uma expressão numérica que descreva o dinheiro que eu preciso de ganhar para a comprar.

Ou outra formulação ainda mais interessante:

Partindo do princípio que ganho \$2 por hora com babysitting, quantas horas preciso de trabalhar para poder comprar a tee shirt de \$14? E se custasse \$20? E se custasse \$P? E se eu ganhasse \$3 por hora? Quantas horas precisaria de trabalhar para comprar a tee shirt de \$14?

O benefício deste tipo de iniciativa do uso de tarefas envolvendo aritmética generalizada traduz-se em: (a) poder desenvolver em simultâneo uma grande quantidade de experiências matemáticas, incluindo desenvolver o sentido do número, praticar rotinas de cálculo e reconhecer e construir padrões para modelar situações, evitando as fichas de trabalho rotineiras e realizadas sem compreensão; e (b) descobrir e apoiar o pensamento algébrico dos alunos, desenvolvendo os seus "olhos e ouvidos algébricos".

Para a segunda dimensão recomenda-se ao professor que coloque questões como "Diz-me como pensaste", "Resolveste de outro modo?", "Como sabes que isso é verdade?", ou "Funciona sempre?", de modo a, por um lado, desvendar o pensamento dos alunos mas, essencialmente, levá-los a justificar, explicar e construir argumentos – processos que estão no centro do pensamento algébrico. Os alunos demonstram a emergência do raciocínio algébrico quando usam números particulares para argumentar para o caso geral ou quando partem de um número para estabelecer uma conjectura para qualquer número, e usam gestos e ênfase vocal para tornar a sua intenção aparente. Por exemplo, quando usam os termos *par* e *ímpar* como representantes de qualquer desses números para raciocinar sobre a soma.

A terceira dimensão incorpora conjectura, argumentação e generalização como meios de construção de conhecimento. Isto envolve desenvolver este trabalho na prática diária, e não como actividades de "enriquecimento" que são feitas esporadicamente. A comunicação matemática, em que o professor desafia os alunos a generalizar o seu pensamento e a construir argumentos verbais e escritos que justifiquem as suas ideias, é o suporte fundamental para que as ideias algébricas ocorram e sejam viáveis. Uma prática de sala de aula com estas características assegura que as duas dimensões descritas anteriormente possam desenvolver-se e manter-se a longo prazo.

Para uma melhor concretização das acções do professor nesse domínio recorre-se a um estudo de caso dos mesmos autores (Blanton & Kaput, 2005) de uma professora do 3.º ano de escolaridade - June - frequentando um programa de formação contínua centrado no pensamento algébrico, onde se caracterizam práticas de sala de aula que promovem o raciocínio algébrico. A categorização a seguir apresentada na Tabela 3 é uma adaptação da realizada por estes autores e envolve o pensamento algébrico nas formas mais ligadas a este nível de ensino: como aritmética generalizada, como pensamento funcional e outros aspectos envolvendo generalização e justificação. No primeiro ponto de vista, a aritmética é usada como um domínio para expressar e formalizar generalizações. Na segunda acepção, a exploração e a generalização de padrões numéricos e geométricos permite a descrição de relações funcionais. O terceiro aspecto envolve outros processos de generalização e justificação mais complexos não especificados anteriormente, que podem indiciar que o pensamento algébrico é já um hábito mental nos alunos.

Tabela 3: *Categorização das formas de pensamento algébrico (Adaptada de Blanton & Kaput, 2005)*

Categorias de pensamento algébrico		
Aritmética generalizada	Pensamento funcional	Outros processos de generalização e justificação
A: Exploração de propriedades e relações entre números inteiros	E: Simbolização de quantidades e operação com expressões simbólicas	I: Uso de generalizações para a resolução de tarefas algébricas
B: Exploração de propriedades das operações sobre números inteiros	F: Descoberta de relações funcionais	J: Justificação, prova e teste de conjecturas
C: Tratamento algébrico do número	G: Predição de situações desconhecidas usando dados conhecidos – conjectura	K: Generalização de um processo matemático
D: Resolução de expressões em que falta um número	H: Identificação e descrição de padrões numéricos e geométricos	

Explicitam-se de seguida possibilidades de ocorrência de cada uma das categorias.

Categoria A – Os alunos exploram várias propriedades de números ou relações entre números. Por exemplo, generalizam sobre somas e produtos de pares e ímpares, generalizam sobre a diferença entre um número e ele próprio, decompõem números em parcelas e examinam a estrutura dessas parcelas, generalizam sobre propriedades ligadas ao valor posicional.

Categoria B – Os alunos exploram a estrutura das operações. Na tabela dos cem, a própria representação codifica múltiplos modos de pensar acerca de possíveis operações sobre um número. Por exemplo, a partir do 75 e para subtrair 10, os alunos podem subir directamente uma linha ou podem mover-se para a esquerda por unidades simples e subtrair 1 ao número por dez vezes consecutivas; quando verificam que a sequência de movimentos $\downarrow \rightarrow$ é equivalente a $\rightarrow \downarrow$ apercebem-se da propriedade comutativa.

Categoria C – Os alunos tratam o número de uma forma algébrica, ou seja, como representante, o que requer uma atenção à estrutura mais do que ao cálculo entre números específicos. Por exemplo, usando números suficientemente grandes de modo a estabelecer a paridade da soma sem a calcular.

Categoria D – Os alunos resolvem equações com uma ou múltiplas incógnitas.

Categoria E – Os alunos usam símbolos para modelar problemas ou para operar sobre expressões simbólicas. Por exemplo, quando usam códigos secretos e genericamente quando abstraem de certo modo do número para o símbolo.

Categoria F – Os alunos exploram correspondências entre quantidades ou relações recursivas e descobrem uma regra que descreve a relação entre as quantidades que variam.

Categoria G – Os alunos fazem conjecturas sobre o que poderá acontecer numa situação desconhecida, com base no que sabem da análise de dados conhecidos em relações funcionais. Por exemplo, no problema dos apertos de mão escrevem uma expressão numérica que dá o número de apertos de mão que se dariam num grupo de 12 pessoas baseados no conhecimento do que se passa com 6, 7 e 8 pessoas.

Categoria H – Os alunos identificam padrões em sequências numéricas ou figurativas ou em expressões numéricas.

Categoria I – Os alunos usam generalizações já realizadas para construir outras generalizações, num nível mais sofisticado de pensamento algébrico. Por exemplo, para determinar a paridade da soma de três números ímpares, os alunos baseiam-se na generalização feita para a soma de dois números ímpares.

Categoria J – Envolve processos essenciais para uma cultura que permite a emergência do pensamento algébrico mas não são específicos deste. Os alunos explicam o seu pensamento oral e publicamente facultando um contexto de envolvimento e debate com os pares em que as conjecturas podem ser aceites ou refutadas, justificando as suas perspectivas a um nível de sofisticação mais elevado. Por exemplo, os alunos discutem se zero é par ou impar ou testam e justificam os componentes de uma relação funcional estabelecida.

Categoria K – Os alunos constroem um conceito que resulta na generalização de um processo ou fórmula matemática. A construção é semelhante à de uma relação funcional mas aqui as generalizações visam conceitos nitidamente matemáticos. Por exemplo, a partir do conceito de área generalizam a fórmula da área de um rectângulo.

Pode também falar-se, de acordo com Blanton & Kaput (2005), de ferramentas que apoiam o pensamento algébrico, embora não sejam específicas deste, e que podem dividir-se em duas categorias: objectos e processos. Dentro dos objectos podem listar-se tabelas, gráficos, diagramas e rectas numéricas. No âmbito dos processos, consideram-se registar, recolher, representar e organizar dados. Os autores concluem do estudo que esta professora, que não se considerava uma "pessoa matemática", foi capaz de integrar o raciocínio algébrico na sua prática, quer em situações planeadas quer espontâneas, o que deu origem a mudanças positivas na capacidade de pensamento algébrico dos alunos.

A categorização acima apresentada será usada para caracterizar o desenvolvimento de formas de pensamento algébrico dos professores envolvidos no presente estudo com os seus alunos.

Um segundo modelo de aprendizagem profissional de professores para apoio ao ensino da álgebra na escola elementar numa altura de mudança curricular é apresentado por Elizabeth Warren (2006). Esta investigadora australiana baseia-se num modelo de formação que pressupõe que as mudanças na aprendizagem dos alunos são um factor mediador das mudanças nas crenças e atitudes dos professores. Este estudo qualitativo analisa seis professores do 1.º ano de escolaridade de três escolas diferentes trabalhando em pares sob a orientação de um perito e assenta no desenvolvimento do conhecimento matemático ligado aos padrões e álgebra e no conhecimento didáctico correspondente. Numa primeira fase os professores eram considerados alunos e o formador guiava e desafiava os professores à medida que iam construindo o seu novo conhecimento e práticas. Particularmente interessante é a técnica utilizada de os professores observarem o perito a dar algumas aulas nas suas próprias turmas. Numa segunda fase tanto os professores como os seus alunos eram considerados alunos. O ciclo de aprendizagem comportava as seguintes fases: Os professores, em pares e com o apoio do formador, planificavam e executavam experiências de aprendizagem com os seus alunos no domínio do novo tema Padrões e Álgebra. Depois seguia-se a reflexão e partilha com o grupo das aulas e das aprendizagens dos alunos e a identificação das ideias-chave para novas aulas. Os resultados das entrevistas aos participantes realçam a importância do diálogo com o formador, os benefícios de observar alguém a ensinar na sua turma, as vantagens de trabalhar em pares, a importância da partilha com outros e as vantagens do modelo para a aprendizagem dos alunos. A aprendizagem parece ter ocorrido devido a quatro interacções, a do formador com os professores, a dos pares de professores, a do professor com os seus alunos, e a do grupo de professores quando se encontravam para partilhar as suas aprendizagens. Neste último aspecto, em particular, a autora realça o facto de o par de professores que estava a partilhar a sua experiência com os outros quatro professores assumir a postura de perito e os quatro colegas a de alunos. Isto aconteceu por lhes terem sido entregues áreas de conteúdo diferentes para explorar.

Um terceiro modelo de formação de professores centrado no pensamento algébrico dos seus alunos em que se dá muita importância ao trabalho do aluno e ao pensamento que este revela é apresentado por Jacobs et al. (2007) e envolve um estudo experimental em que se comparam efeitos desse projecto de um ano em professores do primeiro ao quinto ano que o frequentaram e professores que o não frequentaram. Aos primeiros pede-se que coloquem questões aos seus alunos e que tragam as suas resoluções para serem analisadas pelo grupo de formação de modo a pôr a descoberto semelhanças e diferenças entre estratégias usadas que possam constituir a base de modelos a criar. Neste processo também são postas em relevo ideias matemáticas básicas emergentes. Todas as tarefas envolvem pensamento algébrico, como forma não só de prover um fundamento para o estudo subsequente da álgebra mas também de aprofundar a compreensão da aritmética básica. Procuram desenvolver nos alunos o que designam por *pensamento relacional*, que é uma ideia poderosa e unificadora visando "a tomada de consciência das relações entre números e das propriedades fundamentais das operações numéricas" (p.261). Há, nesta abordagem, uma preocupação com a generalização da aritmética, o que os autores conseguem com várias tarefas de que se dá exemplos:

- Ver o sinal de igual como o indicador de uma relação:

  $8 + 5 = \square + 4$

  (os alunos podem responder 13 ou 17)

Depois de compreender o significado do sinal de igual, podem usar estratégias distintas (usando ou não o pensamento relacional) para dar resposta à questão.

- Usar relações numéricas para simplificar cálculos:

  $8 + 5 = \square + 4$

  De facto, podem calcular 8+5=13 e em seguida 13-4=9, ou simplesmente "ver" que, como 5 tem mais uma unidade que 4, teremos de acrescentar uma unidade ao 8 para equilibrar.

- Explicitar relações genéricas baseadas em propriedades fundamentais das operações:

  $s + 0 = s$ ou $p + r = r + p$

  Este estudo mostrou que crianças pequenas são capazes não só de exprimir generalizações em linguagem corrente como em linguagem simbólica, usando variáveis.

- Usar propriedades das operações para simplificar cálculos:

  $68 + 27 - 27 = \square$; $98 + 74 + 2 = \square$

- Generalização:

  Indicar "sempre verdade" ou "nem sempre verdade" em expressões do tipo $c + b = b + c$; $a - b = b - a$; $c - c = 0$

Um aspecto prático interessante do trabalho com os professores é que durante as sessões de formação construíam cartões com questões do género das apresentadas mas com os valores numéricos e um grau de complexidade adequados aos seus alunos de modo a que pudessem, durante as aulas, promover conversas com e entre os alunos (mais do que resolver fichas individualmente) e, de volta ao grupo de formação, discutir com os colegas com base no trabalho dos alunos que traziam. Através deste estudo analisaram-se alguns exemplos de como a aritmética, considerada como a ciência dos números, das operações que lhe estão associadas e das propriedades dessas mesmas operações, pode fornecer muitas oportunidades para o pensamento algébrico. O estudo recolheu dados junto de 180 professores e 3735 alunos, tendo-se detectado que o programa de formação teve um efeito positivo tanto na aprendizagem dos professores como no desempenho dos alunos. Os autores relatam que iniciaram o estudo com a ideia de que o envolvimento dos professores em discussões acerca do raciocínio algébrico poderia ser uma motivação para uma mudança fundamental no ensino, não só da álgebra, mas da matemática em geral. No fim do estudo reiteram que o foco e a estrutura do conteúdo discutido no programa de formação foram fundamentais para a aprendizagem de professores e alunos.

O modelo teórico de análise de projectos de investigação em formação de professores proposto por Barbara Jaworski (2003) é aqui discutido pelas suas relações estreitas com os programas de formação de professores e pelos pressupostos que assume. Tomando como certo que "a investigação provoca o desenvolvimento" (p.249), defende a relação entre a investigação no ensino e aprendizagem da matemática na sala de aula e o crescimento do conhecimento dos professores no ensino da matemática, o desenvolvimento da prática de ensino e uma melhor aprendizagem dos alunos. Segundo esta autora, a investigação pode ter várias vertentes: (a) do interior, feita pelos professores visando habitualmente a sua prática de ensino; (b) do exterior, feita mais formalmente por investigadores acerca de questões mais genéricas do ensino ou da aprendizagem, visando a produção de conhecimento; e (c) em comunidades de inquirição (*inquiry*) em que professores, educadores e investigadores colaboram numa perspectiva de aprendizagem comum acerca de problemas de ensino. A inquirição é definida como uma forma de reflexão crítica na qual uma característica fundamental é a acção informada e empenhada. As comunidades de inquirição são um passo em frente em relação às comunidades de prática propostas anteriormente por Lave & Wenger (1991, citados em Jaworski 2003), pois, embora o conhecimento dos professores cresça devido à sua participação e envolvimento numa comunidade de professores dentro de uma escola, há o risco de serem perpetuadas determinadas práticas que não conduzem a melhores aprendizagens dos alunos.

Neste modelo, que pretende servir de guia para questionar a natureza de um programa, consideram-se quatro dimensões: (1) conhecimento e aprendizagem; (2) inquirição e reflexão; (3) investigador do interior e do exterior; e (4) indivíduo e comunidade.

Na primeira dimensão, postula-se uma relação estreita entre o conhecimento e a aprendizagem já que se assume que a premissa fundamental é a de que o desenvolvimento do conhecimento dos professores, a sua aprendizagem acerca do ensino, melhorará o seu ensino tendo como consequência a melhoria da aprendizagem dos alunos. Na segunda dimensão, a inquirição e a reflexão são consideradas duas faces da mesma moeda, já que a inquirição procura recolher conhecimento através da actividade de questionamento, e a reflexão envolve escrutínio crítico de práticas que conduz à acção informada. Na terceira dimensão, as investigações em pequena escala realizadas pelos membros internos, dirigidas para o desenvolvimento das suas práticas, entrelaçam-se nas investigações realizadas em mais larga escala conduzidas por investigadores externos, tendo possivelmente os internos como parceiros significativos e constituindo ambos uma comunidade de investigação. Finalmente, na quarta dimensão, a comunidade fornece estruturas de apoio à inquirição individual e actua como mediadora do conhecimento através da partilha de experiências, de tal modo que o conhecimento cresce tanto no seio da comunidade como em cada indivíduo.

Este modelo, como se pôde constatar, estabelece uma relação muito forte entre a investigação e o desenvolvimento do ensino da matemática.

Fez-se uma retrospectiva de vários programas de formação de professores. Estes programas são de diferentes naturezas, ocorrem em países diversificados e têm resultados muito variados. Mas pode encontrar-se uma característica comum: todos eles dão realce às componentes da formação de professores ligadas ao contexto de sala de aula, à reflexão e à partilha de experiências entre pares e formadores, que são também aspectos muito valorizados pelo programa de formação em que se insere este estudo. Outra perspectiva, dada por último, alerta para os aspectos promissores no campo da ligação da investigação com o desenvolvimento profissional.

Síntese. Do que foi lido, pode elencar-se um conjunto de ideias que se podem condensar na afirmação de Sowder sobre a importância dos professores. Esta autora aponta um conjunto de necessidades dos professores que podem constituir-se em objectivos dos programas de formação e desenvolvimento profissional (Sowder, 2007) e que estão em consonância com as finalidades dos programas anteriormente citados: (a) desenvolver uma visão partilhada sobre o ensino e a aprendizagem da matemática; (b) desenvolver uma compreensão sólida da matemática para o nível ensinado; (c) desenvolver uma compreensão de como os alunos aprendem matemática; (d) desenvolver um conhecimento didáctico profundo; (e) desenvolver a compreensão do papel da equidade na matemática escolar; e (f) desenvolver o sentido de si como professor de matemática.

O primeiro traduz a necessidade de uma linguagem e uma filosofia comum entre os coordenadores dos programas e os professores por eles abrangidos no que respeita ao ensino e aprendizagem. O segundo reconhece a importância e a necessidade duma formação matemática de qualidade para os professores, não adquirida na formação inicial e em temas matemáticos desligados da sua prática profissional mas sobre os temas que efectivamente ensinam, que não sendo triviais são suficientemente desafiadores para os professores, em estreita consonância com Ma (1999). O terceiro apresenta o pensamento dos alunos como uma lente interpretativa da aprendizagem da matemática, da adequação das tarefas e do questionamento que deve ser feito para uma melhor compreensão. O quarto exprime a importância do conhecimento didáctico, alinhado com a definição de Shulman (1986), de obter formas de representar e formular o conhecimento matemático de modo que seja compreensível para os alunos. Em quinto lugar recomenda-se o saber lidar com a diversidade de raça, etnia, língua, estatuto sócio-económico e género, aspirando a uma aprendizagem de qualidade para todos. Em sexto lugar preconiza-se a construção duma identidade profissional que inclua a auto-confiança como professor de matemática, o que muitas vezes esbarra com a ansiedade dos professores dos primeiros anos em relação à disciplina, provocada por falhas na compreensão da matemática que é ensinada.

Também neste domínio da formação de professores, e de modo consistente com os programas de formação descritos, Franke, Carpenter, Levi & Fennema (2001) defendem a aprendizagem *geradora*, que ocorre quando o professor descobre a necessidade de integrar novos conhecimentos com os já existentes e reconsidera continuamente o conhecimento existente à luz do novo conhecimento. Esta é uma característica da aprendizagem com compreensão, que evita a abordagem de novos tópicos como destrezas isoladas que apenas permitiriam resolver problemas abrangidos por esse tópico. Outras características desta aprendizagem com compreensão são a criação de estrutura e conexões no conhecimento de modo a incorporar o novo conhecimento em redes em vez de simplesmente o acrescentar elemento a elemento, e ainda a visão do conhecimento acerca do ensino e da aprendizagem como construído, auto-criado e em contínua mudança. Deste modo, o objectivo dos programas de formação de professores será, mais do que treinar professores para a implementação de novas práticas, levar os professores a verem-se a si próprios como aprendizes, descobrindo práticas de sala de aula que respondam às necessidades dos alunos e avaliando e adaptando continuamente essas práticas.

Componentes dos programas de formação contínua

Do que foi exposto ressalta o papel crucial de três aspectos na formação e desenvolvimento profissional dos professores: a formação no plano científico e didáctico, a supervisão ou acompanhamento na sala de aula e a reflexão, a par com uma atitude de inquirição por parte dos professores. Estas são precisamente as vertentes fundamentais do programa de formação contínua em que se baseia este estudo. Antes de passar a uma análise pormenorizada do referido programa far-se-á uma breve incursão na importância destas vertentes de formação.

A formação científico-didáctica. A preparação dos professores, no domínio do conhecimento matemático, parece ser insatisfatória em todos os níveis de ensino mas com maiores lacunas nos níveis iniciais (Ponte, 2000).

O estudo de Ma (1999) conclui que o conhecimento matemático dos professores se desenvolve num processo cíclico como é apresentado no esquema da Figura 4:

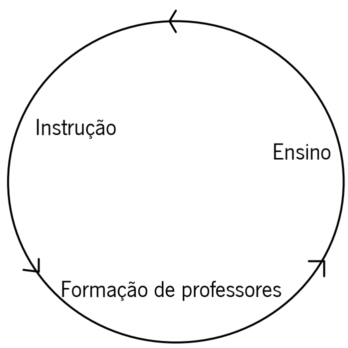


Figura 4. Três períodos nos quais o conhecimento matemático dos professores se desenvolve (Ma, 1999)

O esquema evidencia os três períodos em que o conhecimento da matemática escolar pode ser alargado. Enquanto os professores ainda são estudantes adquirem competência matemática. Durante a sua formação como professores, essa competência matemática começa a relacionar-se com o ensino e a aprendizagem. Por fim, durante a sua carreira, por terem de desenvolver a competência matemática dos seus alunos, desenvolvem o que a autora chama de compreensão profunda da matemática fundamental. Esta é sobretudo desenvolvida, nos professores chineses, nesta última fase, isto é, quando já são professores, o que permite fazer um paralelo com a formação contínua. As vertentes desse processo de formação apresentadas são: a aprendizagem com colegas, o trabalho com os alunos, a resolução de problemas de matemática, o ensino por fases abarcando diversos anos de escolaridade o que permite ficar com uma visão global do ensino básico e o estudo intensivo dos materiais de ensino (um documento oficial que é um plano de ensino e aprendizagem e os manuais escolares, que estão de acordo com esse documento). Pesem embora as diferenças culturais muito marcantes e outros factores, ressalta deste estudo o conhecimento, a execução e o cumprimento do currículo estabelecido bem como o enorme investimento em esforço e persistência dos professores no estudo dos materiais de ensino como factores primordiais para a sua aquisição da compreensão aprofundada da matemática básica. O estudo revela também os perigos de se considerar, tal como é habitual nos EUA, que a matemática elementar é básica, superficial e compreendida por todos. Este mito é desmontado: a matemática elementar não é de modo algum superficial e quem quer que a ensine tem de trabalhar duramente para a compreender. Também nas *Normas Profissionais* (NCTM, 1991) se faz referência a este aspecto, defendendo-se que o conhecimento do conteúdo da matemática escolar pelos professores não está assegurado no fim da sua própria escolaridade e que estes devem ter oportunidades para rever os tópicos da matemática escolar de modo a desenvolver uma compreensão mais profunda das ideias e relações mais subtis existentes entre os conceitos, o que pressupõe igualmente uma visão do currículo e das conexões entre a matemática e outras áreas e dentro da própria matemática.

Numa extensa revisão de literatura de investigação em formação inicial de professores, Ponte & Chapman (2008) tiram algumas conclusões sugeridas pelos estudos analisados. Embora num quadro diferente, algumas dessas conclusões relativas à importância da variedade de abordagens instrucionais parecem poder adequar-se ao caso presente da formação contínua, já que, por um lado, a formação inicial na área da matemática dos professores do 1.º ciclo é de modo geral insuficiente, e por outro, pelo paralelo que se pode estabelecer entre algumas disciplinas da formação inicial e a formação científico-didáctica de professores em serviço. Estes autores apontam a importância das abordagens exploratórias pela oportunidade de discutir, argumentar, conjecturar, testar e validar resultados. Indicam também a necessidade de os professores fazerem matemática com significado, bem como em reflectir, comunicar e discutir as suas ideias matemáticas com os colegas e formadores. Consideram que o foco na matemática escolar deve ser reforçado pelas conexões entre ideias matemáticas e não matemáticas. Também a planificação de tarefas e unidades e a compreensão do pensamento dos alunos são realçados, bem como a autenticidade das actividades, dum duplo ponto de vista: o do desafio matemático e o do trabalho do professor na sala de aula.

Como se vê, mesmo para a formação inicial, em que os formandos não têm responsabilidade directa por grupos de alunos, as recomendações vão no sentido de evitar saberes compartimentados e desligados das práticas. Por maioria de razão, na formação contínua, a aprendizagem cientifico-didáctica deve ser desenvolvida a partir das práticas, aliando os seguintes factores: (a) o envolvimento dos professores no aprofundamento de temas da matemática escolar; (b) a exploração de tarefas do mesmo modo que se prevê que venham a fazê-lo com os seus alunos; (c) o trabalho colaborativo de discussão e reflexão; e (d) a compreensão do pensamento matemático dos alunos.

O conhecimento necessariamente incompleto adquirido enquanto estudantes e na formação inicial de professores aliado ao carácter transitório dos saberes provocado pelas rápidas mudanças da sociedade e a complexificação do trabalho do professor tornam hoje fundamental o processo de formação contínua de professores para dar suporte e profundidade a um percurso apenas iniciado. Esta deve ter como um dos seus pilares o aprofundamento do conhecimento da matemática escolar nos moldes acabados de referir.

A supervisão. Procurando enquadrar os objectivos da supervisão e o seu papel na formação de professores, começa-se expressamente por uma referência ao ensino da matemática. As definições e aspectos que em seguida se apresentam deverão submeter-se a este pressuposto fundamental da necessidade de visibilidade da prática dos professores.

O raciocínio matemático é a base da construção do conhecimento matemático. Ora, como referem Ball et al. (2008):

> Exortar os professores a envolverem os seus alunos em raciocínio matemático é desadequado como apoio à sua prática. Analisar o trabalho de ensino torna a prática instrucional visível e, como tal, potencialmente passível de aprendizagem (p. 41).

Alarcão & Tavares (1987) definem supervisão como "o processo em que um professor, em princípio mais experiente e mais informado, orienta um outro professor ou candidato a professor no seu desenvolvimento humano e profissional" (p.18). Este processo sugere um desenvolvimento dinâmico não só do professor mas também do supervisor e tendo como objectivo último a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos (Amaral, Moreira & Ribeiro, 1996). Discutindo as diferentes formas de que ao longo do tempo se tem revestido a prática da supervisão, Alarcão & Tavares (1987) consideram seis cenários: (a) o cenário da imitação artesã, em que os novos professores praticavam com o mestre que constituía o modelo de autoridade e saber imutável a transmitir de geração em geração; (b) o cenário da aprendizagem por descoberta guiada, baseado no conhecimento teórico dos vários modelos de ensino – passada a fase da consideração do método único – e, se possível, observar vários professores com métodos diferentes, mas assumindo um papel activo na aplicação à prática dos princípios estudados e na inovação pedagógica; (c) o cenário behaviorista, em que se procurava definir as competências de maior utilidade para um professor e fornecer-lhe um programa de técnicas e treino dessas competências, frequentemente apoiado no micro-ensino; (d) o cenário clínico, desenvolvido na Universidade de Harvard no final dos anos 50 por Cogan, Goldhammer e Anderson, que pretendia ir de encontro às dificuldades reais do professor na sua prática, levando o supervisor a assumir o papel de ajudar o professor a analisar e repensar o seu próprio ensino, baseando-se numa lógica de colaboração e sendo, pelas suas características, mais apropriado ao contexto da formação contínua que da formação inicial; (e) o cenário psicopedagógico, que considera a supervisão como uma forma de ensino, baseando-se num corpo de conhecimentos da psicologia do desenvolvimento e da aprendizagem que se vão aprofundando numa relação dialéctica com a observação e a prática; e (f) o cenário pessoalista, em que os programas de formação de professores atendem ao grau de desenvolvimento do professor, às suas percepções, sentimentos e objectivos, levando-o a reflectir sobre as suas experiências, numa perspectiva cognitiva e construtivista que valoriza o auto-conhecimento.

Por seu lado, Glickman et al. (1998) apresentam uma metáfora da supervisão como a *cola* de uma escola de sucesso, definindo escola de sucesso como aquela que atinge os objectivos que se propôs, seja a prioridade dada a fins académicos, criatividade, autonomia na aprendizagem, resolução de problemas, envolvimento na comunidade, cooperação social ou todos em simultâneo. Com efeito, defendem que só as escolas que ligam a instrução e a gestão de sala de aula com o desenvolvimento profissional e a assistência aos professores atingem os seus objectivos. Assim, a cola comum às escolas bem sucedidas é o processo pelo qual uma pessoa ou grupo é responsável por criar uma ligação entre as necessidades individuais dos professores e os objectivos organizacionais de forma que as pessoas possam trabalhar em harmonia tendo como meta a visão do que a escola devia ser, donde a principal função da supervisão é *pôr mais cola* na escola. Esta acepção de supervisão, habitual nos Estados Unidos, está relacionada com os conceitos de liderança, inspecção e controlo do ensino nas escolas. No sentido referido, a supervisão pretende contrariar as normas da escola de uma só sala – o isolamento, os dilemas psicológicos, a rotina, a inadequação da indução dos principiantes, a inversão das responsabilidades dos principiantes, a falta de patamares na carreira e a falta de partilha de cultura técnica. Estes autores definem várias formas diferentes de assistência directa aos professores, sendo as mais importantes a supervisão clínica e o acompanhamento por pares (peer-coaching). A supervisão clínica é um conceito com várias características, tais como: uma tecnologia para desenvolver o ensino, uma intervenção deliberada no processo instrucional, combina necessidades da escola com necessidades de crescimento pessoal, assume uma relação de trabalho ente o supervisor e o professor, exige confiança mútua, é sistemática, cria uma tensão produtiva ao fazer a ponte entre as intenções e a realidade, assume conhecimentos do supervisor acerca de análise de ensino e aprendizagem e requer formação de supervisores. A estrutura da supervisão clínica comporta cinco passos, segundo Goldhammer e colaboradores (Goldhammer, Anderson & Krajewski, 1993, citados em Glickman et al. 1998): (1) Encontro pré-observação com o professor, em que o supervisor se senta com o professor e determina o propósito, o foco, o método e o tempo da observação; (2) Observação, em que o supervisor pode usar métodos de recolha de dados variados e ter em mente a diferença entre descrições e interpretações; (3) Análise e interpretação da observação, em que o supervisor, sozinho, estuda a informação recolhida, identifica as principais ocorrências e procura padrões, faz interpretações e determina a abordagem do novo encontro; (4) Encontro pós-observação com o professor, onde é discutida a análise da observação e é produzido um plano para aperfeiçoamento do processo instrucional; e (5) Crítica dos quatro primeiros passos em que se analisam os métodos utilizados e se procede a reformulações quando necessário. O acompanhamento por pares é feito com fins formativos; é dado *feedback* por colegas para aperfeiçoamento de métodos de ensino, e ocorre essencialmente quando o supervisor não tem tempo para prestar a assistência necessária a todos os professores. Outras formas consistem em ensino por demonstração, quer por parte do supervisor como visitante da aula do professor quer por visita do professor a uma aula de um professor mais experiente; co-ensino; acompanhamento por meio de recursos e materiais; acompanhamento na avaliação dos alunos; e resolução de problemas em diálogo com o professor.

Bergen, Engelen & Derksen (2006) desenvolveram um programa de formação contínua para professores do ensino secundário baseado num sistema de ensino por activação, que se situa a meio caminho entre dois extremos: o exclusivamente centrado no professor e o exclusivamente centrado no aluno. Neste programa, os professores são ajudados a assumir um papel que deve levar os alunos a usar determinadas actividades de uma forma especificada de modo a promover uma aprendizagem independente, designadamente: (a) orientação dos alunos para o conteúdo da aula e os processos de aprendizagem; (b) demonstração de novos conteúdos e prática guiada; (c) instruções claras para tarefas individuais ou em pequenos grupos; e (d) orientação do trabalho independente dos alunos. Este programa é baseado na prática, localizado, incorporado no trabalho, guiado teoricamente e avaliado de modo formativo. Para além disso, baseia-se no acompanhamento por pares. O professor formador observa o colega na sala de aula durante três semanas. Depois desse período, diagnosticam em reunião conjunta o comportamento do professor e elaboram um plano de mudança no sentido de estimular e activar a aprendizagem independente dos alunos. Durante as 15 semanas seguintes o professor põe o plano em prática, sempre acompanhado do formador que vai dando *feedback* em reuniões semanais de 50 minutos. São sempre possíveis ajustamentos ao plano. Para além destas acções os professores acompanhados participam em seis encontros de grupo onde trocam experiências, discutem teorias psicológicas recentes de ensino e aprendizagem, recebem *feedback* e falam de modos de pôr em prática os princípios do ensino por activação. Os resultados não foram totalmente positivos e indicam que os formadores poderiam ter criado um ambiente de aprendizagem mais poderoso para os seus colegas se eles próprios tivessem tido apoio durante o programa. Este estudo aponta assim para a dificuldade da mudança de formas de ensino e para a necessidade de um apoio de qualidade fornecido por professores experientes em funções de supervisão.

A reflexão. A reflexão sobre a prática tem vindo a ser apontada como facilitadora de uma prática mais responsável e mais bem sucedida (Schön, 1983, 1995; Zeichner, 1995; Alarcão, 1996; Serrazina, 1998; 2002; Sowder, 2007). O professor identificado como *prático reflexivo* é uma ideia defendida por Schön e retomada por inúmeros teóricos do ensino, embora o requisito do pensamento reflexivo no professor tenha uma origem mais antiga e remonte às ideias do filósofo americano John Dewey (1859-1952).

Dentro das várias etapas reflexivas, Schön distingue reflexão na acção, reflexão sobre a acção e reflexão acerca da reflexão na acção. A primeira ocorre em simultâneo com a prática, exigindo ao professor a capacidade de prestar atenção ao aluno, e a segunda acontece quer antes quer depois, quando se faz um balanço da prática com vista à sua reformulação em termos futuros. Quanto ao terceiro, tem um cariz que não é imediatista como os anteriores mas mais abrangente, permitindo ao professor, ao olhar retrospectivamente a sua acção, atribuir outros significados aos acontecimentos e às suas acções desenvolvendo novas formas de pensar e de agir (Schön, 1995). Normalmente envolve a investigação sobre questões de natureza ética ou política. A primeira implantou-se por constatação das limitações da visão do professor como técnico que aplica determinada teoria previamente estudada que alegadamente permite resolver os problemas do ensino (Pérez, 1995); no entanto, tem sido objecto de várias críticas na medida em que, visando a solução rápida de problemas imediatos, pode reforçar a noção do professor como artesão contrariando a ideia do profissionalismo docente (Day, 2001).

Hodgen (2003), considerando fulcral a mudança significativa no desenvolvimento profissional dos professores, define reflexão como "a reconstrução da experiência e do conhecimento" (p.1). Mas, na verdade, o professor tem de percepcionar a necessidade da mudança como resposta a um problema. A investigação da prática, por si próprio ou por outros, e a sua confrontação, é um processo de risco para a auto-estima. As circunstâncias adversas, internas e externas, podem dificultar os esforços de mudança (Day, 2001). Na mesma linha, Perrenoud (2001) refere-se à prática reflexiva como um dos mecanismos susceptíveis de favorecer a tomada de consciência e as transformações do *habitus*, constituído pelos nossos esquemas de percepção, de avaliação, de pensamento e de acção. Havendo adaptação, há uma diferenciação e coordenação dos esquemas[6] existentes, que estabilizam e criam novos esquemas. Nesse momento o *habitus* é enriquecido e diversificado. No entanto, o autor afirma que a prática reflexiva (que pode tomar outras designações conforme os autores, tal como conhecimento na acção, consciência de si, metacognição, epistemologia da acção, lucidez) apenas se torna alavanca de formação se o funcionamento reflexivo for valorizado, padronizado e instrumentalizado. De facto, a possibilidade de mudança depende em grande medida da atitude do formador, da sua capacidade para estabelecer um diálogo bilateral, abrindo uma porta ao reconhecer as suas próprias limitações.

> Trabalhar sobre o seu *habitus* não é confortável. É aceitar ser confrontado com aquela parte do eu que se conhece menos e que se preferia que não emergisse. Quem pode assumir esse risco se não vê proveito nisso, se essa conduta não é tematizada, encorajada, mostrada, se ele se sente só com sua lucidez, como um imbecil em um mundo em que cada um afirma suas certezas? (Perrenoud, 2001, p.184).

Há ainda outras condicionantes do aprofundamento da reflexão. Alarcão (1996) coloca a questão da relação entre a reflexão e o conhecimento, sendo este conhecimento gerado pela reflexão e o que simultaneamente a sustenta. Questionando os conhecimentos necessários na passagem do saber ao saber-fazer, reconhece que essa transferência não é simples por não desenvolver as capacidades necessárias para agir em situações de incerteza. Quando a resposta é obtida pelo professor, produz um novo saber que é consolidado pela reflexão. No entanto, o novo saber só pode produzir-se, a reflexão só acontece, se o sujeito tiver uma base de conhecimentos sobre os quais reflectir. Como afirma Serrazina (2002), "A reflexão pode abrir novas possibilidades para a acção e pode conduzir a melhoramentos naquilo que se faz" (p.39). No entanto, esta capacidade de reflexão do professor não é habitualmente algo pré-existente e vai evoluindo, sendo simultaneamente causa e consequência do desenvolvimento profissional. A mesma autora relata, sobre um estudo que desenvolveu com professoras do 1.º ciclo, que a capacidade de reflexão dessas professoras evoluiu e se aprofundou com o aumento da auto-confiança, tendo este sido provocado pelo aprofundamento dos seus conhecimentos de matemática. Este resultado é particularmente interessante e pertinente para o presente estudo.

---

[6] A noção de esquema remonta a Piaget e representa aquilo que permanece invariante nas diversas repetições duma acção.

Amigos críticos. Uma estratégia que pode ser útil para produzir níveis de reflexão mais profundos é o encorajamento de amizades críticas. A partilha de ideias e da prática, bem como de medos, expectativas e outros sentimentos, com um ou mais colegas, permite reduzir o isolamento dos professores e desenvolver processos de mudança. Algumas das características que as amizades críticas devem possuir são, segundo Day (2001), as seguintes: (a) vontade de partilhar; (b) reconhecimento de que a partilha envolve abertura e feedback; (c) reconhecimento de que a abertura e o feedback implicam considerar a possibilidade de mudança; (d) reconhecimento de que a mudança pode ser ameaçadora, difícil, emocionalmente exigente; e (e) reconhecimento de que os factores anteriores podem, assim, limitar o grau de predisposição das pessoas para partilhar. Embora a opção de amigo crítico possa ser um colega de escola ou alguém de fora (por exemplo um docente de uma instituição de ensino superior) Day (1993) aconselha a partilha com um igual afastado de modo a evitar interpretações de auto-acusação no pedido de ajuda, evitar a competição e comparações, estar mais à-vontade e poder apropriar-se das ideias.

Portefólios. Fernandes (2005) apresenta o portefólio como uma estratégia que permite a organização da avaliação formativa alternativa, conceito que o autor define como uma avaliação orientada para melhorar as aprendizagens mais do que com intuitos classificativos, plenamente integrada no ensino e na aprendizagem, contextualizada e interactiva, já que os alunos têm nela um papel de relevo. Neste sentido, um portefólio não é uma pasta com todos os trabalhos dos alunos mas sim uma amostra do que eles sabem e são capazes de fazer, revelando uma imagem das aprendizagens desenvolvidas ao longo de um dado período de tempo, bem como das suas dificuldades e progressos. Algumas das vantagens desta abordagem são contextualizar a avaliação por esta não surgir desligada da situação de aprendizagem, melhorar a auto-estima dos alunos por terem oportunidade de mostrar aquilo que são capazes de fazer e proporcionar a reflexão sobre o próprio trabalho.

Embora estas ideias tenham por pano de fundo a avaliação das aprendizagens dos alunos, elas também podem aplicar-se a contextos de formação de professores. Com efeito, tem vindo a ganhar cada vez mais realce o uso de portefólios como estratégia de formação pelo seu papel no processo de reflexão dos participantes (Sá-Chaves, 2000). De facto, não só promovem a reflexão a nível cognitivo e meta-cognitivo, como garantem mecanismos de aprofundamento conceptual, estimulam a originalidade e a criatividade, contribuem para a construção personalizada do conhecimento de forma estruturada e organizada e facilitam a auto e a hetero-avaliação. A elaboração de portefólio é um processo que facilita o auto-reconhecimento e, através dele, a auto-formação, mas também, depois de acabado, permite fazer um balanço de aprendizagens ou de competências que pode constituir-se como condição de novos tipos de reconhecimento. Deste modo, torna-se fundamental definir à partida os objectivos do portefólio, pois irão condicionar o seu modelo de organização, a natureza dos recursos e dos registos a incluir e a reflexão que venha a ser feita. Robin (1980, citada em Sá-Chaves, 2000) apresenta três tipos de reconhecimento que pressupõem objectivos distintos: o reconhecimento pessoal, o institucional e o profissional. A elaboração de portefólios permite abranger todos eles. O reconhecimento pessoal na tomada de consciência dos saberes e capacidades, na valorização de actividades desenvolvidas, na auto-avaliação, na elaboração de projectos de formação, de vida e de acção; o reconhecimento institucional por ser um instrumento que possibilita a obtenção de equivalências, unidades de crédito e certificação de cursos; e o reconhecimento profissional pois é facilitador de processos de orientação profissional e de inserção no mercado de trabalho, bem como de gestão de carreiras e/ou de processos de candidatura.

No que respeita à elaboração de portefólio no desenvolvimento profissional de professores, e de acordo com Santos (2006), a estrutura do portefólio deve ser negociada à partida, mas fundamentada nos objectivos da formação, garantindo uma diversidade de trabalhos como planificações de aulas, resolução de tarefas, análise de textos, narrativas de situações vividas, comentários de outros intervenientes. Os trabalhos a incluir devem ser seleccionados pelo próprio e datados para permitir reconhecer a evolução, devem ser sempre acompanhados de reflexões e deve ser dada ao formando a possibilidade de aperfeiçoamentos. Para cumprir este último aspecto deve ser dado *feedback* pelo formador e por outros formandos. As potencialidades da elaboração do portefólio são, de acordo com esta autora, a flexibilidade, a valorização pessoal, a continuidade, o carácter global, o carácter dialógico, a visibilidade e o facto de favorecer a reflexão e a metacognição. Alguns constrangimentos apontados são o tempo consumido, a ausência de escalas de classificação normalizadas, a insegurança dos que o realizam pela primeira vez e as dificuldades de desenvolver um acompanhamento adequado.

Em qualquer das utilizações, o portefólio baseia-se sempre numa abordagem biográfica que pressupõe a recolha e registo selectivo de dados proporcionando a ligação entre o pensamento e a acção e a reflexão sobre as experiências vividas.

Formação contínua em Matemática em Portugal

Em Portugal a formação contínua em matemática nunca teve grande dimensão a nível nacional; no entanto referem-se três programas de relevo que ocorreram nas últimas décadas.

Deve referir-se sumariamente o programa de formação contínua de professores do ensino secundário em Portugal que teve lugar a partir do ano de 1997/98 e que se prolongou por aproximadamente cinco anos, já que foi um projecto inovador no nosso país e em que a investigadora esteve activamente envolvida como acompanhante local. O programa foi lançado pelo Ministério da Educação como apoio ao ajustamento do programa de Matemática do ensino secundário que entrou em vigor nesse mesmo ano lectivo de 1997/98. A Comissão de Acompanhamento tinha um núcleo central formado pelos autores do programa ajustado e foram recrutados cerca de oitenta professores de Matemática do ensino secundário de todos os distritos. Estes tiveram formação intensa e especializada e tinham como missão fundamental o acompanhamento local, no seu distrito, dos professores de Matemática do ensino secundário com vista à aplicação do programa ajustado. Estas medidas foram complementadas, por parte da tutela, com a produção de textos de apoio - brochuras abrangendo os vários temas curriculares da matemática do ensino secundário (numa perspectiva científica e didáctica) e temas de didáctica geral e projectos educativos. Os acompanhantes locais eram professores no activo, vivendo assim, ao mesmo tempo que os seus colegas, os problemas da leccionação e gestão do programa ajustado, e cabendo-lhes promover reuniões de professores na sua escola e noutras escolas do distrito para estudo e análise do programa, planificação de aulas com utilização de novas metodologias, debate de ideias e reflexão sobre experiências de ensino/aprendizagem. Estas reuniões eram de participação voluntária. O programa teve como principais efeitos: (a) um maior conhecimento do programa ajustado por parte dos professores por efeito da sua leitura e reflexão sistemática nas reuniões de acompanhamento; (b) hábitos de análise crítica dos manuais escolares por parte dos professores; (c) a concretização de actividades de remediação para os alunos; (d) a popularização do uso das calculadoras gráficas; (e) a criação de laboratórios de matemática nas escolas contendo recursos necessários à experimentação e realização de actividades e projectos da matemática (Fevereiro e Belchior, 1999).

Foi realizado, neste âmbito, um estudo de avaliação pelo Instituto de Inovação Educacional cujos resultados, sintetizados por Amaro (2000), são do seguinte teor:

> O ensino da matemática aparece enquadrado por tarefas com potencial para desenvolver a generalidade das competências e atitudes enunciadas no plano de apoio e para permitir a intervenção dos alunos na sua aprendizagem, recorre tanto a situações da vida real como a situações da própria matemática, integra a utilização sistemática das calculadoras gráficas e a avaliação das aprendizagens contempla, para além dos testes, relatórios e composições. A execução do programa, no entanto, ainda não conseguiu a abordagem equilibrada dos temas face ao número de horas lectivas propostas. A concretização das condições de implementação foi conseguida sendo ainda desejável: o reforço do papel dos departamentos curriculares/grupos disciplinares na gestão das orientações programáticas, o desenvolvimento de práticas de trabalho cooperativo entre os professores que possibilitem a partilha de recursos científicos, pedagógicos e materiais em suportes diversos e a discussão de experiências vividas. (Amaro, 2000, p. 1).

Vemos assim que este programa inovador teve resultados pelo menos em parte positivos que se repercutiram nas práticas de ensino de professores de matemática do ensino secundário.

Especificamente para professores do primeiro ciclo, na altura professores do ensino primário, foi implementado em 1978 um projecto de investigação pedagógica denominado Ensinar é Investigar. Os seus fundamentos recebem a influência das teorias de Piaget e Bruner, e, na área da Matemática, das tendências estruturalistas da “matemática moderna” dominantes na época (Ponte et al., 1998). No entanto, e dado o seu tempo de permanência no terreno, o currículo experimental que é concretizado em algumas turmas começa a destacar o papel e a importância da resolução de problemas, aliada ao uso de materiais, a várias formas de representação e ao desenvolvimento de estratégias próprias pelos alunos. Este projecto teve resultados positivos em termos do desempenho dos alunos participantes ao nível da autonomia e da resolução de problemas.

Também no âmbito do Programa Interministerial de Promoção do Sucesso Escolar (PIPSE), aprovado por resolução do Conselho de Ministros de 10/12/87, e que tinha como objectivo reduzir a taxa de insucesso e apoiar a reforma da escolaridade obrigatória de 9 anos que se iniciou com as crianças que entraram em 1988 no 1.º ano, foram feitas algumas acções de formação em matemática para professores do 1.º ciclo, mas dentro dos moldes tradicionais, em que os professores se limitavam a ouvir e interagir com o formador.

A partir daí, e durante sensivelmente quinze anos, a formação contínua de professores deixou de ser da responsabilidade directa do Ministério da Educação tendo transitado para os centros de formação de associações de escolas e de associações de professores. Esta ocorria muitas vezes em temáticas completamente divorciadas dos reais interesses de formação dos professores que as frequentavam, sendo o seu principal objectivo a obtenção de créditos para progressão na carreira, e como tal teve pouco impacto na mudança das práticas dos professores.

Para além dos programas de âmbito nacional já referidos, tem havido ao longo dos anos vários programas e dispositivos de formação de professores, integrados sobretudo em estudos de investigação, que têm proporcionado um debate sobre perspectivas diferentes em relação à definição das necessidades de formação dos professores, Estas perspectivas, apontadas por Ponte et al. (1998), são o modelo escolar e o desenvolvimento profissional. No primeiro os objectivos da formação são definidos pelo formador. No segundo, os objectivos e as acções são da responsabilidade do professor ou do grupo de professores que trabalha colaborativamente no mesmo projecto. Ambos têm problemas de concepção e concretização. Os primeiros não implicam profundamente os formandos no processo de formação, que surge como uma imposição do exterior; nos segundos, a responsabilidade do formando pela definição de objectivos pode tornar-se penosa, resultar em objectivos irrealizáveis ou nem se chegar a concretizar. Alguns programas têm também apostado num estilo prático de resolução de tarefas nas sessões de formação, que são de modo geral muito valorizados pelos formandos, que se entusiasmam e envolvem activamente. A questão é como estender essa dinâmica à prática de sala de aula. Tem sido também difícil encontrar o lugar da teoria nestas sessões. Os autores concluem que os estudos feitos em Portugal nos últimos anos mostram que é possível pôr em prática programas de formação que estimulem o envolvimento profissional dos professores. Na formação contínua, os professores devem pelo menos co-responsabilizar-se pela sua formação. Nos programas mais formais, a dinâmica das sessões terá de se estender à prática quotidiana e promover a articulação entre teoria e prática, compatibilizando as perspectivas e interesses de formandos e formadores. Terá de haver também uma forte relação cooperativa entre os participantes e entre estes e o formador, para além de recursos adequados e da legitimação institucional.

A partir de 2005, surge o Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º ciclo do Ensino Básico, de características inovadoras e aliando todas as recomendações citadas, cuja descrição pormenorizada é feita no Capítulo 6.

Síntese

A formação contínua de professores é reconhecida universalmente como uma necessidade, já que a formação inicial não pode prover o futuro professor de todos os conhecimentos úteis à sua profissão, por dois motivos: (a) o tempo de formação é demasiado curto para uma abordagem de todos os tópicos pertinentes; e (b) nem tudo se pode aprender na formação inicial, já que há uma parte substancial do conhecimento do professor que só pode ser adquirida na prática e como consequência da prática.

Para além de ser uma necessidade, a formação contínua, integrada no desenvolvimento profissional dos professores, é neste momento equacionada como uma prioridade absoluta, já que numerosos estudos de investigação atestam que há uma relação entre a formação de professores e a mudança das suas práticas e consequente melhoria das aprendizagens dos alunos.

Nos últimos quinze anos começa a assistir-se a uma mudança de vulto na organização destes programas de formação que até aí eram centrados em cursos ou sessões de formação em que o formador ensinava teorias e técnicas. O paradigma emergente valoriza o desenvolvimento de capacidades dos professores, incluindo a componente do conhecimento de conteúdo, mas baseado nas práticas de sala de aula e na importância dada ao pensamento dos seus alunos e à reflexão sobre a prática feita em interacção com outros. São estes também os princípios do programa nacional de formação contínua em que se integra este estudo e cuja especificação se fará num próximo capítulo.

Esta mudança de paradigma da formação inclui a aceitação do professor como um ser humano que é sujeito pensante e crítico e não o objecto dum programa de formação, ou seja, o professor deve ser encarado não como o receptáculo da formação mas sim como colaborador no desenho dessa mesma formação. Assume neste sentido particular importância a componente da reflexão como facilitadora de uma melhor prática mas também condicionada por vários factores sociológicos e passível de aprofundamento através da evolução do conhecimento (Alarcão, 1996; Serrazina, 2002). A reflexão pode gerar-se em diferentes contextos como sejam a elaboração de portefólios e a interacção com pares sob a forma de amigos críticos. A completar esta ideia é importante também salientar uma vertente da formação contínua que coloca o professor como investigador ou pelo menos inquiridor da sua prática (Cooney & Krainer, 1996; Jaworski, 2003), identificando problemas, reconhecendo limitações, gerando alternativas, implementando-as, observando o seu impacto e decidindo quais parecem ser melhores.

Uma aula que não dá aos alunos a oportunidade de generalizar
não é uma aula de matemática.
John Mason

Capítulo 4

ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Este capítulo está estruturado em duas partes distintas. Na primeira começa por fazer-se um breve percurso pelas principais teorias de aprendizagem, centrando-se de seguida o trabalho na aprendizagem da matemática, para o que se procede à discussão de aspectos centrais que podem influenciar o ensino e a aprendizagem desta disciplina, tais como as relações entre as tarefas, a actividade dos alunos e o papel do professor, bem como aspectos ligados à comunicação em sala de aula. Na segunda parte o trabalho incidirá na análise e implicações do ensino e aprendizagem de um tema particular da matemática, o pensamento algébrico, já que foi o escolhido para ancorar as experiências de ensino e aprendizagem dos participantes na segunda parte do estudo empírico.

Breve incursão nas teorias de aprendizagem

A asserção de Roldão "ensinar é fazer aprender alguma coisa a alguém" (Roldão, 2005, p.16) suscita algumas questões. O que é aprender? Como se aprende? Quais os limites da aprendizagem? Qual é o lugar da compreensão? A Psicologia procura dar respostas às questões sobre o modo como a aprendizagem é definida, estudada e compreendida. Nesse sentido, far-se-á de seguida uma breve revisão dos principais modelos de aprendizagem e das controvérsias que os dividem, realçando os dois maiores campos: as teorias positivistas, onde prevalecem o meio ou de factores inatos por um lado, e o construtivismo nas vertentes cognitiva, sociocultural e interaccionismo simbólico por outro. Não se pretende, naturalmente, fazer uma abordagem exaustiva de todas as teorias de aprendizagem mas tão-só fazer notar alguns aspectos de algumas das que constituem um marco nas tendências recentes da educação e, simultaneamente, procurar uma fundamentação para este trabalho.

O behaviorismo

Esta teoria considera a aprendizagem um sistema de respostas comportamentais a estímulos observáveis e teve uma influência determinante entre os anos trinta e os anos sessenta do século passado, sendo Skinner o seu mais representativo defensor. A sua teoria do comportamento está ligada ao meio exterior, já que é este que causa as mudanças no comportamento, uma vez que as consequências da resposta influenciam a acção futura e estas consequências ocorrem no meio exterior (Sprinthall & Sprinthall, 1999). Assim, tudo o que a pessoa faz é resultado dum conjunto de reforços e punições a que foi sujeita. Neste sentido, a aprendizagem é condicionada pelo estabelecimento de uma associação entre o estímulo e a resposta, em que se privilegia o comportamento observável. De facto, os behavioristas, por crerem que todo o comportamento é consequência de condicionamento, geralmente rejeitam a ideia de habilidades inatas aos organismos. A ideia central do behaviorismo decorre da sua concepção do ser humano como uma página em branco moldada pelo meio e pela educação. A educação converte-se, portanto, numa tecnologia para programar reforços no momento oportuno (Pérez, 1992). Os educadores que defendem esta teoria planificam antecipadamente uma determinada área de conteúdo em componentes, organizando-as numa hierarquia que vai do mais simples ao mais complexo. Deste modo, o currículo fica espartilhado em secções bem estruturadas e o professor explica com clareza e determina o modo como irá motivar, reforçar e testar o aluno. Esta testagem é feita para avaliar o progresso do aluno através da medição de resultados observáveis – comportamentos em tarefas pré-determinadas (Fosnot, 1999). Assume-se, em síntese, que o todo pode ser segmentado em partes, cada uma das quais corresponde a uma aptidão e se a perfeição for atingida em cada uma delas então o conceito foi ensinado. O ensino programado, muito em voga nos Estados Unidos nos anos sessenta e setenta, assenta nesta teoria de aprendizagem. Algumas das vantagens que esta teoria apresenta são: (a) o aluno tem de estar atento pois é exigida uma resposta para o programa avançar; (b) cada aluno pode trabalhar no seu próprio ritmo. O que demora uma hora a um pode demorar duas horas a outro; (c) o reforço e o *feedback* são imediatos. Não existem lapsos de tempo entre a resposta e o conhecimento do resultado; e (d) o reforço é sempre positivo, não havendo gritos nem ameaças. No entanto, este tipo de programas só permite aprendizagens de nível cognitivo baixo e além disso gera aborrecimento nos alunos por haver muita insistência e repetição nas questões. Por outro lado, os sujeitos em situação de aprendizagem não agem como resposta cega a estímulos. A sua actividade não é vazia de sentido. Embora a teoria behaviorista possa explicar de forma correcta algumas alterações comportamentais, não explica no entanto a mudança conceptual. Foi-se assim descobrindo progressivamente a necessidade de atribuir um lugar à representação mental e à compreensão da situação (Berbaum, 1993). Em conclusão, apesar de haver já poucas escolas que seguem rigidamente este quadro conceptual, muitas das práticas tradicionais que ainda prevalecem têm nela a sua origem.

O maturacionismo

Esta teoria, ao contrário da anterior, apresenta o conhecimento conceptual como dependente do estádio de desenvolvimento do aluno. Neste sentido, é a maturação biológica que implica as estruturas cognitivas que vão interpretar a experiência e dar origem à construção do significado (Fosnot, 1999), pois o cérebro contém estruturas inatas que determinam o modo como o sujeito organiza o mundo e as aprendizagens. Nesta perspectiva, o papel do educador é muito pouco importante já que apenas consiste em preparar um ambiente enriquecido e adequado do ponto de vista do desenvolvimento e os alunos são avaliados em função de marcos de desenvolvimento tais como, por exemplo, actividades de conservação. Para Gesell (1880-1961), um dos seus defensores, os comportamentos sucedem-se numa ordem inalterável, obedecendo a um programa genético em que desenvolvimento e maturação estão pré-determinados. A teoria de Piaget dos estádios de desenvolvimento, quando aplicada à educação, foi inicialmente interpretada erradamente como sendo uma teoria maturacionista.

O construtivismo

Às teorias positivistas[7] anteriores opõe-se esta teoria não positivista. No behaviorismo, os conhecimentos são adquiridos por estímulos do ambiente; no maturacionismo, os conhecimentos são inatos. O construtivismo propõe um novo modelo explicativo: o sujeito constrói os seus conhecimentos pelas suas próprias acções. Em lugar de comportamentos ou aptidões como meta da instrução, são aqui realçados o desenvolvimento do conceito e a compreensão aprofundada. Esta teoria tem a sua origem nos últimos trabalhos da primeira fase de Piaget, nas obras de Vygotsky e nos trabalhos de Bruner e outros. Fosnot (1999) apresenta alguns princípios gerais da aprendizagem derivados do construtivismo que podem ser úteis aos professores na gestão da sua prática educativa: (a) A aprendizagem não resulta do desenvolvimento mas é, ela própria, desenvolvimento, exigindo invenção e auto-organização por parte do aluno. Deste modo, os professores devem proporcionar aos alunos espaços para colocarem as suas questões, formularem hipóteses e testarem a sua viabilidade; (b) O desequilíbrio é condição de aprendizagem. Assim, os erros não devem ser evitados ou contornados. Os alunos têm de realizar investigações que permitam um grande número de possibilidades tanto afirmativas como contraditórias. Estas últimas têm de ser esclarecidas, exploradas e discutidas; (c) A abstracção reflexiva é a força impulsionadora da aprendizagem. A reflexão deve ser estimulada nos alunos e pode ser realizada através da escrita, da representação multi-simbólica e da discussão das conexões entre as experiências ou estratégias usadas; (d) O diálogo gera um pensamento posterior. A sala de aula deve assim ser considerada uma comunidade de conversação e debate em que os alunos são responsáveis por comunicar, explicar, defender e provar as suas ideias à turma, mas estas só serão aceites se fizerem sentido para a comunidade; e (e) A aprendizagem progride em relação ao desenvolvimento de estruturas. À medida que os alunos se esforçam por criar significado vão construindo «grandes ideias» - princípios organizados pelos alunos que vão sendo generalizados através de experiências e que vão progressivamente sofrendo eliminação ou reorganização de conceitos anteriores.

---

[7] Teoria associada a Auguste Comte que considera que o conhecimento só pode ser adquirido através da observação e da experiência (Academia das Ciências de Lisboa, 2001).

A psicologia cognitiva de Piaget. Piaget definiu vários conceitos-chave. O esquema é uma acção fundamental do conhecimento, que pode ser física (visão, sucção) ou mental (comparação, classificação). A *assimilação* de novos conhecimentos nas estruturas anteriores e a *acomodação* das estruturas mentais em função das situações novas produzem a *adaptação*, ou seja, a modificação dos comportamentos. As estruturas mentais, os esquemas, vão-se tornando mais complexos devido ao efeito combinado da assimilação e da acomodação e a inteligência constrói-se pela *equilibração* entre esses dois processos, provocando a auto-estruturação do sujeito. Este não é um processo sequencial de assimilação, seguido de conflito e depois de acomodação. É antes uma dinâmica de equilíbrios progressivos, adaptação e organização, crescimento e mudança. Em pontos sucessivos desta equilibração em espiral os alunos constroem contradições às suas acções e ideias. Estas contradições causam o desequilíbrio e motivam assim uma acomodação. Nas palavras de Piaget: "No acto de conhecimento, o sujeito está activo e, consequentemente, em face de um conflito externo, ele reagirá com vista a compensar e consequentemente tenderá para o equilíbrio" (Piaget, 1982, p.281).

O processo de crescimento é caracterizado pela formação de estruturas, que são sistemas mentais cognitivos com leis de transformação que se aplicam ao sistema como um todo e não apenas aos seus elementos. As partes são indissociáveis não possuindo significado por si mesmas. Este é adquirido apenas em função do todo e pelas relações entre as partes. Estas estruturas encontram exemplos em conceitos matemáticos como o de números inteiros. Por exemplo, o número 5 não tem significado senão associado a outros, como 1+4 ou 7-2. Além disso, as estruturas revelam padrões de organização, como a ordenação, a classificação, o estabelecimento de correspondências e de relações. Este pensador realça ainda a noção de actividade em toda a aprendizagem, em contraponto à psicologia do estímulo-resposta:

> Todos os meus comentários hoje representam a criança e o sujeito da aprendizagem como activos. Uma operação é uma actividade. A aprendizagem só é possível quando há uma assimilação activa. É esta actividade da parte do sujeito que parece ser negligenciada no esquema de estímulo-resposta (Piaget, 1982, p.285).

A psicologia sócio-histórica de Vygotsky. A dialéctica entre o indivíduo e a sociedade e, consequentemente, o efeito da interacção social, da linguagem e da cultura na aprendizagem tornaram-se o fulcro do trabalho de Vygotsky, que é um dos representantes mais significativos da escola soviética, que se desenvolveu ao longo de todo o século XX à luz do materialismo dialéctico. Tal como Piaget, Vygotsky defende que a aprendizagem é susceptível de desenvolvimento, mas distingue entre *conceitos espontâneos* e *conceitos científicos*. Os conceitos espontâneos, do tipo estudado por Piaget, são definidos por este autor como pseudo-conceitos, que a criança desenvolve no processo de construção. Os conceitos científicos são os decorrentes da instrução na sala de aula e conduzem a abstracções mais formais e mais logicamente definidas do que os que são construídos espontaneamente (Fosnot, 1999). Com base nestas definições este pensador procurou saber que factores podem facilitar a aprendizagem conduzindo a criança dos conceitos espontâneos para os científicos. Em resposta construiu o conceito de *zona de desenvolvimento proximal* para descrever o local onde os conceitos espontâneos da criança se encontram com o raciocínio adulto, mais sistemático e mais lógico.

> [...] a zona de desenvolvimento proximal. Ela é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (Vygotsky, 2000, p.112).

Este é precisamente o eixo da relação dialéctica entre aprendizagem e desenvolvimento. É aqui que esta teoria diverge da teoria genética de Piaget, já que considera que a aprendizagem é que gera uma área de desenvolvimento potencial, e portanto a aprendizagem precede o desenvolvimento. Assim, deve haver intervenções precisas de aprendizagem guiadas intencionalmente (Pérez, 1992). Vygotsky postulou a capacidade potencial de cada um para se desenvolver com o apoio de uma pessoa mais conhecedora. O autor considera que, enquanto os conceitos espontâneos têm um percurso descendente, impondo a lógica à criança, os conceitos científicos têm um percurso ascendente, permitindo ao aluno aceitar a sua lógica. A capacidade das crianças para apreender o pensamento adulto é variável e, por esse facto, Vygotsky considera necessária a colaboração de um adulto ou alguém mais conhecedor para facilitar o acesso aos conceitos científicos, em vez de proporcionar tarefas escolares valorizando apenas a capacidade de resolução da criança. O autor considera que o professor pode estimular o desenvolvimento do aluno trabalhando na zona de desenvolvimento proximal, ou seja, o professor não deve fornecer ao aluno apenas tarefas que ele possa resolver por si, mas mais difíceis, que só possam ser resolvidas com algum apoio; deste modo a instrução estimula capacidades que estão em estado embrionário e o desenvolvimento (Crain, 1992). No entanto, Crain considera que este apoio do professor pode ter perigos visto que faz saltar etapas e mina a independência da criança. Vygotsky valorizou também o diálogo com os adultos e os pares, contrariamente a Piaget, que se interessou essencialmente pela componente individual e interna da aprendizagem. De qualquer modo é necessário referir que, para a escola soviética, não são tanto a actividade e a coordenação das acções do indivíduo as responsáveis pelas estruturas formais da mente, mas a *apropriação da bagagem cultural* produto da evolução histórica da humanidade que se transmite na relação educativa (Pérez, 1992). Vygotsky (2000) afirma: "O aprendizado humano pressupõe uma natureza social específica e um processo através do qual as crianças penetram na vida intelectual daquelas que as cercam" (p.115).

Em suma, a abordagem de Vygotsky conduz à consideração do ensino e da aprendizagem como uma actividade unificada (Sierpinska & Lerman, 1996).

A teoria do *andaime* de Bruner. Um aspecto que diferencia a teoria de Bruner da teoria de Piaget é a sua não adesão a um modelo desenvolvimentalista na perspectiva piagetiana, concedendo à cultura, à linguagem e às técnicas um papel fundamental como meios que possibilitam a emergência de modos de representação, o que o leva a afirmar que o desenvolvimento cognitivo será tanto mais rápido quanto melhor for o acesso da pessoa a um meio cultural rico e estimulante. Ao contrário de Piaget, Bruner não via qualquer obstáculo de ordem cognitiva ao ensino das ciências com crianças pequenas. Desenvolveu, a propósito, o conceito de aprendizagem em espiral que postula que qualquer ciência pode ser ensinada, pelo menos nas suas formas mais simples, a alunos de todas as idades, uma vez que os mesmos tópicos serão retomados e aprofundados mais tarde. Aproxima-se assim mais de um modelo psicológico de natureza social. Mas Bruner (1986) também discute a aparente contradição que reside no conceito de Vygotsky acerca da zona de desenvolvimento proximal e das suas implicações acerca da "boa aprendizagem" que, segundo Vygotsky (2000), "é aquela que se adianta ao desenvolvimento" (p.117). Por um lado, questiona Bruner, a consciência e o controle só podem ocorrer depois de a criança dominar bem a função e, por outro, como é possível um adulto competente emprestar consciência a uma criança que não a tem? O autor sugere que o adulto constrói um andaime para o aluno quando o apoia na realização de uma tarefa que ele ainda não pode fazer por si só. O professor tem um papel de apoio que não só possibilita aos alunos a resolução de problemas que ainda não podem resolver por si mas também permite aos alunos aprender com essa experiência. A imagem do andaime é a de algo temporário, que posteriormente é retirado. Bruner relata uma experiência em que uma professora apoiava crianças de três e cinco anos na construção duma pirâmide com blocos de madeira, tarefa que eles não conseguiam desempenhar por si. O autor afirma: "Ela tomava consciência pelos dois e de várias maneiras" (p.75). Controlava o foco de atenção, demonstrava que a tarefa era possível através de dramatização, estabelecia as coisas de modo a que os alunos pudessem reconhecer uma solução, trabalhando assim na zona de desenvolvimento proximal, fazendo o que a criança não podia fazer e organizando as coisas de modo que "a criança pudesse fazer com ela aquilo que claramente não podia fazer sem ela" (p.76). Remata afirmando que nem todos podem ser génios a servir de "consciência vicária" para outros, mas que o papel de tutor também se aprende.

Parece pertinente referir neste ponto o trabalho de Bruner (1966) sobre a representação. Para este autor a representação é o modo pelo qual a criança se liberta do estímulo presente e conserva a experiência passada num modelo, e as regras que permitem o armazenamento e acesso à informação desse modelo. Estabelece então três modos de representação: (a) enactiva; (b) icónica e (c) simbólica. O primeiro realiza-se pela acção. Há muitas coisas para as quais não temos imagem nem palavras; por exemplo se estamos a treinar um desporto como o ténis ou o ski é muito mais fácil o ensino pela acção do que por palavras ou por um diagrama. O segundo sistema depende da organização sensorial e do uso de imagens, sendo assim principalmente governada por princípios de percepção. Finalmente o terceiro sistema de representação realiza-se usando a linguagem, por palavras ou outros símbolos. O modo de representação enactivo aplica-se ao mundo dos objectos materiais mas também se aplica a algo que possa ser manipulado com confiança. O modo icónico relaciona-se com o mundo das imagens e com "ter uma ideia de". O modo simbólico corresponde ao mundo dos símbolos que se afastam do que representam ficando isolados do seu contexto original. No entanto, estes modos sobrepõem-se e interrelacionam-se mais do que se mantêm separados.

Os símbolos podem manter associações icónicas bem como memórias de acções físicas e é ainda desejável percorrer todas as etapas.

> Se é verdade que o curso usual do desenvolvimento intelectual segue do modo enactivo para o icónico e de seguida para o modo simbólico de representação do mundo, pareceria que uma sequência óptima devesse seguir nessa direcção. Obviamente esta é uma doutrina conservadora. De facto, quando o aluno tem um sistema simbólico bem definido, parece ser possível ultrapassar os outros dois modos. Mas corremos o risco de que o aluno não possua o imaginário para voltar

atrás quando as suas transformações simbólicas falham um objectivo na resolução de problemas (Bruner, 1966, p. 49)

O interaccionismo simbólico. O interaccionismo é uma abordagem à teoria do desenvolvimento que permite uma visão sociocultural das fontes e do crescimento do conhecimento. O que a distingue de outras abordagens é que as interacções não são consideradas como meros auxiliares do desenvolvimento: o desenvolvimento e as interacções são inseparáveis. O fulcro não é o indivíduo mas as interacções entre indivíduos no seio de uma cultura (Sierpinska & Lerman, 1996). De acordo com estes autores, as abordagens interaccionistas na educação matemática remontam ao interaccionismo simbólico de Mead e Blumer, entre outros, e à teoria da aquisição da linguagem de Bruner e seus colaboradores. Para um educador interaccionista, a aprendizagem não representa só o esforço mental individual na tentativa de adaptação ao ambiente nem pode ser reduzido a um processo de enculturação numa cultura pré-estabelecida. A construção individual de significados acontece em interacção com a cultura da sala de aula, e paralelamente contribui para a constituição dessa cultura.

Em particular, a interacção entre símbolo e pensamento no desenvolvimento de um conceito deu origem a muita investigação que tem produzido resultados controversos e contraditórios. Deste modo mantém-se em aberto o papel da representação simbólica na aprendizagem (Fosnot, 1999). Parece haver uma interacção entre símbolo e pensamento quando se faz a comparação da representação nos diversos meios como a linguagem, a dança, a música ou o desenho. Segundo esta autora, a investigação sobre o desenvolvimento da simbolização primitiva para caracterizar a expressão da inteligência através de diferentes modos de operação produziu prova de inteligências múltiplas e diferentes que são, segundo Bruner, o resultado de especializações da mente em diferentes componentes de construção do mundo como formas verbais, matemáticas ou espaciais, apoiadas por meios simbólicos também diferentes fornecidos por culturas que, elas próprias, escolheram diferentes tipos de mundos. Por exemplo, um músico constrói um mundo diferente usando os símbolos do ritmo e dos sons dum artista plástico que usa as linhas, as cores e o espaço.

Discussão e conclusão. Viu-se que o construtivismo preconiza a (re)construção do conhecimento pela própria pessoa o que pressupõe uma interpretação individual[8]. Por outro lado, esta teoria opõe-se ao behaviorismo que tem como meta o condicionamento do comportamento ligado ao binómio estímulo-resposta, e ao maturacionismo, que acreditava que o desenvolvimento determina aquilo que cada criança pode aprender e o modo como o aprende. Dentro do construtivismo podemos encontrar duas correntes principais, respectivamente o construtivismo cognitivo, que dá maior destaque ao processo de estruturação cognitiva individual, e o construtivismo social, que valoriza as componentes socioculturais na aprendizagem. Estas duas perspectivas entram por vezes em conflito directo sobre se a aprendizagem é um processo de reorganização cognitiva activa ou um processo de enculturação numa comunidade de prática, sobre se os processos sociais e culturais têm primazia sobre os individuais ou vice-versa e sobre o papel dos sinais e símbolos no desenvolvimento psicológico (Cobb, 1999). As teorias socioculturais constroem explicações com base em práticas culturalmente organizadas e interacções frente-a-frente, defendendo que não é adequado isolar diferenças qualitativas no pensamento individual. Por seu lado, os teóricos cognitivos preocupam-se com a qualidade da actividade interpretativa individual, baseando explicações nos modelos de organização cognitiva de cada aluno, considerando que a microcultura em evolução apenas existe por força das tentativas do professor e dos alunos para coordenarem as suas actividades individuais, destacando a heterogeneidade. As metáforas são, para o teórico sociocultural, a apropriação, e, para o cognitivista, a acomodação e adaptação (Cobb, 1999).

Nesta questão, para Fosnot (1999), o essencial não é discutir qual destas componentes é mais importante ou prioritária mas em que consiste a interacção entre elas. De facto, não se pode compreender a estruturação cognitiva da criança sem analisar a cultura em que se insere e o modo como interage com ela. Mas também não se pode imaginar a cultura, por si só, como uma entidade abstracta que afecta a estruturação da criança. Como o processo de construção é adaptativo e auto-organizado, o conhecimento cultural pode, quando muito, ser assumido ou partilhado pelos membros de uma dada cultura. Todavia, é um todo maior do que as suas partes individuais, possuindo uma estrutura que interage com as cognições individuais que o constroem. Deste modo, a componente sociocultural da aprendizagem de Vygotsky – as noções

[8] Para alguns teóricos como von Glasersfeld – os construtivistas radicais – isto implica a inexistência de uma realidade objectiva externa onde se possam alcançar os significados e, em consequência, a necessidade da construção do significado pela criança (Mason & Johnston-Wilder, 2006).

intuitivas cedem lugar aos conceitos culturalmente aceites – insere-se neste sentido de interacção dialéctica entre o individual e o cultural. Cobb (1999) tem uma posição semelhante quando afirma, particularmente em relação ao ensino da matemática, que se trata de explorar formas de coordenar perspectivas construtivas cognitivistas e socioculturais. Este autor, analisando em paralelo teóricos das duas linhas, encontra pontos de complementaridade que se traduzem pela afirmação: "[...] a aprendizagem matemática consiste num processo de construção activa que ocorre quando as crianças tomam parte nas práticas matemáticas da aula, muitas vezes interagindo com os outros" (p.69). Nesta linha, defende um *pragmatismo teórico* em que cada uma das correntes em contenda constitui o pano de fundo em que a outra se evidencia. Esta abordagem toma em consideração aquilo que as várias perspectivas poderão ter para oferecer em face de um problema ou situação concreta. Assim, a adopção de uma perspectiva ou de outra justifica-se pelo seu potencial para tratar questões cuja resolução possa contribuir para o fim último que é a melhoria do ensino.

Nos modelos de aprendizagem assume ainda particular realce o papel da representação da experiência descentrada de si por meio de símbolos, já que permite ajustar o significado aprofundando a compreensão. Bruner, em particular, propõe três modos de representação discutindo as suas relações. Esta transferência de modos de representação foi muito estudada por outros autores. O que inicialmente é algo que a pessoa faz, torna-se gradualmente um objecto e consequentemente algo sobre o qual a pessoa pode actuar (Mason & Johnston-Wilder, 2006).

Adoptando outro ponto de vista, a construção da generalização de forma simbólica cria por vezes contradições e desequilíbrios que são a motivação intrínseca para a abstracção reflexiva. Esta reflexão sobre os nossos actos e sobre o nosso próprio pensamento, considerando várias perspectivas, pode trazer novos conhecimentos e novas construções. Citando Fosnot (1999):

> A aprendizagem é um processo de edificação de construção de significado que resulta em abstracções reflexivas, produzindo símbolos dentro de um suporte. Estes símbolos tornam-se, então, parte do repertório de esquemas assimiladores do indivíduo os quais, por seu turno, são utilizados na percepção e posterior concepção (pp.49-50).

A autora representa este processo pelo esquema dialéctico tripartido representado na Figura 5:

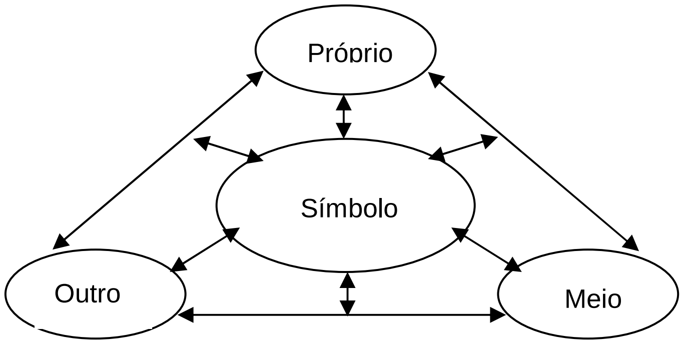


Figura 5. Modelo construtivista da aprendizagem (Fosnot, 1999)

Dentro deste modelo construtivista, os desequilíbrios não devem ser evitados mas devem ser enfrentados e discutidos pois são condição de aprendizagem. A reflexão a que esta discussão conduz vai dando significado às ideias matemáticas e vai assim produzindo a reorganização e refinamento dos conceitos.

Obviamente que a opção por uma das correntes de aprendizagem condiciona o modo de encarar a prática quotidiana. Durante muito tempo o ensino foi enformado por uma corrente behaviorista de estímulo/resposta. A partir dos anos oitenta houve uma mudança de paradigma: passaram a ser aceites as correntes construtivistas. Ao longo do tempo tem surgido forte oposição em relação a essas correntes, essencialmente por parte da comunidade de matemáticos. Muito recentemente, um relatório apresentado nos EUA por um painel de especialistas (NMAP, 2008) em relação ao estado da educação matemática no país, questiona algumas posições assumidas por educadores matemáticos num passado recente. Por exemplo, chega à conclusão que as aulas de matemática não devem ser exclusivamente nem dirigidas pelo professor nem centradas no aluno. O mesmo painel, referindo-se à aprendizagem dos alunos, foca alguns pontos considerados fundamentais como sejam uma boa iniciação matemática, a importância dos procedimentos e automatismos a par da compreensão conceptual, e o valor do esforço:

> Devemos fazer uso do que é claramente conhecido da investigação rigorosa acerca da aprendizagem dos alunos, especialmente reconhecendo: a) as vantagens para as crianças de terem uma forte iniciação; b) os benefícios que se reforçam mutuamente da compreensão conceptual, fluência procedimental e evocação de factos automática (i.e., rápida e sem esforço); e c) que o esforço, não só o talento inerente, conta na realização matemática (p. 11).

Embora sem radicalizar posições, opta-se neste trabalho por uma perspectiva construtivista. Defende-se também que, num futuro próximo, as profissões serão diferentes exigindo outras capacidades, designadamente de resolução de problemas e de cooperação, e que os trabalhos rotineiros serão executados por máquinas. Assim, é importante desenvolver nos alunos hábitos mentais para além de procedimentos rotineiros. Há determinadas áreas que terão de ser valorizadas. Citando Maarten Dolk, um dos defensores da matemática realística na Holanda, "A educação matemática no futuro necessita de se focar mais na estatística, tratamento e representação de dados, padrões, resolução de problemas, etc." (Dolk, 2009). Estas opções têm fortes implicações nos conteúdos e no estilo de ensino da matemática. Na verdade, para uma aprendizagem que desenvolva capacidades de nível cognitivo elevado não são adequados os modelos de ensino tradicionais. É necessária uma grande atenção às tarefas que são utilizadas, pois são elas que vão primordialmente promover a actividade do aluno, e ao ambiente de sala de aula onde todas estas acções se desenrolam.

A aprendizagem da Matemática

Discriminam-se de seguida algumas facetas que podem assumir estatuto de relevo no processo de aprendizagem, encarado numa perspectiva construtivista, designadamente o papel e a natureza das tarefas relacionados com a actividade matemática do aluno, entremeados pela influência do professor neste processo, e o papel e a importância da comunicação.

As tarefas, a actividade matemática e o papel do professor

Na opção construtivista, as tarefas disponibilizadas aos alunos são sem dúvida o ponto de partida da aprendizagem. Assim, a selecção e construção de tarefas é um aspecto crucial do trabalho do professor. Documentos curriculares como os *Princípios e Normas* (NCTM, 2000) classificam de úteis as tarefas que lidam com ideias matemáticas fundamentais, que constituem um desafio intelectual para os alunos e que permitem várias abordagens. Já anteriormente (NCTM, 1991) se considerava, nas *Normas Profissionais*, que as tarefas devem, entre outros aspectos, basear-se em matemática sólida e significativa, apoiar e estimular a resolução de problemas, o raciocínio, as conexões e a comunicação e terem em conta os interesses e experiências dos alunos. Por seu lado, o documento *Currículo Nacional* (ME-DEB, 2001) defende que devem ser proporcionadas aos alunos diferentes experiências de aprendizagem, sugerindo uma boa variedade: resolução de problemas, investigações, jogos, projectos, prática compreensiva de procedimentos.

Vários investigadores defendem que devem ser propostas aos alunos tarefas que podem ser resolvidas de vários modos diferentes, suscitam representações múltiplas e exigem dos alunos a interpretação, o estabelecimento de conjecturas, a generalização e a justificação, isto é, processos de pensamento de nível cognitivo elevado (Silver & Stein, 1996). Paralelamente, o facto de poderem ser resolvidas de diversos modos proporciona a partilha de raciocínios e a comparação dessas diferentes abordagens.

A natureza das tarefas está relacionada com os seus objectivos. As tarefas podem ser usadas com fins variados, como para introdução de novos conceitos, para alargamento e reforço da aprendizagem e como forma de motivar e envolver os alunos. Daí que seja necessária a diversificação das tarefas (Ponte, 2005). Esta diversificação pode também assentar no grau de estruturação das tarefas – mais fechadas ou mais abertas –, no grau de desafio matemático – que se prende com o grau de dificuldade –, no tempo de duração ou no contexto – real ou matemático. Este autor propõe uma classificação das tarefas segundo duas dimensões principais, o grau de estruturação e o grau de desafio, como se apresenta na Figura 6:

Figura 6. Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005)

Mason & Johnston-Wilder (2006) defendem igualmente uma abordagem mista de tarefas de vários tipos para o desenvolvimento do pensamento matemático, já que nunca um único tipo de tarefas se revelou universalmente eficaz. Apresentam quatro princípios fundamentais que devem presidir à selecção das tarefas: (a) os alunos devem estar mental, emocional e, por vezes, fisicamente activos; (b) os professores devem estar conscientes das características relevantes do tópico a ser aprendido, da sua estrutura matemática e das formas de o tornar acessível aos alunos; (c) as tarefas são veículos de aprendizagem na medida da qualidade e da natureza das interacções e actividades que geram; e (d) a aprendizagem processa-se num *meio* de forças sociais e práticas de sala de aula. Estes autores defendem que o fulcro do ensino situa-se na interacção entre o professor e o aluno. O contexto dessa interacção é a actividade do aluno, que é iniciada por tarefas, que por sua vez são construídas de modo a que os alunos possam tomar contacto com ideias curriculares importantes. São apresentados vários modelos relativamente à análise do *design* e utilização das tarefas. Um deles é o *Ver-Experimentar-Dominar* que se traduz no seguinte: quando os alunos enfrentam pela primeira vez um tópico, conceito ou técnica, é pouco provável que compreendam os pormenores; limitam-se a "ver como é"; só com maior insistência começarão a ganhar experiência e familiaridade de modo a que o tópico se torne abordável; e só com a prática continuada é que começam a dominar o tópico, conceito ou técnica. Na linguagem deste modelo os requisitos da tarefa deverão incluir pelo menos um dos seguintes aspectos: (1) expor os alunos a algo novo (ver); (2) aumentar a experiência dos alunos sobre algo que está a tornar-se familiar (experimentar); e (3) comportamentos práticos para desenvolver maior competência e facilidade (dominar). Se este modelo for um guia para as aulas, os alunos formam uma imagem dos modos de trabalho habituais mesmo que não compreendam precisamente as intenções do professor com essa tarefa; e isso é importante para um ensino efectivo pois torna-se parte do ambiente da sala de aula. Outro modelo consiste em distinguir entre a *tarefa oculta* e a *tarefa visível*. Esta distinção corresponde àquilo que é efectivamente pedido ao aluno que realize (tarefa visível) e aquilo que o professor espera que o aluno encontre enquanto realiza a tarefa (tarefa oculta). Algumas características da tarefa oculta são: (a) uso de linguagem técnica; (b) uso de técnicas já encontradas anteriormente; (c) uso de capacidades matemáticas tais como especializar e generalizar, conjecturar e convencer, imaginar e exprimir, etc.; e (d) conexões com temas matemáticos como invariância na mudança, liberdade e condicionamento, inversão de uma operação, multiplicidade de representação e interpretação, etc. Um terceiro modelo pode ser designado por *Manipular-Compreender-Articular*. A tarefa visível envolve os alunos na manipulação de objectos, que podem ser físicos (incluindo objectos num visor electrónico), mentais ou simbólicos ou, na maioria dos casos, uma mistura dos três. Simultaneamente, a tarefa oculta pretende que com a manipulação os alunos compreendam uma estrutura, padrão ou relação. À medida que a compreensão dessa estrutura se aprofunda vai-se tornando cada vez mais fácil aos alunos a sua articulação (exposição por palavras) ou representação através de um esquema ou símbolo. Este modelo assenta no pressuposto de que não basta ao professor dizer; é necessário que o aluno o transforme no seu próprio conhecimento, ou seja, é um modelo baseado no construtivismo.

Constatou-se-se que vários documentos curriculares e vários autores preconizam tarefas ricas em ideias matemáticas, variadas e que constituam um desafio intelectual para os alunos. Contudo, a utilização de tarefas com estas características não garante, por si só, que os alunos melhorem a sua aprendizagem (Ball et al., 2008). Uma das razões já foi apontada: se a tarefa não permitir várias abordagens diferentes pode ser difícil a comunicação. Também, se não for do agrado dos alunos, estes podem não se envolver. Para além destas razões há factores mais ligados ao papel do professor que podem influenciar o êxito da tarefa em termos de aprendizagem: como faz o questionamento, como organiza o trabalho, como apoia os alunos com dificuldades sem eliminar o desafio, como faz a síntese final em grande grupo.

Stein & Smith (1998), no quadro de um projecto de investigação destinado a ajudar os professores na reflexão sobre o seu ensino baseado na análise das tarefas usadas na sala de aula, definem tarefa nesse contexto como um segmento de actividade da sala de aula dedicado ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular. A tarefa pode exigir do aluno apenas a execução de procedimentos memorizados, de forma rotineira, ou, mesmo usando procedimentos, exigir capacidades de nível cognitivo elevado, fazendo conexões e dando-lhes oportunidade para pensarem. As tarefas passam por várias fases como mediadoras da aprendizagem: o modo como surgem nos materiais curriculares, o modo como são apresentadas pelo professor e finalmente o modo como são realizadas pelos alunos. A Figura 7 mostra esse percurso.

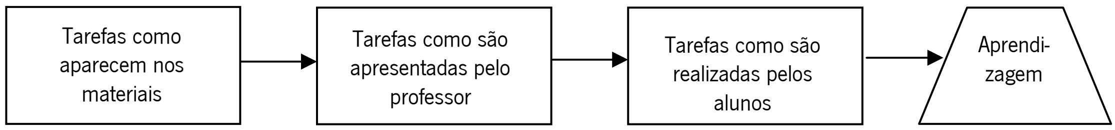


Figura 7. O quadro das tarefas matemáticas (Stein & Smith, 1998)

As autoras pretendem salientar que a natureza das tarefas pode ser alterada na passagem de uma fase para outra. Em particular, tarefas desenhadas para proporcionar pensamento de nível cognitivo elevado podem ser substancialmente alteradas na passagem para a forma como são realizadas pelos alunos. Para isso pode contribuir a acção do professor, as sugestões que faz, o modo como acompanha o trabalho, as conexões que estabelece, as respostas que dá às solicitações dos alunos, a forma de gestão da aula, o tempo que destina à realização da tarefa, o grau de responsabilização que é conferido ao aluno. O reconhecimento destes aspectos pelos professores é uma fonte de reflexão sobre a sua prática, que as autoras defendem que deve ser feita preferencialmente em colaboração com outros colegas.

Palhares, Gomes, Carvalho & Cebolo (2009), referindo-se à implementação por professores na sala de aula de tarefas exploradas nas sessões de formação conjunta do Programa de formação contínua em Matemática em que se insere este estudo, embora noutro distrito, apontam uma diminuição do poder matemático das tarefas, nomeadamente no tipo de trabalho usado na sala de aula, que é nalguns casos individual para evitar o barulho, o que evidencia a representação dos professores sobre a actividade matemática, o não uso de materiais manipuláveis por alguns professores, que é considerado distractor, e a quantidade excessiva de informação dada por alguns professores, que levou à diminuição da necessidade de raciocínio. Os autores atribuem estes resultados, não a uma visão diferente do ensino da matemática, mas antes ao conhecimento matemático e à experiência profissional dos professores. No entanto, os autores apontam, por exemplo, que nas sessões de formação conjunta não foram utilizados materiais manipuláveis.

Viu-se como a passagem à implementação das tarefas, sobretudo por acção do professor, pode provocar um empobrecimento do nível cognitivo. Contudo, esta mudança pode também ocorrer no sentido contrário: as tarefas rotineiras podem ser transformadas pelo professor de modo a tornarem-se mais abertas e mais interessantes no sentido de permitirem uma exploração mais rica para o desenvolvimento das capacidades matemáticas dos alunos. Exercícios muito limitados por só visarem o conhecimento de factos e terminologia, que abundam em manuais escolares, podem ser adaptados de modo a proporcionarem um maior grau de desafio (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008).

Na apresentação das tarefas aos alunos os professores devem ainda evitar dois extremos: serem demasiado previsíveis e serem demasiado inovadores (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Se apresentarem as tarefas sempre da mesma maneira correm o risco de que os alunos se tornem demasiado dependentes e reajam mal quando virem outro tipo; se usarem um método diferente em cada aula também pode acontecer que os alunos não encontrem um fio condutor no trabalho e no modo como as tarefas surgem e se desinteressem.

Durante muito tempo usou-se no nosso país o termo actividades para designar as tarefas. No entanto, os dois conceitos não são equivalentes: a tarefa é o objectivo da actividade, ou, dito de outro modo, é uma proposta que vai permitir que o aluno entre em actividade (Ponte, 2005). A tarefa pode ser apresentada de forma explícita no início do trabalho pelo professor, mas também pode ser da iniciativa do aluno ou resultar de negociação entre as duas partes. Em qualquer dos casos, a tarefa é sempre um mediador de aprendizagem, na medida em que proporcione que o aluno se envolva em actividade matemática produtiva e rica. À luz do construtivismo social de Vygotsky (1978), para realizar a apropriação do conhecimento, a introdução de ferramentas mediadoras (objectos físicos e sistemas simbólicos) é fundamental: esta introdução é feita do exterior pelo representante da cultura na sala de aula, o professor. Vygotsky realçou a noção da pessoa actuante, embora tenha dado particular relevo ao "significado" como a mediação entre o indivíduo e o mundo (Sierpinska & Lerman, 1996). Através de ferramentas, ferramentas culturais em particular, a sociedade e a cultura são mediadas para a criança. A teoria da actividade de Leontiev, inspirada nas ideias de Vygotsky, defende que a actividade orienta os participantes e fornece a motivação e o significado iniciais. Nesta formulação há ainda uma distinção entre acção e actividade. A actividade é a acção com um motivo. A actividade relaciona-se mais com o nível macro enquanto a acção tem a ver com o nível micro. Mason & Johnston-Wilder (2006) ilustram a distinção com o seguinte exemplo: A actividade é continuar uma sequência de números. O motivo para as acções é continuar essa sequência. O aluno desenvolve a acção de produzir uma tabela onde regista as diferenças sucessivas. A tabela é uma ferramenta cultural que serve de mediadora da acção. Assim, ao nível macro, a actividade resulta quando a pessoa actua para responder a um motivo; ao nível micro, o motivo dá origem a uma série de objectivos que a pessoa tenta atingir realizando acções. Mas resta a questão de como é que uma tarefa pode produzir a actividade. Os autores apontam algumas sugestões: pode pedir aos alunos que *imaginem* alguma coisa; pode pedir que *façam generalizações* por observação de casos particulares; pode *surpreender* os alunos com algo inesperado; pode criar possibilidades de os alunos serem *criativos*, por exemplo dando a resposta e pedindo a questão; e pode levar os alunos a *produzirem exemplos* acrescentando sucessivamente condições suplementares.

Outros autores (e.g. Brown, Collins & Duguid, 1989) subscrevem também o desenvolvimento de conceitos através de actividade autêntica como base da aprendizagem cognitiva. Nesta abordagem, é reforçado o papel central da actividade na aprendizagem, bem como a sua natureza contextualizada, situada e de enculturação. O professor promove a aprendizagem inicialmente tornando explícito o seu conhecimento táctico ou modelando as suas estratégias para os alunos, fornecendo-lhes assim um *andaime* que lhes permite iniciar uma autêntica actividade. De seguida, o professor e os colegas apoiam os alunos nas suas tentativas; à medida que os alunos ganham maior auto-confiança e controlo, iniciam uma fase mais autónoma de aprendizagem colaborativa. E finalmente, o professor desafia os alunos a continuar de forma independente; a progressiva participação na cultura facilitada pela interacção social com os professores e com os colegas, que também conduz à articulação de estratégias, permite o desenvolvimento da capacidade de generalização, apoiada na compreensão situada dos alunos. A partir daí, os alunos podem usar este conhecimento conceptual acabado de nascer em actividade, vendo essa actividade já com novos olhos, e ir progressivamente desenvolvendo em nova actividade o seu conhecimento conceptual.

A comunicação

Focou-se anteriormente a importância das tarefas e da actividade matemática que elas potenciam. Embora uma tarefa rica no sentido em que foi definida seja condição necessária para uma boa aprendizagem, verifica-se que ela não é contudo condição suficiente. De facto há outros factores em jogo que podem condicionar a aprendizagem. Um deles é o ambiente de sala de aula. Numa perspectiva construtivista, podemos afirmar que ensinar é criar um ambiente para aprender matemática, gerindo a participação de modo que os alunos estabeleçam relações com representações do conteúdo e uns com os outros (Franke, Kazemi & Battey, 2007). Estes autores realçam deste modo o carácter relacional do ensino:

> O ensino é relacional. Os professores, os alunos e o conteúdo apenas podem ser compreendidos em relação uns com os outros. O professor trabalha para orquestrar o conteúdo, representações do conteúdo e as pessoas dentro da sala de aula relacionando-as umas com as outras (p.227).

Também Lampert (2001) encara a prática de ensino não como um conjunto de acções executadas por um professor individualmente mas como a construção de relações - entre os alunos e o professor e dos alunos entre si – e o envolvimento conjunto na construção do significado matemático. A mesma autora sugere a importância, para um ensino virado para a compreensão, de os professores conhecerem e analisarem o pensamento matemático dos seus alunos, compreenderem as tarefas matemáticas e proporcionarem o discurso com e entre os alunos acerca dos pormenores do seu pensamento e da matemática. De facto, se os alunos despenderem mais tempo a resolver problemas desenvolvem em maior grau o pensamento reflexivo e analítico, mas o professor precisa de conhecer o pensamento dos alunos à medida que se envolvem em actividade. Os professores que conhecem o pensamento matemático dos alunos podem apoiar o desenvolvimento da sua competência matemática (Franke et al., 2007). O discurso tem esse propósito de conduzir os professores a uma melhoria das suas práticas ao observar explicitamente o pensamento dos alunos sobre as ideias matemáticas em jogo, permitindo o aparecimento de múltiplas estratégias e fazendo conexões entre elas. Mas também promove a compreensão dos alunos ao descreverem em pormenor as suas estratégias e porque é que elas funcionam. Esta afirmação pode ser desdobrada em duas interpretações diferentes e ambas importantes: o aluno, ao ter de explicar, aprofunda a sua própria compreensão e, por outro lado, com a explicitação do seu próprio pensamento está a fornecer aos colegas um modelo de pensar (Fosnot & Dolk, 2001). A comunicação surge assim como actividade de grande importância na aprendizagem; contudo, esta cultura de sala de aula, sobretudo ao nível elementar, está ainda muito aquém de ser atingida (Wollring, 2003).

A investigadora israelita Anna Sfard vai mais longe, adoptando uma abordagem comunicacional da cognição. Nesta conformidade, define a aprendizagem como "o processo de mudança do seu próprio discurso de um certo modo bem definido" (Sfard, 2001, p.4). Concretamente, defende que quando a pessoa aprende sobre determinado tópico altera e alarga as suas capacidades discursivas de modo a tornar-se capaz de comunicar sobre esse tópico com membros da comunidade matemática. O novo discurso poderá também tornar possível a resolução de problemas que não podiam ser resolvidos antes. Os críticos desta teoria poderão contrapor que o essencial na aprendizagem é a mudança no modo de pensar e que a comunicação desse mesmo modo de pensar, embora importante, é secundária. A esta posição a autora argumenta que o pensamento é um caso especial da actividade de comunicar, já que a pessoa que pensa, mesmo só, pode ser vista como em comunicação consigo própria, quer seja por palavras, por imagens ou por outros símbolos. O nosso pensamento é um comportamento dialógico em que nos informamos a nós próprios, fazemos perguntas e esperamos pelas nossas próprias respostas. Nesta interpretação, pensar matematicamente e participar no discurso matemático são equivalentes. E nestes termos, se a aprendizagem matemática for conceptualizada como o desenvolvimento de um discurso matemático, a investigação sobre a aprendizagem significa a descoberta dos modos como as crianças modificam as suas acções discursivas nas três seguintes dimensões: (a) o vocabulário; (b) os meios visuais pelos quais a comunicação é mediada; e (c) as regras meta-discursivas que fluem na comunicação e indicam tacitamente aos participantes que mudanças discursivas são adequadas para este discurso particular e quais não são de todo apropriadas. Neste sentido, a autora contesta alguns princípios habitualmente aceites sobre a aprendizagem, tais como a importância de a aprendizagem ser significativa, argumentando que o discurso matemático apenas pode começar a fazer sentido para o aluno depois de uma participação persistente, não podendo ser esse sentido assimilado anteriormente. Do mesmo modo questiona a diminuição da importância dada ao formalismo e aos procedimentos, com base no pressuposto de que os mediadores simbólicos são necessários para gerar a comunicação matemática e não como finalização, como é correntemente entendido. Ainda outra asserção genericamente aceite é contestada - a necessidade de apresentar a matemática enraizada num contexto de vida real, já que para alguns temas matemáticos tal é impossível, como mostra com o exemplo do sinal do produto de dois factores negativos, argumentando além disso que se a aprendizagem matemática é a iniciação a um novo tipo de discurso, é contraditório exigir que se confine ao discurso habitual de todos os dias. Afirmando noutro momento (Sfard, 2000) que as regras únicas do discurso matemático não podem nem ser aprendidas por simples articulação nem reinventadas pelos alunos na discussão de problemas matemáticos "a seu modo", a autora questiona aquilo que designa por uma má interpretação dos princípios construtivistas dos movimentos de reforma como uma indicação para que os professores não intervenham:

> O professor que exige que os alunos trabalhem por si, que evita 'falar' e que nunca demonstra a sua própria maneira de fazer matemática, priva o aluno da única oportunidade que este tem de ser apresentado ao discurso matemático e às suas meta-regras. Um professor de matemática que se abstém de apresentar os seus próprios *skills* matemáticos pode ser comparado com um professor de língua estrangeira que nunca se dirige aos alunos na língua que é suposto eles aprenderem (p.31).

Esta ideia é consistente com a teoria da aprendizagem social de Vygotsky, com a teoria do andaime de Bruner e com a teoria da aprendizagem cognitiva anteriormente referidas.

Outro aspecto da comunicação, vista na direcção professor $\leftrightarrow$ aluno, equaciona também a problemática do questionamento feito pelo professor. Este tem os seus perigos, podendo afunilar as respostas dos alunos de modo a que fica a caber ao professor a parte cognitiva mais importante, ou não dar tempo aos alunos para reflectirem. Por outro lado, pode ser feito unicamente com o objectivo de testar o que o aluno já sabe *sobre o que lhe foi dito*. Numa perspectiva mais positiva, pode ajudar à compreensão da tarefa ou das ideias matemáticas em jogo. Mas pode ter ainda um outro papel, com muitas potencialidades: o de focar o pensamento matemático do aluno, mas deixando-lhe a responsabilidade do trabalho intelectual (Franke et al., 2007). Perguntas como "O que é igual? O que é diferente? Consegues dar um exemplo? Um contraexemplo? Consegues relacionar estes... de alguma maneira? Consegues arranjar uma forma de registo útil?" desafiam o aluno a procurar regularidades e relações, promovendo a formação de redes conceptuais. Perguntas deste tipo são também oportunas quando o aluno está num impasse não sabendo o que há-de fazer a seguir (Boavida et al., 2008). O questionamento pode ser estimulante para envolver e interessar os alunos (Mason & Johnston-Wilder, 2006). A pergunta, desde que bem formulada, pode ser uma provocação e um desafio ao pensamento matemático dos alunos, permitindo que todos se envolvam com as ideias em discussão e sejam conduzidos à análise, à reflexão e à explicação de raciocínios, levando-os assim a pensar a níveis mais elaborados.

O pensamento algébrico

Tradicionalmente, o estudo da álgebra esteve sempre afastado dos currículos de matemática do primeiro ciclo do ensino básico. É um lugar comum pensar que a aritmética é fácil mas a álgebra é difícil e deve vir depois, apenas a partir da adolescência. No entanto, nos últimos anos têm surgido com especial relevo recomendações curriculares para a sua introdução a partir dos primeiros anos (NCTM, 1989, 2000; ME, 2001). O novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) inclui este tema desde o primeiro ciclo. Assim, começa por analisar-se a abordagem do tema feita por estes documentos curriculares, passando-se seguidamente à discussão da pertinência, de aspectos centrais e de propostas de trabalho para a sala de aula ligados ao pensamento algébrico nos primeiros anos.

A abordagem curricular da álgebra

O programa de 1990 para o 1.º ciclo, ainda em vigor (ME, 1990), não contém quaisquer referências ao termo *álgebra*, embora contenha objectivos do domínio do pensamento algébrico, quando se refere aos operadores "dobro de" e o seu inverso "metade de" e afins (p.136), quando considera a importância do cálculo mental para "[...] lidar com o número como parte de uma estrutura e não a vê-lo como um símbolo de uma quantidade" ou "utilizar as propriedades das operações com um objectivo útil" (p.133). No entanto, estas referências aparecem esparsamente e de uma forma pouco estruturada. Nos programas de 1990, só no 3.º ciclo é finalmente explícito o estudo da álgebra. Porém, e de acordo com Ponte (2006), tem sido dada nesses programas uma ênfase exagerada ao cálculo algébrico sem cuidar dos aspectos mais importantes do estudo da álgebra, como sejam a resolução de problemas, as estruturas e as relações.

O documento *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais* (ME-DEB, 2001) não explicita competências específicas no domínio da álgebra para o 1.º ciclo, sendo este abrangido apenas por considerações genéricas abrangendo os três ciclos em que se apresenta a competência matemática que todos devem desenvolver no domínio da álgebra desdobrada em várias facetas:

- A predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos;
- A aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;
- A aptidão para construir e interpretar tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos;
- A aptidão para concretizar, em casos particulares, relações entre variáveis e fórmulas e para procurar soluções de equações simples;

- A sensibilidade para entender e usar as noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas.

Neste documento há, como se pode verificar, uma alteração das orientações do programa, no sentido de valorizar o trabalho com padrões e a formulação de generalizações. No entanto, não há no documento especificação de modos de trabalho ou sugestões metodológicas e o programa em vigor continua a ser o de 1990 onde não é feita essa valorização.

Surge assim a necessidade de alinhar o programa com o *Currículo Nacional* de modo a haver consistência entre as recomendações dos dois documentos. É neste sentido que aparece, em Julho de 2007, uma proposta de reajustamento do programa de matemática do ensino básico, que vem a ser homologado pelo Ministério da Educação como Programa de Matemática do Ensino Básico em Dezembro do mesmo ano (ME-DGIDC, 2007). Neste documento também não aparece no 1.º ciclo a álgebra como tema, mas já aparece considerada como uma forma de pensamento matemático para os primeiros anos, designadamente através do trabalho com sequências, relações entre números e entre números e operações. Tal como é referido na p.14 "Este trabalho com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajuda a desenvolver a capacidade de abstracção e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico". No 2.º ciclo continua-se com o destaque ao desenvolvimento do pensamento algébrico, nomeadamente através do trabalho com padrões e relações (expressões numéricas e propriedades das operações, sequências e padrões e variação). No 3.º ciclo aprofunda-se o estudo da variação e das relações. Retoma-se o trabalho com sequências. Inicia-se o estudo das equações e inequações e das funções.

Em *Princípios e Normas* (NCTM, 2000) considera-se que os programas de ensino da matemática escolar desde o pré-escolar até ao 12.º ano devem habilitar os alunos para as capacidades:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos:
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar a variação em diversos contextos.

No mesmo documento preconiza-se que os alunos da escola elementar façam investigações e comuniquem experiências que envolvam o raciocínio algébrico por permitirem uma compreensão matemática avançada sendo para além disso suporte de aprendizagens posteriores mais formalizadas. Por exemplo, os alunos podem calcular mentalmente 18x14 fazendo 18x10 e adicionando com 18x4, utilizando a propriedade distributiva duma forma que contribui para a compreensão algébrica. Considera ainda o documento que a álgebra, estando ligada ao número como o está à geometria e à análise de dados, pode ser um tema unificador da matemática.

Assim, verifica-se que o *Currículo Nacional* apresenta uma perspectiva semelhante à dos *Princípios e Normas* no que diz respeito à álgebra nos primeiros anos, e o novo programa segue na mesma linha propondo a álgebra quase como um tema transversal que se inicia muito cedo com o trabalho com investigação de regularidades em sequências, estabelecimento de relações e propriedades.

Noutros países as coisas passam-se do mesmo modo: O novo Programa de Queensland, na Austrália, de 2005, inclui a introdução do novo tema Padrões e Álgebra para os níveis de 1 a 4 (Warren, 2006). Carraher & Schliemann (2007) relatam o sucesso da abordagem precoce da álgebra em países como a Rússia e Singapura, onde as crianças são expostas a ideias e técnicas algébricas muito mais cedo que nos Estados Unidos.

Perspectivas sobre o pensamento algébrico nos primeiros anos

Começa-se por analisar este conceito emergente nos últimos anos designado por pensamento algébrico. Kieran (2004) apresenta a seguinte definição de pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade:

> O pensamento algébrico nos primeiros anos envolve o desenvolvimento de modos de pensar através de actividades para as quais o simbolismo da álgebra pode ser usado como ferramenta mas que não são exclusivas da álgebra e que podem ser abordadas sem qualquer uso de simbolismo algébrico, tais como, analisar relações entre quantidades, detectar a estrutura, estudar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e predizer (p. 149).

Em consonância com esta autora, Cai & Moyer (2008) definem o pensamento algébrico nos primeiros anos como "uma extensão da aritmética e da fluência de cálculo típicas dos primeiros anos de escolaridade à consideração mais profunda da estrutura matemática subjacente" (p.170). Esta ideia é consistente com Mason (1996) ao subscrever que

> A álgebra como uma forma disciplinada de pensamento emergiu quando as pessoas se aperceberam do facto de que podiam operar sobre objectos (números, formas, expressões) e

> podiam operar sobre essas operações. Assim, quando alguém for capaz de pensar como combinar operações aritméticas, já começou a fazer álgebra, porque está a operar sobre operações de objectos (p.74).

De acordo com Kieran (2004), os estudantes que estão habituados a trabalhar num contexto aritmético não vêem os aspectos relacionais entre as operações, tendendo a centrar-se nos cálculos. Esta investigadora recomenda os seguintes ajustamentos no ensino para que a transição da aritmética para a álgebra seja bem sucedida: (1) o foco nas relações e não meramente no cálculo de respostas numéricas; (2) o realce nas operações e nas suas inversas e na ideia relacionada de fazer e desfazer; (3) o foco na representação e resolução simultânea de problemas em vez de apenas na resolução; (4) a utilização de números e letras em vez de apenas números; e (5) a reformulação do significado do sinal de igual, que normalmente é encarado como um separador entre o problema e a solução, ou seja, um indicador para efectuar as operações constantes do lado esquerdo.

Mas será possível, ou mesmo desejável, a introdução da álgebra nos primeiros níveis de escolaridade? E que álgebra é adequada para esses níveis? Procurar-se-ão respostas para estas questões estudando vários pontos de vista.

Assiste-se nos últimos anos a um debate entre os investigadores sobre as virtualidades da "álgebra para todos", em que as grandes questões se relacionam com a natureza da aprendizagem da matemática, a estrutura da matemática e o papel dos professores. Carraher & Schliemann (2007) apresentam cinco questões que se prendem com a referida introdução precoce da álgebra e com o currículo de matemática: (1) As relações entre aritmética e álgebra. Para uns prevalece a ideia de continuidade e inclusão e, pelo contrário, para outros há uma ruptura entre os dois domínios; (2) O processo *versus* objecto. A matemática pode ser considerada, por um lado, como operação / processo / cálculo / procedimento / algoritmo e, por outro, como objecto / estrutura / relação. Há entre vários autores algum desacordo sobre as vantagens das abordagens procedimentais em contraste com as estruturais; (3) O papel de referência da álgebra. Para uns, a compreensão algébrica desenvolve-se através da modelação de situações extra-matemáticas, enquanto que outros tendem a encarar a introdução da álgebra como distractora; (4) A representação simbólica, encarada estritamente. Há muitas diferenças de opinião acerca da importância, *timing* e significados da introdução da notação algébrica convencional ou simbólica. Mesmo os que a consideram adequada discordam em questões como a identificação de tarefas algébricas ou da presença de raciocínios algébricos e ainda sobre as abordagens pedagógicas, a formação de professores e as linhas de orientação da política de ensino; e (5) A representação simbólica, encarada em sentido lato. Há quem considere as representações tabulares, gráficas ou de linguagem natural como pontos de entrada fundamentais na álgebra, enquanto que outros consideram-nas importantes mesmo depois do domínio simbólico e ainda outros encaram-nas como pré-algébricas. Adiante discutir--se-á um pouco mais aprofundadamente o papel das representações tabulares.

Mason (1996) identifica os seguintes quatro alicerces principais da álgebra: (a) expressão da generalização; (b) possibilidades e condicionantes; (c) rearranjo e manipulação; e (d) aritmética generalizada. Este autor defende que a facilidade na manipulação da generalização se desenvolve à medida que a confiança na expressão aumenta e que surgem diversas expressões da mesma coisa. Por outro lado, considera que os estudantes podem ganhar alguma facilidade de manipulação antes da apreciação ou compreensão, mas aquela só pode ser mantida se o sucesso externo e explícito for acompanhado de um sucesso interno ao nível do significado. Mantém ainda, em relação ao quarto alicerce, que a álgebra como aritmética generalizada é produzida pela expressão da estrutura da aritmética, dando como exemplo a expressão por uma criança da propriedade comutativa da adição.

Usiskin (1999) argumenta que é produtivo aprender alguma álgebra nos primeiros anos de escolaridade e que, mesmo sem os professores darem conta, estão a ensinar e os alunos a aprender álgebra. Para mostrar a sua tese começa por definir álgebra como uma linguagem com cinco aspectos fundamentais: (1) incógnitas; (2) fórmulas; (3) padrões generalizados; (4) representantes (*placeholders*); e (5) relações.

Veja-se o emprego de cada um dos aspectos com exemplos de questões de vários níveis:

1. Incógnitas

   Que número é que adicionado a 3 dá 7?

   Completa: 3 + ___ = 7

   Completa de modo a obteres uma afirmação verdadeira: 3 + $\square$ = 7

   Descobre o ?: 3 + ? = 7

   Resolve: 3 + x = 7

   Em todos estes exemplos há que determinar um valor desconhecido, uma incógnita. O modo como ela é representada é que varia, mas só em finais do séc. XVI é que foi inventado o simbolismo por Viète.

2. Fórmulas

Quando temos a fórmula da área do rectângulo A = LW e pedimos aos alunos para calcular A quando L=5 e W=7 estamos a trabalhar a álgebra.

3. Padrões generalizados

Uma boa estratégia para calcular mentalmente o produto dum número por 19 é multiplicá-lo por 20 e subtrair o número ao resultado. A descrição simbólica é 19n = 20n – n. No fundo estamos a aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtracção.

Também a expressão genérica de propriedades numéricas é álgebra: "Se multiplicarmos dois números em qualquer ordem obtemos o mesmo resultado" tem a tradução algébrica axb = bxa para quaisquer números a e b.

Igualmente se faz álgebra quando se discutem generalizações como "Ao adicionarmos 0 a um número obtemos esse mesmo número", cuja tradução simbólica é a + 0 = a para qualquer número a.

4. Representantes

Nos jogos de dados há por vezes instruções como: "Lança o dado. Avança um número de casas igual ao dobro do número saído". Em linguagem simbólica poderíamos dizer: "Lança o dado. Ao obter d avança 2d".

Também nas folhas de cálculo se usa a álgebra quando se programa uma célula para subtrair os valores de duas outras. Não precisamos de conhecer os valores numéricos dessas células para compreender as instruções.

Situação semelhante é a dos truques numéricos em que se pensa num número, adiciona-se 3, subtrai-se 5, etc., usando as instruções para qualquer número.

5. Relações

Considere-se o problema: "Bob é dois anos mais velho que Marisha. Que idades podem eles ter?" Se Bob tiver 9 anos, Marisha tem 7. Se Marisha tiver 4 anos, Bob tem 6. Não precisamos de saber as idades deles para poder relacioná-las. Usando linguagem simbólica (ou linguagem corrente) podemos escrever esta relação de vários modos representando a idade de Bob por B e a de Marisha por M:

B = M + 2 (Bob é dois anos mais velho que Marisha)

B – M = 2 (A diferença das suas idades é 2)

M = B – 2 (Marisha é dois anos mais nova que Bob)

A tradução destas relações em linguagem corrente é mais trabalhosa que em linguagem simbólica.

Como se pode verificar por esta especificação dos vários aspectos da álgebra, há na verdade muitas situações em que as crianças pequenas trabalham a álgebra, desde que sejam conduzidas para uma perspectiva mais genérica e estruturante dos conteúdos abordados.

Kaput & Blanton (2001), reconhecendo como problemática a abordagem tardia da álgebra nos currículos dos Estados Unidos, propõem o desenvolvimento do raciocínio algébrico de forma a aprofundar a compreensão dos alunos ao desenvolver neles as capacidades de generalizar, exprimir e justificar generalizações. Para além de fornecer uma base de sustentação a estudos posteriores, defendem que esta introdução de ideias algébricas nos níveis elementares, designada por *algebrização* da aritmética, tem também como finalidade acrescentar maior coerência e profundidade à matemática elementar, que tende a centrar-se em procedimentos de aritmética; integrar duas áreas, a aritmética e a álgebra, que têm vindo a ser estudadas separadamente de forma inadequada; e democratizar o acesso a ideias poderosas da matemática.

Na verdade, é comum uma visão muito estreita de álgebra reduzida à manipulação simbólica, o que desvirtua as suas múltiplas facetas e a importância histórica que este ramo da matemática possui. Uma visão mais alargada e aprofundada é composta por cinco vertentes interrelacionadas (Kaput, 1998; Kaput & Blanton, 2001):

1. A álgebra como generalização e formalização de padrões, especialmente como aritmética generalizada. Esta actividade remete para duas subcategorias muito próximas: (a) a generalização de operações aritméticas e suas propriedades (por exemplo propriedades do zero, comutatividade, relações inversas, etc); e (b) a realização de generalizações sobre propriedades numéricas ou relações especiais (por exemplo a soma de ímpares é par; descobrir regularidades na tabela dos cem; características da multiplicação por uma potência de dez).
2. A álgebra como manipulação de símbolos sintacticamente guiada.
3. A álgebra como estudo das estruturas e sistemas abstraídos de cálculos e relações. Esta categoria inclui o pensamento e a generalização para sistemas mais abstractos como operações com diferentes classes de objectos, a aritmética do relógio e suas propriedades, etc. Esta é uma das raízes da álgebra abstracta encarada como disciplina matemática.
4. A álgebra como o estudo das funções, relações e variação correlativa. Esta categoria inclui a generalização de padrões numéricos que proporcionem descrições funcionais ou iterativas.

5. A álgebra como modelação. Esta categoria inclui dois tipos: (a) generalização de padrões construídos a partir de situações ou fenómenos matematizados, em que a generalização é acerca da situação e os padrões e relações têm um papel de suporte à tarefa de modelação mais geral; e (b) generalização de problemas de resposta única por diminuição de condições de modo a poder explorá-los de uma forma mais geral.

Esta conceptualização é um pouco diferente da de Usiskin embora se possam identificar como equivalentes o ponto 2 de Usiskin – Padrões generalizados – e o ponto 1 de Kaput – Generalização e formalização de padrões e aritmética generalizada. Por sua vez, o ponto 5 de Usiskin – Relações – constitui uma parte do ponto 4 de Kaput, já que Usiskin não considera, pelo menos explicitamente, as funções e variação e os padrões em sequências.

Na mesma linha dos autores citados, Schliemann, Carraher & Brizuela (2007) consideram que a álgebra tem sido tradicionalmente considerada uma disciplina largamente distinta da aritmética. Há algumas ideias, técnicas e representações comuns, que correspondem à intersecção, e há que fazer a ponte entre o fim da aritmética e o princípio da álgebra. A Figura 8 clarifica essa interpretação maioritária da relação entre a aritmética e a álgebra:

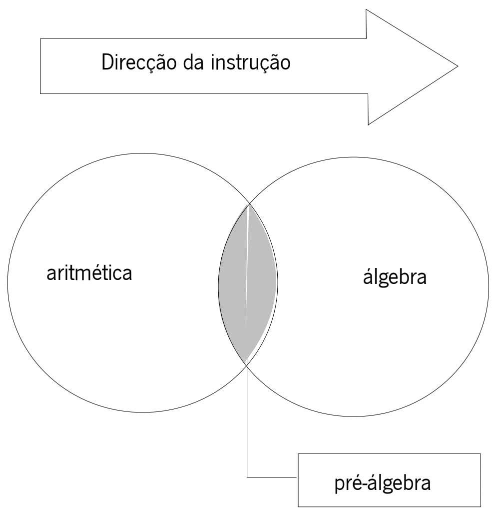


Figura 8. Visão prevalecente da relação entre a aritmética e a álgebra (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007)

A alternativa consiste numa visão da aritmética como parte da álgebra, designadamente a que lida com sistemas de numeração, a recta numérica, funções simples, etc. A Figura 9 clarifica a nova interpretação da aritmética como parte da álgebra:

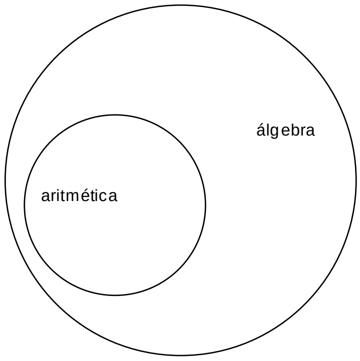


Figura 9. Carácter algébrico da aritmética (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007)

Nesta interpretação, os números concretos são tratados como instâncias de ideias mais gerais. Por exemplo, o número 327 exprime-se como (3x100) + (2x10) + (7x1) o que é uma instância da expressão mais geral (ax100) + (bx10) + (cx1). Outro exemplo consiste em considerar a adição não só como um método para calcular mas também como uma função (e.g. adicionar 3 a um número). Com efeito, as ideias, conceitos e técnicas da aritmética têm um carácter potencialmente algébrico no sentido em que são generalizáveis. Esta visão é consistente com a ideia de aritmética generalizada de Kaput.

Em defesa da integração da aritmética e da álgebra na matemática elementar, Carpenter, Franke & Levi (2003) propõem cinco classes básicas de conjecturas que os alunos podem fazer: (a) conjecturas sobre propriedades fundamentais e operações numéricas; (b) conjecturas sobre classes de números, que incluem pares e ímpares, divisores e critérios de divisibilidade; (c) descrições de procedimentos, que englobam, por exemplo, regras para multiplicar por 10 ou por 100; (d) descrições gerais de resultados de cálculos, envolvendo, por exemplo, a transitividade da relação 'maior que'; e (e) definições, que podem surgir enquanto os alunos formulam conjecturas acerca de propriedades numéricas, e precisam de ser distinguidas destas.

A introdução das ideias algébricas coloca em destaque a distinção entre as noções de incógnita e variável. A noção de variável, em oposição à de incógnita, aparece como qualquer coisa que varia: "Enquanto que a incógnita é um número que não varia, a variável designa uma quantidade cujo valor pode variar." (Radford,1996, p. 47). Este autor situa a origem do conceito de variável na história da álgebra nas antigas tábuas babilónias. Encontra depois um conceito mais elaborado num livro de Diofanto sobre números poligonais. Nessa obra o objectivo principal é estabelecer relações entre números, enquanto que noutra obra de Diofanto, *Arithmetica*, é resolver problemas de palavras, isto é, encontrar o valor de uma ou mais incógnitas. De facto, há uma conceptualização totalmente diferente entre essas duas vertentes do uso de letras. Como afirmam Fujii & Stephens (2008), em $x + 8 = 23$ a letra x não actua como variável mas sim como incógnita.

Nesta ordem de ideias é de referir outro conceito interessante, o de quase-variáveis, definido por Fujii & Stephens (2001; 2008). Estas são variáveis implícitas que os alunos parecem usar em contextos aritméticos. Por exemplo, quando um aluno descobre que a subtracção 32 - 5 pode ser efectuada adicionando 5 a 32 e depois subtraindo 10, é como se pensasse que $32 - 5 = 32 + 5 - 5 - 5 = 37 - 10$. E seja qual for o número, subtrair 5 é o mesmo que adicionar 5 e subtrair 10. Esta estratégia de cálculo mental descoberta pelo aluno para lhe simplificar o cálculo traduz na verdade uma propriedade, a generalização de um procedimento aritmético. Assim, neste trabalho com quase-variáveis, o uso de expressões numéricas com vista a ilustrar relações entre variáveis requer uma mudança de pensamento do cálculo para a investigação de padrões de generalidade e complexidade crescentes podendo deste modo representar uma ponte adequada entre a aritmética e a álgebra.

Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest (2006) defendem a introdução da notação e do simbolismo algébrico como suporte à aprendizagem da matemática desde os primeiros anos. Em particular, apresentam uma estratégia didáctica com alunos de 8-10 anos que recorre à recta numérica comum e a uma recta numérica variável, denominada a "N-recta numérica", onde as crianças podem apoiar-se para expressar operações aditivas sem o recurso a números concretos. Há inicialmente um trabalho com a recta numérica comum (abrangendo também números negativos) onde são exploradas situações aditivas entre outras. Esta recta é projectada ou desenhada em larga escala no chão de modo a que todas as crianças, mesmo as que não estão a intervir no momento, possam acompanhar os raciocínios feitos. Apresentam em seguida a recta numérica variável como meio de representação de operações com quantidades desconhecidas. "N menos quatro", por exemplo, é tratado como o deslocamento de 4 unidades para a esquerda a partir de N, seja qual for o valor de N. Este símbolo é marcado sensivelmente no lugar do zero da recta numérica comum. Com um retroprojector faziam a sobreposição das duas rectas (usando em ambas a mesma métrica) de modo a poder ler o resultado do cálculo de N-4 quando N é sobreposto a um número concreto. Se se sobrepuser N a 7, por exemplo, a marca de N-4 sobrepõe-se a 3. Destaca-se deste estudo apenas esta situação pelo seu interesse e originalidade. Os autores concluem afirmando que as suas investigações em sala de aula sugerem que as crianças podem manejar conceitos algébricos e notação algébrica mais cedo do que habitualmente se supõe, e assim talvez não haja necessidade de se esperar por um "período de transição" depois da aritmética.

Este trabalho focar-se-á essencialmente, no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento algébrico, no primeiro e quarto itens de Kaput, que se consideram mais estritamente relacionados com o 1.º ciclo do ensino básico. De facto, o primeiro item diz respeito à generalização de propriedades numéricas e das operações, ou seja, à aritmética generalizada, e como tal tem fortes ligações com o sentido do número e o cálculo mental. O quarto item relaciona-se com a generalização de padrões numéricos que proporcionem descrições funcionais. Tratar-se-á mais pormenorizadamente, nos pontos seguintes, destes dois aspectos fundamentais.

O sentido do número

O conceito de sentido do número surgiu a partir dos anos oitenta. Howden (1989) descreve o sentido do número como uma boa intuição acerca dos números e das suas relações, que se desenvolve gradualmente como resultado das explorações com números e sua visualização em vários contextos que não se limitem aos algoritmos tradicionais. Em *Princípios e Normas* (NCTM, 2000) não é apresentada uma definição, embora apareçam muitas referências ao termo. Afirma-se, por exemplo: "No seu trabalho com os números, os alunos vão progressivamente desenvolvendo flexibilidade de pensamento sobre os números, que constitui uma característica fundamental do sentido do número. (...) O sentido do número desenvolve-se à medida que os alunos compreendem a sua ordem de grandeza, desenvolvem variadas formas de pensar sobre ele e de representá-lo, utilizam os números como referência e desenvolvem uma percepção exacta acerca do modo como as operações os afectam" (pp.92-93). Na mesma linha estão Fosnot & Dolk (2001) ao defender que calcular com sentido do número significa olhar para os números antes, estabelecer relações, e só depois, jogando com essas relações, decidir que estratégia é adequada – e eficiente.

Segundo McIntosh, Reys & Reys (1992), a expressão *sentido do número* surge em alternativa ao termo mais antigo *numeracia*, de 1959, que pretendia descrever um grau de habilidade suficientemente alto para lidar com exigências matemáticas correntes na vida social.

Essas exigências situavam-se ao nível do domínio de factos básicos e de técnicas de cálculo e fórmulas; porém, nos últimos anos tem havido uma reavaliação do papel e da natureza do cálculo na escola elementar e a consideração do papel crescente da escolha de uma estratégia de cálculo bem como da necessidade de reflexão sobre o processo e o resultado do uso dessa estratégia. De acordo com estes autores:

> O sentido do número refere-se à compreensão geral do número e das operações em paralelo com a habilidade para usar esta compreensão de modo flexível para fazer juízos matemáticos e para desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações (McIntosh, Reys & Reys, 1992, p.3).

No nosso país, a Equipa do projecto *Desenvolvendo o Sentido do Número: Perspectivas e Exigências Curriculares* (2005), bem como o novo Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado em 2007, seguem de perto a definição de McIntosh et al. (1992), que apresentam um modelo para o sentido do número envolvendo e inter-relacionando o número, as operações e os contextos de cálculo:

- Em relação ao número, o sentido do número inclui o seguinte conjunto de compreensões que o aluno deve possuir e utilizar: (a) sentido da ordenação dos números; (b) múltiplas representações de números; (c) sentido da grandeza relativa e absoluta dos números; e (d) sistema de referências.

- Em relação às operações, o sentido do número inclui o seguinte conjunto de compreensões que o aluno deve possuir e utilizar: (a) compreender o efeito das operações; (b) compreender propriedades das operações; e (c) compreender a relação entre operações.

- Finalmente, a aplicação dos números e das operações a contextos computacionais relaciona-se com a resolução de problemas da vida real que requerem raciocínio com números e operações e envolvem a tomada de decisões incluindo os seguintes itens: (a) compreender a relação entre o contexto do problema e o cálculo necessário; (b) ter consciência da existência de várias estratégias; (c) utilizar uma representação ou método eficiente; e (d) avaliar os dados e os resultados.

Como se depreende, a compreensão do sistema de numeração, por exemplo, ajuda a criança a organizar, comparar e ordenar números que encontra à sua volta. Ao contar a partir de vinte começa a descobrir os padrões inerentes ao sistema de numeração. Quando identificados, estes padrões fornecem um apoio poderoso à extensão da sequência de contagem. Ao trabalhar com outros números, por exemplo os decimais, a sequência de contagem continua a proporcionar uma ferramenta poderosa para ajudar o aluno a reconhecer, identificar e repetir padrões que emergem. À medida que o aluno desenvolve a capacidade para detectar esses padrões, vai aprofundando a sua compreensão da ordenação e regularidade do sistema numérico e começa a usar esse conhecimento. Os alunos, ao aprenderem as operações elementares, desenvolvendo compreensão sobre os tipos de situações que podem ser modeladas pelas operações, vão simultaneamente observando e comentando padrões no sistema numérico. Esses padrões, emergindo naturalmente do trabalho, são a base não só da exploração de generalizações acerca do número e das operações mas também das práticas de formular, testar e justificar essas generalizações (Schifter, Monk, Russell & Bastable, 2008). Deste modo, o sentido do número baseia-se e apoia-se na identificação de padrões numéricos e, dado que é promotor de processos de generalização desses mesmos padrões, pode considerar-se que constitui uma competência indispensável à emergência do pensamento algébrico.

O cálculo mental. Uma vez que o sentido do número envolve o pensamento flexível sobre os números e a sua utilização para desenvolver estratégias de cálculo úteis, cabe aqui uma referência especial ao cálculo mental. Na definição de Reys, Lindquist, Lambdin & Smith (2007): "Cálculo mental é cálculo feito 'todo na cabeça' – isto é, sem ferramentas como calculadora ou papel e lápis" (p. 240). No entanto, há variantes a esta definição. As características do cálculo mental indicadas por Buys, citado em Brocardo & Serrazina (2008), consistem em operar sobre os números e não sobre os dígitos, usar relações numéricas e propriedades das operações, e poder recorrer a registos embora se calcule "de cabeça". A sua importância é realçada por diversos autores (McIntosh, 1998; Reys et al., 2007; Heirdsfield, 2002; Callingham, 2005; Hartnett, 2007) por várias ordens de razões fundamentais. Por um lado, na vida diária usamos muito mais o cálculo mental do que o escrito. Por outro lado, embora os algoritmos escritos formais tenham a vantagem de proporcionar um procedimento de rotina que funciona para todos os números, têm a desvantagem de não corresponder ao modo como as pessoas pensam nos números e de desencorajar os alunos de pensar nos números envolvidos ou de tomar decisões enquanto estão a realizar o cálculo. As estratégias de cálculo mental são muito diferentes: podem adaptar-se aos números em causa mas exigindo uma escolha de acordo com esses números, e deste modo necessitando de um conhecimento mais profundo do funcionamento dos números. O cálculo mental é ainda um excelente meio de ajudar os alunos a desenvolver pensamento crítico, o sentido do número, e ainda a resolução de problemas de forma criativa. Por último é realçado o facto de contribuir para a capacidade de estimação.

Alguns autores defendem a importância de um ensino de estratégias de cálculo mental (Reys, 1984; Callingham, 2005; Hartnett, 2007; Reys et al., 2007). Estes últimos autores recomendam que o professor inclua o cálculo mental sistemática e regularmente como parte integrante do seu ensino, realizando pequenas sessões práticas de cerca de 10 minutos, em que os alunos são questionados em cadeia ou tendo como “alvo” um número escolhido onde é preciso “chegar”. Reys (1984) defende que, embora alguns estudantes excepcionais consigam desenvolver por si sós excelentes capacidades de cálculo mental, praticamente todos poderão atingir um nível superior ao que conseguem à partida se lhes forem ensinadas estratégias de cálculo mental cuidadosa e sistematicamente ao longo do seu percurso de matemática escolar. Reys, Reys, Nohda & Emori (1995) defendem o cálculo mental de dois pontos de vista diferentes. O primeiro como capacidade básica, ou seja, como um conjunto de procedimentos que têm de ser ensinados e praticados. O segundo como uma capacidade de pensamento de ordem elevada, quando os alunos inventam as suas próprias estratégias. Por seu lado, Brown, Millett & Askew (2008), referindo-se à Estratégia Nacional de Numeracia desenvolvida em Inglaterra a partir do fim dos anos noventa, realçam a importância de um trabalho sistemático com o cálculo mental, clarificando o modo como esse trabalho deve ser feito pelos professores, referindo-se do mesmo modo a uma primeira parte da aula, de cerca de 10 minutos, para esse efeito. Fosnot & Dolk (2001) argumentam também que o ponto de partida de qualquer cálculo devem ser as construções dos alunos, para evitar a focalização nos procedimentos, que levaria os alunos a adoptá-los e deixar de pensar: Contudo, consideram que as estratégias inventadas pelos alunos não são suficientes já que habitualmente se baseiam apenas na decomposição em unidades, dezenas, centenas, ... e esta estratégia pode não ser a mais eficiente em muitos cálculos. Dão como exemplo a soma 368 + 208 em que a decomposição 300 + 200 + 60 + 16 é muito menos eficiente do que manter o 368 e adicionar-lhe 200 e por fim 8, ou transformar a soma em 370 + 206. Constatando que estas estratégias não são em geral inventadas pelos alunos e que devem fazer parte do seu reportório, é necessário serem ensinadas. Propõem assim o seu ensino através de mini-lições (*minilessons*), sessões de cerca de dez minutos no início da aula de matemática. O ensino do cálculo mental tem de ser feito de modo diferente do ensino tradicional de métodos de papel e lápis. A apresentação de um único método é demasiado rígida, mas deixar os alunos a descobrir as suas próprias estratégias priva os que têm maiores dificuldades de uma apropriação de muitas estratégias úteis (Hartnett, 2007). McIntosh (1998) alerta no entanto para os riscos do ensino directo de estratégias únicas de cálculo mental, argumentando que, sendo muito prescritivas, podem impedir os alunos de usar o seu próprio sentido no número. Assim, defende que não deve exigir-se apenas uma resposta certa e rápida mas a explicação do procedimento. Como não há normalmente um método melhor mas uma boa variedade de estratégias possíveis, os alunos poderão beneficiar da comunicação dos colegas escolhendo cada um o que mais lhe agrada. Aí, o professor poderá aproveitar para ensinar um processo, partindo da discussão em torno de algum dos apresentados, o que é completamente diferente de impor um método do exterior. Na mesma linha, Threlfall (2002) defende a flexibilidade no cálculo mental, argumentando que esta não será conseguida por se ensinar às crianças um conjunto de diferentes estratégias e ensiná-las depois a escolher o melhor método para o problema em mãos, mas antes focando-se no conhecimento e compreensão dos números. Vê assim a necessidade de nas aulas se analisarem os números do problema particular que se está a considerar e pensar sobre esses números. Esta característica "no momento" do cálculo flexível aconselha a comunicação entre alunos sobre o seu método pessoal, e a chamada de atenção pelo professor de factos e relações, apoiando as descrições dos alunos com linguagem explícita e revelando formas de registo. Resumindo, estes autores discordam do ensino de estratégias desligadas de cálculos reais, já que podem induzir, como no cálculo escrito, procedimentos de aplicação cega e sem compreensão, mas defendem o ensino do cálculo mental por análise das "estratégias" ou métodos que surgem inevitavelmente nas tentativas de cálculo no momento, o reforço da comunicação entre alunos e o apoio e promoção de discussão e registo por parte do professor.

Heirdsfield (2004) desenvolveu uma experiência de ensino do cálculo mental com dois professores do 3.º ano de escolaridade com base em resultados de investigação nessa área. Esses resultados foram apresentados aos professores para poderem constituir uma base do programa de ensino. Foram feitas entrevistas individuais aos alunos antes e depois da experiência para monitorizar o progresso dos alunos e informar sobre os resultados do programa. Foram utilizados na experiência dois modelos citados na literatura: a tabela dos cem e a recta numérica vazia, bem como incorporadas situações da vida real. As duas estratégias mais utilizadas foram *agregação (aggregation)* (e.g. 46+28: 46+20=66, 66+8=74) e *compensação holística (holistic compensation)* (e.g. 46+28: 46+30=76, 76-2=74). Algumas actuações de índole didáctica dos professores descritas pela investigadora foram: (a) os alunos poderiam usar qualquer das estratégias ensinadas ou empregar qualquer outra estratégia que considerassem útil; (b) os alunos eram constantemente instados a partilhar as suas estratégias com a turma; (c) os alunos eram encorajados a avaliar as estratégias usadas, e identificar as suas semelhanças e diferenças; (d) os exemplos de cálculo eram dados tanto em contextos reais como em expressões numéricas na forma horizontal; (e) os alunos usavam uma tabela dos cem pessoal ou a recta numérica vazia; (f) estes modelos foram utilizados em toda a duração do projecto, já que este se estendeu por um período curto de tempo. Como resultados observa que os alunos se envolveram com entusiasmo nas tarefas propostas e passaram a gostar mais de matemática, com uma ênfase no processo e não no produto. Desenvolveram também uma maior confiança na sua habilidade para fazer matemática, e uma maior competência no uso com compreensão de várias estratégias apropriadas, bem como no reconhecimento de diferentes métodos de registo dos seus cálculos. Quanto aos professores envolvidos, a reflexão sobre a prática foi favorável, tendo-se tornado mais conscientes do que constitui uma boa prática e o que está em causa no desenvolvimento do cálculo mental dos seus alunos.

Em suma, tendo sempre em vista uma construção inicial dos alunos, o professor deve contemplar o ensino do cálculo mental, embora sem cair no excesso de procedimentos prescritivos; tal objectivo pode ser alcançado se este ensino for acompanhado do recurso à comunicação entre alunos e entre aluno e professor. Com efeito, os alunos não podem ser deixados à sua sorte, pois métodos de cálculo flexíveis, especialmente métodos mentais, permitem o raciocínio efectivo em qualquer área da matemática que envolva números (Van de Walle, 2007), levam os alunos a tomar decisões e a criar as suas próprias estratégias, promovem uma grande compreensão da estrutura do número e das suas propriedades, contribuem para o desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas, são a base da estimação (Reys, 1984) e podem ser usados como um veículo para promover o pensamento, a conjectura e a generalização baseada na compreensão conceptual (Heirdsfield, 2002).

Diversos autores (Kriegler, 2001; Heirdsfield, 2002) consideram como uma das componentes do pensamento algébrico o desenvolvimento de estratégias de cálculo com compreensão. Assim, esta competência, particularmente ligada ao cálculo mental, pode estabelecer a ponte entre o sentido do número e o pensamento algébrico encarado a níveis elementares, já que a execução tradicional, puramente procedimental, de uma técnica de cálculo é enriquecida com a descoberta de padrões e relações que suscitam e aprofundam a compreensão da estrutura numérica subjacente.

Padrões

Utiliza-se o termo padrão quando, numa disposição ou arranjo de números, formas, sons, cores, se identifica alguma regularidade (Vale, Palhares, Cabrita & Borralho, 2006). O tema dos padrões permeia e é transversal a toda a matemática. Com efeito, o trabalho do matemático é, de certa forma, detectar a regularidade e a invariância no seio de situações aparentemente caóticas. Por isso alguns autores definem a matemática como a ciência dos padrões (Devlin, 2002). Por seu lado, os termos 'padrão' e 'regularidade' aparecem associados. Para Ponte (2009) os conceitos são complementares, já que 'padrão' identifica a unidade de base que se replica, de forma repetitiva ou de acordo com alguma lei de transformação, enquanto que 'regularidade' aponta para a relação existente entre os diversos objectos, aquilo que é comum a todos eles ou que de certo modo os liga. Contudo, esta conceptualização parece remeter o termo 'padrão' essencialmente para contextos não numéricos. No presente trabalho, que envolve sobretudo contextos numéricos, os dois termos surgem quase como sinónimos. Identifica-se o termo padrão com algum tipo de regularidade, de acordo com Orton (2009), que associa a padrão numérico as noções de ordem, regularidade, repetição e simetria em e entre objectos matemáticos tais como símbolos.

Qual é a importância dos padrões na matemática escolar? A procura e a identificação de padrões utilizam e enfatizam a exploração, investigação, conjectura e prova, desafiando os alunos a recorrer a um tipo de pensamento de ordem superior e inserem-se na capacidade de resolução de problemas (Vale & Pimentel, 2005). Podem ainda permitir que os alunos descubram relações, estabeleçam conexões e façam generalizações. No caminho para a álgebra, descrita como a expressão da generalidade, a primeira fase pela qual o aluno passa é sempre "ver" e isto significa compreender mentalmente um padrão ou uma relação (Orton, Orton & Roper, 1999). Uma vez que a capacidade de "ver" se reveste de extrema importância, o professor tem de estar atento a esta questão para poder orientar o aluno e proporcionar-lhe situações alternativas.

O trabalho desenvolvido pela equipa do projecto *Matemática e Padrões no ensino básico: perspectivas e experiências curriculares de alunos e professores* (Vale, Barbosa, Borralho, Barbosa, Cabrita, Fonseca & Pimentel, 2009) apresenta a generalização como uma ideia poderosa que é o culminar de um processo em que os alunos passam por diversas experiências de aprendizagem que valorizam a descoberta, continuação, completamento e construção de padrões. A generalização pode ser formulada pelos alunos de modo intuitivo, recorrendo à linguagem corrente, ou mais formalizado, recorrendo à linguagem simbólica da matemática, às variáveis a às fórmulas, e apoia-se em várias formas de representação como desenhos, esquemas, tabelas e gráficos. Para atingir esse objectivo apresenta-se uma proposta didáctica que valoriza a descoberta de padrões em contextos visuais. Começa-se com tarefas de contagens, com suporte visual, privilegiando a intuição visual acerca dos números e das suas relações, como requisito para o trabalho posterior com sequências, de repetição e de crescimento, para finalizar com problemas em que a sequência não é apresentada de modo explícito e terão de ser os alunos a descobri-la e explorá-la para chegar à solução. As contagens visuais apoiam-se no arranjo visual para a descoberta de estratégias de cálculo intuitivas e simples mas evitando as contagens de um em um, e podem surgir inicialmente em contextos ligados à dezena (moldura do dez) ou posteriormente noutros mais variados, com predomínio de arranjos rectangulares e situações de simetria. Este tipo de contagens é um bom ponto de partida para o reconhecimento de padrões em sequências figurativas, apoiando a sua exploração, cujo objectivo inclui a abordagem de conceitos matemáticos, tanto numéricos como geométricos. A generalização propiciada por essa exploração, através de regras que os alunos podem formular recorrendo ou não à simbologia, é um primeiro passo para o uso de variáveis e o conceito de função, permitindo assim que a aprendizagem da álgebra se processe de forma gradual. Nas sequências de crescimento, quando os alunos procuram uma lei de formação, relacionando a posição de um termo da sequência com o seu valor, estão a trabalhar o conceito de função, que pode ser descoberto directamente na sequência ou recorrendo a uma tabela. Apresenta-se um exemplo ilustrado na Figura 10.

Malmequeres em T

Considera a sequência de malmequeres em T.

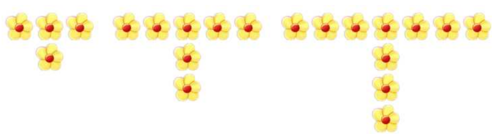


Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. Quantos malmequeres tem o 4.° T?
2. De quantas formas diferentes consegues ver esta sequência?
3. Quantos malmequeres terá o 100.° T? Explica como pensaste. Discute com o colega do lado.
4. Determina o número de malmequeres necessários para construir uma figura de qualquer ordem.

Figura 10. Tarefa de padrão de crescimento em sequência (Vale et al., 2009)

Nesta tarefa, a abordagem pode ser feita usando inicialmente material manipulável e deve basear-se num raciocínio anteriormente trabalhado através das contagens visuais. Este procedimento proporciona a identificação e expressão de múltiplas formas de ver o padrão. Por exemplo, centrando-nos na 3.ª figura, esta pode ser vista como 7+3 ou 3+3+3+1 ou 3x3+1 ou 3x4-2. A observação de várias figuras e do modo como evoluem permitirá finalmente a generalização para a figura de ordem 100 ou até de qualquer ordem. A expressão da generalização poderá ser feita usando a linguagem natural ou, eventualmente, a linguagem simbólica. É de notar a importância do registo das descobertas nos dados usando, por exemplo, uma tabela, como se mostra na Figura 11. Este registo não deve traduzir apenas o número total de malmequeres por contagem, mas sim expressar o que o aluno "vê". Só assim será possível atingir a generalização para uma figura de qualquer ordem. Na tabela dá-se um exemplo de uma possibilidade de "ver".

número da figura	número de malmequeres
1	1+1+1+1 = 3x1+1
2	2+2+2+1 = 3x2+1
3	3+3+3+1 = 3x3+1
4	4+4+4+1 = 3x4+1
…	…
100	100+100+100+1 = 3x100+1
n	n+n+n+1 = 3xn+1

Figura 11. Tabela de registo do que o aluno "vê"

Outros autores defendem igualmente a introdução precoce de ideias algébricas através dos padrões. Os investigadores australianos Warren & Cooper (2005) dedicam um trabalho ao raciocínio funcional que exploram com alunos do 2.º ano (6-7 anos). A experiência de ensino que conduzem com três professores deste nível não exige o conhecimento do número mas lida com a característica fundamental de uma função, isto é, a correspondência de um conjunto para outro, e consequentemente o conceito de mudança. A tarefa envolve a correspondência de cores, começando por duas e indo aumentando gradualmente até chegar à tarefa mais difícil: descobrir a regra em que se baseia a correspondência de cada cor do arco-íris com a cor seguinte do arco-íris, tal como é ilustrado na Figura 12.

Entrada	Saída
Vermelho	Laranja
Laranja	Amarelo
Amarelo	Verde
Verde	Azul
Azul	Violeta
Violeta	Vermelho

Figura 12. Registo de resposta à função arco-íris (Warren & Cooper, 2005).

Dada a idade dos alunos foram usados pauzinhos de madeira pintados com as seis cores do arco-íris e uma caixa representando a máquina funcional. Foi também trabalhada implicitamente a noção de função inversa invertendo a relação – no caso do exemplo dado, encontrar a cor anterior do arco-íris.

Os resultados apontam para dificuldades sobretudo na tarefa de inverter. Os investigadores apresentam uma interessante conclusão realçando diferenças entre a continuação, identificação e construção de padrões (subentende-se em sequências) e a mudança. Embora ambas envolvam generalização, a segunda é mais complexa dada a forma aleatória como são apresentadas as instâncias, o que exige que o aluno comece por ordenar os dados e depois formule hipóteses de relações entre a entrada e a saída. Assim, o aluno é forçado a pensar relacionalmente e não sequencialmente. A Figura 13 ilustra esta distinção.

PADRÕES		MUDANÇA	
1	4	5	16
2	7	22	67
3	10	2	7
4	13	13	40
Etc.		Etc.	

Figura 13. Comparando representações para padrões e mudança (Warren & Cooper, 2005).

Esta mesma ideia está presente em Carraher & Schliemann (2007) quando discutem a validade em termos de significado algébrico das tabelas e, de modo geral, das abordagens escalares, já que os alunos podem preenchê-las em coluna sem precisarem de descobrir uma regra geral para obter f(x) à custa de x, ou seja, limitando-se a um raciocínio por recorrência que, embora correcto, está incompleto já que se torna impraticável para valores maiores da variável independente. Um exemplo do exposto pode ver-se na Figura 14.

1	10
2	13
3	16
4	19
...	...

Figura 14. Preenchimento por uma estratégia de colunas isoladas

A continuação do seu preenchimento pode ser feita pela descoberta do padrão *adicionar um* na primeira coluna e do padrão *adicionar três* na segunda, sem que os alunos precisem sequer de se dar conta de que há uma relação funcional entre a primeira e a segunda colunas traduzida por *o triplo adicionado de sete*. Assim, embora o raciocínio para a obtenção de cada linha esteja correcto, torna-se impraticável a descoberta da centésima linha da segunda coluna, por exemplo, já que teria de se recorrer à 99.ª e adicionar-lhe três unidades. Deste modo, o pensamento escalar revela-se incompleto, pois não conduz à forma de representação de uma função e a compreensão do significado algébrico das tabelas perde-se. Esta tornar-se-ia muito mais fácil de abordar como entrada e saída, fornecendo a imagem de uma máquina transformadora do elemento da primeira coluna no elemento da segunda.

Schliemann, Carraher & Brizuela (2007) apresentam um estudo realizado com crianças brasileiras dos sete aos onze anos e depois replicam o estudo com crianças norte-americanas do terceiro ano. Os estudos assentam em entrevistas individuais feitas às crianças e que incluíam várias tarefas em contextos diferentes. Dá-se apenas um exemplo, o da interpretação da adição como função. Para isso é necessário enquadrá-la como uma operação num conjunto de números ou quantidades. Os autores descrevem um episódio de sala de aula com alunos de 8-9 anos (3.º ano de escolaridade) correspondendo à oitava aula de um conjunto em que previamente tinham sido realizadas actividades relacionadas com o preenchimento de tabelas de funções do género apresentado na Figura 15:

Caixas de bolos	Preço
	\$3
2	\$6
3	
	\$12
5	
6	
	\$21
8	
9	
10	\$30

Figura 15. A tabela incompleta (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007)

Os investigadores aperceberam-se de que os alunos preenchiam correctamente as tabelas mas sem se concentrarem nas relações essenciais entre os valores. Deste modo o professor, David, resolveu introduzir um jogo numérico que introduziria a convenção para relacionar valores de um conjunto para outro. Faz-se de seguida a transcrição desse episódio por se achar interessante e ilustrativo do trabalho desenvolvido neste domínio:

> David: Vamos trabalhar do fim para o princípio.
> Alunos: Sim!
> David: Vou partir dos números e vocês vão-me dizer qual é a regra. Conseguem fazer isso?
> Alunos: Sim!
> David: Está bem, vou começar. Não vou dizer-vos qual é a regra. Esperem. Vou partir do 3. E vou chegar ao 6. Estão com atenção? Ok. Agora, vou partir do 7 e vou chegar ao 10.
> O professor vai escrevendo no quadro:
> $3 \longrightarrow 6$
> $7 \longrightarrow 10$
> $5 \longrightarrow 8$
> Aluno: Posso dizer a regra?
> David: Alguém já descobriu a regra? Se eu começar no 5, vou chegar ao ...
> Aluno: 8.
> David: Sim, vou chegar ao 8. [Risos]. Penso que alguém sabe a regra. [Sara levanta a mão]. Jennifer, o que estás a pensar, como é a regra?
> Jennifer: Mais 3?
> David: Sim, se eu partir de *n*, então vou chegar aonde?
> Aluno: Mais 3.
> David: 3?
> Aluno: Tem de somar 3.
> David: Tenho de somar 3 a quê?
> Aluno: Ao *n*.
> David: Sim, ao *n*. Então como é que vou escrever isso?
> Alunos: *n* mais 3.
> David: Pronto, aqui está a regra! [Escreve $n \longrightarrow n + 3$]
> Aluno: Oh, precisamos de uma coisa mais difícil do que isso!
> David: Precisam de uma coisa mais difícil?
> Aluno: Sim! (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007, pp.68-69)

Este episódio revela que os alunos compreendem o conceito de variável, já que aceitam o n como representante de todo e qualquer número. É de notar que já tinha sido trabalhado em aulas anteriores o desenvolvimento de notações para variáveis. Os alunos já tinham familiaridade com o uso de uma letra para um valor indeterminado embora tivessem vindo a considerar as letras essencialmente como incógnitas. Mas agora foi-lhes pedido que usassem a letra numa notação abreviada que expressa um conjunto de valores antes e depois da aplicação de uma regra, ou seja, como variável.

A principal conclusão dos autores é que os alunos do 1.º ciclo podem raciocinar algebricamente. Verificou-se que as crianças usaram intuitivamente representações icónicas para incógnitas e desenvolveram notações apropriadas para representar os elementos e as relações presentes nos problemas. O estudo questiona deste modo a noção clássica da psicologia que considera que há factores de desenvolvimento das crianças impeditivos de aprendizagens precoces de temas abstractos como a álgebra. O estudo discute ainda a questão da importância do contexto na aprendizagem. Há várias abordagens à origem do conhecimento, desde o Platonismo que atribui o conhecimento matemático à reminiscência, dando assim pouca importância à experiência, passando pelo estruturalismo piagetiano em que as acções internas constituem esquemas em que se baseiam as operações lógico-matemáticas, até à mais recente teoria da cognição situada que nega a independência do conhecimento das situações que dão origem ao pensamento. Ora neste estudo, um pouco contra-corrente, embora os investigadores reconheçam que os problemas contextualizados e o realce nas quantidades ajudam a dar significado a relações matemáticas e estruturas, a constatação de que alunos do 3.º ano podem aprender álgebra, tendo gosto em trabalhar com relações numéricas puras, dissociadas de qualquer contexto, abala um pouco a noção prevalecente de que a aprendizagem tem de ser situada.

Num trabalho posterior, Warren & Cooper (2008) continuam a defender a exploração de padrões, formulando as seguintes características do seu trabalho na sala de aula: (a) acreditar que os alunos, desde muito novos, podem envolver-se em discussões acerca de generalizações e exprimir essas generalizações utilizando sistemas de notação; (b) usar materiais que concretizam as ideias matemáticas a ser exploradas; (c) escolher actividades com números adequados ao domínio cognitivo dos alunos com quem se trabalha; (d) encorajar os alunos a partilhar e defender os seus entendimentos com colegas; (e) colocar questões directivas que atinjam o centro da matemática envolvida na actividade; (f) introduzir linguagem explícita que ajude os alunos a formular respostas verbais; (g) usar uma grande variedade de representações para ilustrar a mesma ideia matemática; (h) encorajar os alunos a visualizar os padrões de mais de uma maneira; e (i) aceitar que os alunos errem.

Apresentam ainda quatro acções importantes que apoiam o desenvolvimento do pensamento algébrico na escolaridade básica através de actividades de padrões. A primeira envolve a decomposição dum padrão de repetição no motivo que se repete, para ajudar o aluno a distinguir os padrões de repetição dos de crescimento. Também apoia a evolução dos padrões de repetição para os de crescimento relacionando padrões de crescimento geométricos com padrões numéricos. A segunda inclui a representação física dos conjuntos de dados que estão em discussão em relação à expressão da generalização. A observação dos grupos de repetição sucessivos e a introdução de cartões com linguagem posicional (e.g. 1.º passo, 2.º passo, 3.º passo), para colocar debaixo dos passos dos padrões de crescimento, certamente ajudou os alunos a centrarem-se nos elementos fundamentais em discussão, os dois conjuntos de dados e a relação entre eles. A terceira acção envolve a continuação de padrões, registando os dados em tabelas de valores, e usando discussões explícitas, linguagem e símbolos para ajudar os alunos a expressar generalizações. Em particular, o uso de regras "através", regras de posição, regras "para baixo" e regras de crescimento ajudou os alunos a distinguir entre pensamento co-variacional e variando apenas numa direcção. A quarta incorpora reconhecer a sinergia entre o padrão visual e as tabelas de valores e reconhecer a importância que cada um desempenha na expressão da generalização e na criação de múltiplas representações da mesma relação. A maior parte dos alunos considerou difícil a manipulação visual de padrões para representar a generalização com diferentes expressões. Actividades centrando-se na desconstrução e reconstrução do próprio padrão facilitaram este processo.

Na mesma linha da introdução precoce de ideias algébricas no currículo de matemática elementar através da algebrização da aritmética, Rivera (2006) subscreve, não o afastamento dos conceitos, processos e operações tradicionais e fundacionais que levam à proficiência aritmética que todos os alunos devem possuir, mas sim a re-orientação do pensamento matemático das crianças para as relações e para competências algébricas poderosas como o trabalho com padrões e a generalização. Neste sentido, e fazendo uma súmula de resultados de investigação nesta área, este autor faz, entre outras, as seguintes recomendações didácticas: (a) Abordar os sistemas numéricos de modo que os alunos tomem consciência da existência de propriedades ou relações inerentes que devem ser articuladas matematicamente. Por exemplo, descobrir a relação existente entre os seguintes pares de números: (3,6), (7,10), (5, 8), ...Estes poderão ser representados de diversas formas, tais como uma tabela ou um diagrama sagital; (b) Ensinar os alunos a valorizar as representações informais e formais. Um dos objectivos do ensino é fazer a ponte entre as representações espontâneas das crianças e os sistemas de representação formais validados pela comunidade matemática. Parece também haver uma relação entre a competência de representação e a facilidade de fazer generalizações, um processo importante em álgebra; (c) Explorar funções de modo que as crianças possam começar a desenvolver a predisposição para a modelação algébrica. Uma forma será ensinar as quatro operações numa perspectiva funcional, não apenas como um processo que produz um resultado mas como um processo de mudança. Tarefas como descobrir uma regra ou fórmula duma tabela de valores ou sequência de números ou representar pontos num referencial cartesiano começam assim a ser vistas como extensões naturais do seu trabalho com números.

A generalização

Como se pode ver pela revisão efectuada, a generalização surge como trave-mestra do pensamento algébrico. Torna-se assim necessário procurar compreender e caracterizar este processo cognitivo.

Em termos filosóficos a generalização está na origem de todos os conceitos. Se a generalização não fosse possível viveríamos num mundo de objectos particulares, todos diferentes, e o conhecimento reduzir-se-ia a um perpétuo "*a* é diferente de *b*" (Radford, 2008).

Mason afirma que "Uma aula que não dê aos alunos a oportunidade de generalizar não é uma aula de matemática" (Mason & Johnston-Wilder, 2004, p.137). Noutro trabalho, Mason (1996) defende mesmo que um dos maiores erros pedagógicos cometidos, baseado numa má interpretação da teoria de Piaget acerca do papel dos objectos concretos na aprendizagem das crianças, foi a produção de programas de ensino que realçam o particular, desviando assim a atenção e tornando mais difícil a apreciação do geral.

Mason, Drury & Bills (2007) distinguem entre generalização empírica, ou a partir de casos, e generalização estrutural. A primeira olha para alguns casos particulares e infere uma lei geral que resume as características dos casos observados, e estabelece ainda a plausibilidade da inclusão de casos não examinados, fazendo a ponte entre o conhecido e o desconhecido. A segunda ocorre quando num caso particular se reconhecem facetas generalizáveis, ou seja, um exemplo particular é visto como genérico, ilustrando relações que são percebidas como propriedades, dominando numa classe de instâncias ou exemplos similares. O exemplo genérico é, assim, um representante característico da classe, no dizer de Balacheff, citado em Mason et al. (2007). Estes autores dão como exemplo para o primeiro tipo a tarefa de generalizar as seguintes observações: $3+4+5=3x4$; $6+7+8+9+10=5x8$; $7+8+9+10+11+12+13=7x10$. Para o segundo tipo apresentam o exemplo do professor que, depois de deduzir as equações da circunferência de raio 2 e centro (3,5), $\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=2$ e $(x-3)^2+(y-5)^2=4$, pergunta aos alunos: Donde é que vieram o 3, o 4 e o 5 nesta segunda equação?

Polya (2003) define generalização como

> [...] a passagem da consideração de um objecto para a consideração de um conjunto que contém esse objecto. Ou a passagem da consideração de um conjunto restrito para um conjunto, mais abrangente, que contém o conjunto restrito (p.131).

Polya está aqui a referir-se ao que Mason et al. (2007) designam por generalização a partir de casos. Exemplificando com a soma 1+8+27+64=100, aquele autor distingue quatro fases neste processo: (1) Observação do caso particular. Poderá notar-se que a soma pode ser expressa como $1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$; (2) Generalização. A pergunta "Acontecerá muitas vezes que a soma de cubos consecutivos seja um quadrado perfeito?" conduz à generalização, pois conduz, de uma simples observação, a uma lei geral; (3) Formulação de uma conjectura baseada nos casos observados. No caso corrente, a conjectura seria "A soma dos primeiros n cubos é um quadrado perfeito"; e (4) Refinamento da conjectura com novos casos. Procurando alguma outra analogia, alguma regularidade mais expressiva, podemos notar que as bases dos quadrados não são todos os inteiros, mas os números 1, 3, 6, 10, 15, que podem exprimir-se como 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 1+2+3+4+5. E deste modo a conjectura toma a forma $1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$. Polya conclui que a matemática, sendo uma ciência dedutiva quando é apresentada, é em muitos casos uma ciência indutiva experimental quando está em desenvolvimento. A diferença para as ciências experimentais clássicas é que na matemática há que incluir, depois deste trabalho prévio, uma autoridade adicional: a demonstração rigorosa.

A generalização é uma das facetas do raciocínio matemático. English (2004), discutindo a natureza do raciocínio matemático, inclui neste processo a recolha e análise de dados, o estabelecimento de conjecturas, a construção de argumentos, a organização e validação de conclusões lógicas e a prova de afirmações, mas afirma que as perspectivas actuais sobre o raciocínio realçam o desenvolvimento e a justificação de generalizações. Quando os alunos progridem da instância particular para o caso geral, por exemplo na identificação, extensão e generalização de padrões, estão a efectuar raciocínio indutivo. Em contraste, a dedução envolve raciocinar logicamente com base em afirmações gerais (premissas) para tirar conclusões acerca de casos particulares. Aquela autora refere também a analogia como a capacidade para raciocinar com padrões relacionais, definindo-a como o centro da cognição humana e estreitamente ligada ao desenvolvimento de capacidades de representação. Os processos de raciocínio por analogia abarcam a construção de relações ou correspondências entre qualquer entidade física ou simbólica e o conceito abstracto que ela transmite.

A propósito dos dois tipos clássicos de raciocínio, o indutivo e o dedutivo, tomados como complementares, isto é, tudo o que não seja raciocínio dedutivo tende a ser considerado indutivo, há autores que acrescentam um outro tipo: o raciocínio abdutivo. Rivera & Becker (2007) definem o raciocínio abdutivo como gerador de hipóteses, não no mero sentido de "palpites" mas na selecção de hipóteses que produzem a melhor explicação, embora sejam inferências falíveis e ampliáveis. São apontadas como exemplo de abduções as inferências analógicas e causais, esclarecendo-se deste modo o papel e o lugar do raciocínio por analogia como incluído no raciocínio abdutivo. A abdução é criativa pois, tal como a indução, parte de "conhecimento incompleto", contrariamente à dedução, onde não há lugar para a descoberta já que não pode basear-se em conhecimento incompleto. Contudo, enquanto que a abdução consiste na escolha da hipótese, a indução já envolve a sua testagem. A abdução é o processo que introduz uma nova ideia, a formulação de uma conjectura; a indução corresponde à etapa seguinte, a de testar a conjectura em mais dados. Este processo pode ser cíclico até ser construída uma generalização da regularidade R na forma F, que se assume abranger toda a classe de objectos. O esquema da Figura 16 ilustra esta ideia:

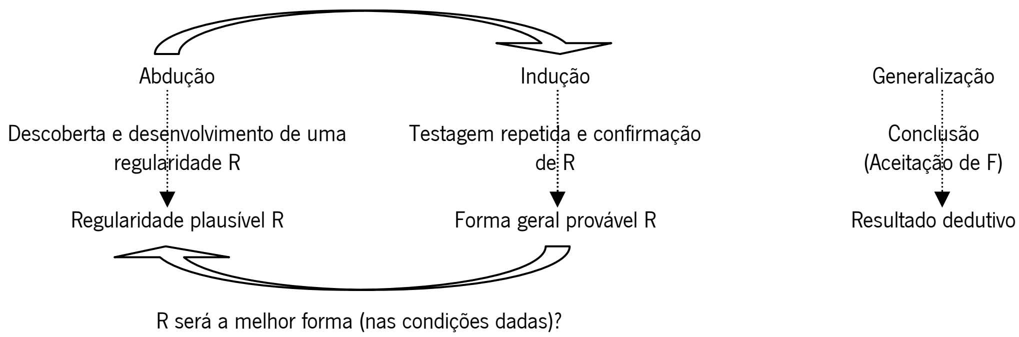


Figura 16. O processo de raciocínio abdutivo-indutivo em padrões lineares (Rivera & Becker, 2007).

Assim, para estes autores, o processo de generalização ocorre quando há aceitação de uma forma geral obtida por um processo cíclico de abdução e indução.

Os investigadores Radford, Bardini & Sabena (2007) defendem que, embora a expressão da generalização e a entrada no reino da álgebra tenha uma componente simbólica culturalmente sofisticada, há caminhos para a álgebra proporcionados por vários modos mais informais. Assim, realçam a importância das exclamações e gestos dos alunos que não apenas focam partes do seu campo perceptual mas também proporcionam um modo de perceber e exprimir o seu sentido do geral. Apresentando como exemplo a tarefa para alunos do 8.º ano em que era dada a sequência apresentada na Figura 17 e se pedia que continuassem a sequência para o 4.º e o 5.º termo e em seguida descobrissem o número de círculos da figura 10 e da figura 100, discutem o processo segundo o qual os alunos começam por atender aos dados perceptuais (os primeiros termos da sequência) e evoluem na tentativa de transcender o particular para atingir o geral.

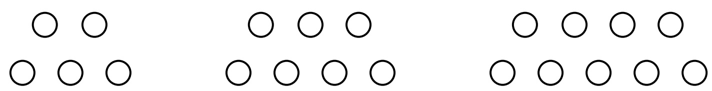


Figura 17. Sequência de figuras dada aos alunos do 8.º ano (Radford, Bardini & Sabena, 2007)

Estes autores, centrando-se no campo da generalização algébrica de padrões, elaboram assim a ideia de generalização como "uma mudança de atenção que conduz a pessoa a *ver* o geral no e através do particular" (pp.525-526). O modelo teórico escolhido, baseado na Teoria da Actividade de Leontiev, e o estudo efectuado por estes investigadores estabelece que a generalização pode ser considerada um processo de objectificação, isto é, de tornar qualquer coisa aparente, o que só se consegue pela tomada de consciência. Ora esta não é passiva mas produz-se através de recursos semióticos diversificados como palavras, gestos, símbolos matemáticos, gráficos e artefactos. Esta formulação do problema da generalização e da cognição em geral como uma coordenação complexa de recursos semióticos tem implicações didácticas: os professores e os educadores matemáticos têm de reconhecer o valor, no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos, de outros sistemas semióticos para além dos símbolos algébricos alfanuméricos. Não que estes não sejam importantes mas o certo é que impõem uma contracção semiótica enorme ao exigirem a expressão com apenas três ou quatro símbolos. Em suma, o caminho para a produção da fórmula deve ser um refinamento progressivo de uma ideia geral objectificada com diferentes recursos (linguagem, gestos, ritmos), cuja utilização é já uma expressão de generalidade e que conduz a um aprofundamento das relações matemáticas gerais.

Noutro trabalho, Radford (2006) distingue entre generalização aritmética e algébrica, definindo esta última como sendo a capacidade de descobrir algo de comum entre alguns objectos particulares, estendendo e generalizando este aspecto comum a todos os termos da sequência, e sendo capaz de fornecer uma expressão directa de qualquer termo da sequência. Se a generalização feita apenas relaciona cada termo com o anterior – ou anteriores – num processo recursivo, este autor designa-a por generalização aritmética. Outros autores introduzem uma terminologia equivalente: a generalização próxima e a generalização distante (Stacey, 1989) ou a generalização local e a generalização global (Mason, 1996).

Síntese

Da breve revisão da literatura sobre teorias de aprendizagem as ideias que se defendem sobre ensino e aprendizagem foram convergindo progressivamente para um modelo construtivista, em que o aluno constrói o seu conhecimento, numa perspectiva sociocultural, em que o professor assume um papel fundamental de facilitador, construindo inicialmente para os alunos *andaimes* temporários que lhes permitem envolver-se em actividade e aos quais apresenta as ferramentas próprias da matemática; estes andaimes podem basear-se, por exemplo, no questionamento feito pelo professor e na apresentação do seu próprio modo de pensar matematicamente. Neste processo tem particular importância a interacção com os colegas, devendo os alunos ser chamados a comunicar e defender as suas ideias. As tarefas actuam aqui como mediadoras, despoletando a actividade. À medida que os alunos vão criando significado vão sendo capazes de produzir generalizações e neste processo vão construindo e lapidando de forma gradual o seu conhecimento conceptual.

Mudando o foco para o desenvolvimento do pensamento algébrico, verifica-se que as recomendações curriculares mais recentes de vários países consideram as vantagens da introdução de ideias algébricas nos primeiros níveis de escolaridade básica. O desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade é considerado importante não só como preparação para estudos mais avançados, procurando resolver o insucesso dos alunos na álgebra, mas também para dar profundidade ao trabalho com a aritmética, que muitas vezes não se apoia na compreensão de conceitos mas apenas na mecanização de procedimentos. Estas são também, como se viu, as recomendações do novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) no nosso país.

De forma consistente entre os vários autores analisados (Kieran, 2004; Mason, 1996; Cai & Moyer, 2008; Carraher & Schliemann, 2007; Usiskin, 1999; Kaput, 1998; Kaput & Blanton, 2001; Blanton & Kaput, 2003; Rivera, 2006), o desenvolvimento do pensamento algébrico tem como base a generalização e formalização de padrões e a aritmética generalizada no sentido da análise da estrutura que permanece invariante ao longo dos vários cálculos, numa deslocação dos números particulares para as relações entre conjuntos numéricos e para a apreensão da estrutura subjacente. Nesta base relaciona-se com o conceito de sentido do número (McIntosh et al., 1992), definido como a capacidade de compreender e lidar com os números e operações de forma flexível de modo a fazer julgamentos e a desenvolver estratégias úteis. Para esta capacidade contribui fortemente o desenvolvimento de um cálculo mental flexível e adaptado a cada situação, por análise das “estratégias” ou métodos que surgem inevitavelmente nas tentativas de cálculo no momento, o reforço da comunicação entre alunos e o apoio e promoção de discussão e registo por parte do professor, já que este tipo de cálculo se dirige mais à compreensão do funcionamento dos números e das suas relações e propriedades (McIntosh, 1998; Threlfall, 2002).

Os trabalhos de investigação analisados, por seu lado, fundamentam estas opções curriculares ao concluírem que é possível aos alunos aprender álgebra antes da adolescência, integrando conceitos algébricos e representações no seu pensamento. Embora sejam várias as facetas do pensamento algébrico (Mason, 1996; Usiskin, 1999; Kaput & Blanton, 2001; Kieran, 2004), os trabalhos revistos são unânimes na consideração de que a generalização está no centro do pensamento algébrico e assim a abordagem da álgebra nos primeiros anos deve assentar numa visão da aritmética como parte da álgebra em que os factos aritméticos são encarados como instâncias de ideias mais gerais (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007) e na exploração e generalização de padrões que permitam interpretações funcionais (Warren & Cooper, 2008; Radford, 2008; Rivera, 2006; Vale et al., 2009). Alguns autores valorizam especialmente as relações funcionais (Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006; Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007), defendendo que as operações aritméticas sejam encaradas desde o início como funções, ou abordando os conceitos de função e mudança mesmo independentemente dos universos numéricos (Warren & Cooper, 2005). A introdução precoce da álgebra oferece a oportunidade de considerar a evolução das ideias matemáticas desde o pré-escolar até ao fim do secundário, já que fornece um contexto que permite analisar como as ideias matemáticas tratadas mais cedo na escolaridade se relacionam com outras que surgem posteriormente.

Alguns autores defendem a própria introdução do simbolismo algébrico nos primeiros anos. Mas o fundamental é a capacidade de os alunos extraírem o carácter invariante da situação em análise e exprimirem-no, o que pode ser feito em diversas representações, tais como, gestos, linguagem corrente, tabelas, gráficos, símbolos. Este processo de detecção do que há de comum num conjunto de objectos individuais e aparentemente distintos toma o nome de generalização. Esta pode dar origem a propriedades de conjuntos numéricos ou de operações ou aplicar-se a sequências. Neste último caso pode assumir um carácter unicamente recursivo, fazendo uso de termos próximos, designando-se por generalização aritmética, ou então exibir um carácter funcional, permitindo a descoberta de qualquer termo em relação com a ordem respectiva, caso em que se designa por generalização algébrica (Radford, 2006). O processo matemático de generalização, não exclusivo da álgebra (Kieran, 2004), faz uso de dois tipos essenciais de raciocínio: o abdutivo, que consiste em formular hipóteses plausíveis, e o indutivo, que se baseia na testagem dessas mesmas hipóteses em vários casos particulares (Rivera & Becker, 2007).

Os autores revistos e as recomendações analisadas são unânimes na consideração da possibilidade e da importância da iniciação ao pensamento algébrico nos níveis de escolaridade elementares, para que os alunos desenvolvam uma compreensão da estrutura geral subjacente ao sistema numérico, através duma abordagem que, para além da aquisição de procedimentos aritméticos, realce formas de raciocínio baseadas na descoberta de padrões, nas relações funcionais e na generalização. Há ainda outra ideia subjacente à utilização precoce da álgebra: a de evitar a tendência para considerar o currículo como uma colecção de factos isolados, proporcionando um relacionamento entre vários conceitos. O pensamento algébrico surge assim como tema unificador da matemática escolar.

Nem tudo o que pode ser contado conta
nem tudo o que conta pode ser contado.
Albert Einstein

Capítulo 5

METODOLOGIA

Neste capítulo começa-se por uma breve revisão de metodologias de investigação de modo a fundamentar a opção metodológica deste estudo. Apresentam-se em seguida os participantes e os critérios que presidiram à sua selecção, para depois se caracterizarem os procedimentos de recolha e análise de dados.

Metodologias de investigação em educação

Os paradigmas positivista e interpretativo

A conceptualização da investigação em educação assenta fundamentalmente em dois paradigmas: o positivista e o interpretativo, este último baseado na fenomenologia. O positivismo considera as atitudes dos indivíduos como resposta a estímulos externos, e portanto mensuráveis, enquanto que a fenomenologia considera a actividade humana como uma experiência social de procura de significado. Dentro da metodologia de investigação de cariz positivista procuram-se dados e tratam-se estatisticamente com vista a confirmar hipóteses pré-

-estabelecidas. No entanto, os testes estatísticos são conduzidos na suposição de que as situações reais se adaptam perfeitamente a modelos estatísticos específicos; se essa adaptação falha, as conclusões são inválidas (Schoenfeld, 2002). Deste modo, um método que possivelmente funcionará bem para experiências de laboratório, por exemplo, falhará garantidamente quando se trata de analisar um fenómeno social. Este, que é produto da acção humana, é contextualizado e demasiado complexo para ser possível, ou mesmo desejável, manipular ou controlar variáveis (Merriam, 1988). Por outro lado, o comportamento humano, ao contrário dos objectos físicos, não pode ser compreendido sem referência aos significados e intenções associados pelos sujeitos às suas actividades (Guba e Lincoln, 1994).

Estes dois paradigmas apreendem os fenómenos através de lentes diferentes: enquanto o positivismo disputa o objectivo, o mensurável, o predizível, o controle e leis de causalidade, o interpretativo procura compreender e interpretar o mundo em termos dos seus actores (Cohen, Manion & Morrison, 2007).

De acordo com Erickson (1989), a principal distinção entre os dois paradigmas diz respeito à natureza da causalidade nas relações sociais humanas e nas ciências naturais. Nas ciências naturais, a causalidade pode pensar-se em termos mecânicos, químicos ou biológicos. Embora a relação de causa e efeito em biologia seja multidireccional e portanto muito mais complexa do que na física ou na química, trata-se apenas duma questão de grau. Já a nível das relações humanas a noção de uniformidade de conduta levanta polémica; as mesmas causas podem não produzir os mesmos efeitos uma vez que as pessoas actuam com base na sua interpretação das acções dos outros. Assim, para aquele autor, a interpretação do significado é causal para os seres humanos. A investigação social, estando incluída nesta a investigação sobre o ensino, deve portanto analisar *objectivamente*, isto é, sistematicamente, o significado subjectivo.

Outros autores (Guba e Lincoln, 1994), apresentam, além do paradigma positivista e do construtivista – podendo este último identificar-se com o que se designou por interpretativo – o pós-positivista e o crítico. Contudo, adoptar-se-á a posição de Matos e Carreira (1994), considerando dois paradigmas fundamentais, embora assumindo-os como dois pólos de um *continuum*: o interpretativo, em que se observam os fenómenos com vista à criação de uma teoria explicativa, e o positivista, em que se procuram dados que confirmem uma dada teoria. As técnicas de recolha e análise de dados variam assim com o paradigma de investigação: associa-

-se o paradigma positivista ao uso de dados e análise de natureza quantitativa, enquanto que as metodologias incluídas no paradigma interpretativo usam fundamentalmente técnicas de índole qualitativa.

Estabelece-se assim uma distinção fundamental entre dois tipos de investigação, quantitativa e qualitativa, podendo identificar-se a primeira com o paradigma positivista e a segunda com o paradigma interpretativo (Merriam, 1988; Bogdan e Biklen, 1994; Matos & Carreira, 1994). Alguns dos conceitos-chave associados à abordagem qualitativa apresentados por Bogdan e Biklen (1994) são os de significado, compreensão, processo e vida quotidiana, ao passo que à abordagem quantitativa associam os conceitos de variável, operacionalização, hipóteses, validade e significância estatística.

Por outro lado, Estrela et al. (2005), autores de investigação em formação contínua de professores entre 1990 e 2004, verificam da respectiva análise que o privilégio dado nesses anos às metodologias de índole qualitativa arrasta como consequência a diminuição de estudos quantitativos, imprescindíveis para análises de natureza mais geral, fragilizando as vertentes da investigação mais relacionadas com o planeamento e as políticas educativas.

A mesma ideia subscrevem Adler, Ball, Krainer, Lin & Novotna (2005) que, numa revisão de literatura de investigação sobre a formação de professores de matemática, apontam a necessidade dos dois tipos de investigação. As três etapas do desenvolvimento de uma teoria da aprendizagem de professores são conceptualizar, modelar e teorizar. Os estudos qualitativos em pequena escala dão contributos importantes para a conceptualização da complexidade da formação de professores e modelam os processos de aprendizagem de professores individuais. Os resultados destes estudos aprofundados em pequena escala fornecem então dados para análises secundárias que procuram contribuir para a teoria. Nessa fase da teorização, são necessários estudos quantitativos em larga escala para a testagem de hipóteses.

A opção sobre o método de investigação, no entanto, deve ser mais dominada pela natureza do objecto em estudo do que por razões filosóficas. Nesta linha encontra-se Pacheco (2001) ao subscrever: “O que determina a opção metodológica do investigador não é o paradigma, mas sim o problema e as situações de estudo” (p.290).

Em suma, ambas as linhas investigativas têm as suas potencialidades e aplicabilidade consoante o problema em causa.

Mais recentemente, alguns autores questionam a divisão entre investigação quantitativa e qualitativa, defendendo que não se trata de escolher uma *versus* a outra. Está neste caso Lesh

(2002), que prefere o termo *design* ao de metodologia, já que considera que as metodologias podem combinar-se, defendendo que a essência do *design* de investigação em educação matemática é lidar com a complexidade de várias situações simultâneas – alunos, professores, salas de aula, currículos, recursos e mentes - de uma forma disciplinada. Tem também interesse neste ponto a análise de uma proposta de Schoenfeld (2002) de um modelo tridimensional visando uma taxonomia dos *designs* de investigação, ilustrado na Figura 18, cujos vectores são a generalidade, a credibilidade e a importância. O autor justifica a sua proposta por ter encontrado incoerências e sobreposição de categorias em taxonomias anteriores.

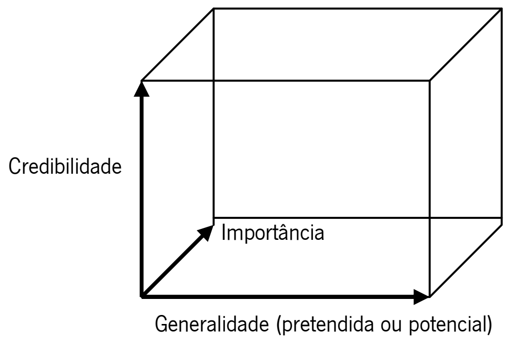


Figura 18. Três dimensões importantes de caracterização de estudos (Schoenfeld, 2002)

A generalidade pretendida é o conjunto de circunstâncias às quais o autor de um estudo afirma que os resultados se aplicam, enquanto que a generalidade potencial é o conjunto de circunstâncias às quais se poderá razoavelmente supor que o estudo se aplica. A credibilidade é a solidez da garantia das afirmações e resultados defendidos pelos autores. A importância será medida pelos reflexos dos resultados nos leitores. O autor defende que, sendo os estudos ordenados por generalidade, torna-se irrelevante a distinção entre investigação qualitativa e quantitativa.

O estudo de caso qualitativo

De acordo com Stake (1994), o estudo de caso não é uma escolha metodológica mas uma escolha de objecto de estudo. Escolhe-se estudar o caso tal como noutros campos profissionais: o médico estuda aquele doente particular; o psicólogo estuda uma criança com problemas de aprendizagem; o assistente social estuda uma criança que é negligenciada. Num estudo de caso, a investigação interessa-se mais pela compreensão do caso particular do que por uma possível generalização, procurando descrições holísticas e explicações baseadas no concreto e no contextual.

Segundo Merriam (1988) as características dum estudo de caso podem enumerar-se como segue: (1) é particularista, focando-se num fenómeno específico, o que o torna indicado para problemas que derivam da prática quotidiana; (2) é descritivo, sendo o produto final uma descrição "espessa" do fenómeno; (3) é heurístico, iluminando a compreensão do leitor para o fenómeno em estudo e levando à descoberta de novos significados e relações; e (4) é indutivo, já que as generalizações, conceitos e hipóteses não são colocados à partida mas antes emergem dos dados.

Uma outra referência importante no estudo de caso é Robert Yin, que defende que o estudo de caso deve ser utilizado quando questões do tipo "como" e "porquê" são o foco do estudo, quando se consideram acontecimentos contemporâneos e quando não se podem manipular comportamentos relevantes (Yin, 2005).

Stake (1994) distingue três tipos de estudos de caso: (a) o *intrínseco*, que é aquele que se realiza por se pretender maior compreensão sobre aquele caso particular e não sobre um constructo abstracto ou fenómeno genérico. O interesse não é construir teoria; (b) o *instrumental*, em que o caso é de interesse secundário, desempenhando um papel de apoio para fornecer pistas a uma questão levantada ou para o refinamento de uma teoria. É aprofundado mas apenas porque permite a prossecução de outros interesses; e (c) o *colectivo*, em que o investigador não tem interesse no caso particular mas no fenómeno, na população ou condição genérica. É um estudo que se estende a vários casos, sendo aceitáveis tanto a semelhança como a variedade. São escolhidos porque se acredita que o seu estudo conduzirá a uma melhor compreensão, talvez teorização, acerca de um conjunto de casos ainda maior.

O mesmo autor considera que, embora as características do estudo de caso não permitam fazer generalizações, o que pode ser considerado uma limitação, este tipo de estudo pode ser visto como um pequeno passo para a generalização por permitir uma compreensão muito mais aprofundada do caso. Além disso, um ou poucos casos não representam uma população nem permitem a generalização mas um único caso como contra-exemplo pode estabelecer limites a uma teoria. O estudo de caso tem valor no refinamento de teorias e em sugestões para investigação futura e também para estabelecer limites à generalização. A intenção do estudo de caso não é representar o mundo mas representar o caso (Stake, 1994). Também Yin (2005) aconselha a escolha de projectos de casos múltiplos, defendendo que as hipóteses de fazer um bom estudo de caso serão maiores do que se for usado um caso único, que, por um lado, é extremamente vulnerável por se apostar tudo num caso e, mais importante do que isso, ao utilizar casos deliberadamente escolhidos por oferecerem variedade de situações, a validade externa dos resultados é amplamente fortalecida. O problema da validade externa, para um estudo de caso, não equaciona a generalização estatística pois não é esse, como já foi referido, o objectivo do estudo de caso, mas a generalização analítica, ou seja, a possibilidade de poder contribuir, com um conjunto particular de resultados, para uma teoria mais abrangente. Além disso, um estudo de casos múltiplos qualitativo indutivo procura construir abstracções através dos casos que permitam uma explicação global que se encaixe em todos eles ainda que possam ser diferentes (Merriam, 1988).

Opção metodológica

Um dos principais objectivos deste estudo é compreender e analisar a influência, em professores do primeiro ciclo, da frequência dum programa de formação contínua em matemática no seu conhecimento matemático e didáctico e nas práticas de ensino que implementam. Tem-se aqui em conta que a natureza do objecto em estudo é que deve condicionar a opção sobre o método de investigação. Nesta perspectiva, e atendendo a que se pretende uma descrição densa e interpretação de fenómenos educativos em curso, optou-se por uma investigação de índole qualitativa, em que não há hipóteses pré-determinadas nem tratamentos ou restrições ao produto final e em que o investigador se limita a observar, intuir, sentir o que está a ocorrer num ambiente natural (Merriam, 1988; Bogdan e Biklen, 1994).

Por outro lado, o estudo de caso parece revelar-se útil num trabalho da natureza do corrente estudo, em que se procura analisar algumas facetas de um programa de formação em larga escala. Nas palavras de Sowder (2007): “Os estudos de caso tornam-se um modo útil de compreender e avaliar a eficácia do desenvolvimento profissional ou intervenção no processo de formação de professores” (p.160). Tem-se ainda em conta as recomendações de Stake (1994) e

Yin (2005) de que o estudo de caso múltiplo conduz a uma melhor compreensão do fenómeno em causa por fornecer maior variedade de situações.

Decidiu-se assim estudar quatro professores envolvidos no programa de formação contínua na sua actividade profissional, assumindo-se a opção metodológica por um paradigma interpretativo na forma de estudo de caso múltiplo.

A escolha dos casos

Já que se trata de analisar um programa de formação contínua para professores do 1.º ciclo, os participantes deste estudo devem ser todos professores do primeiro ciclo a frequentar o programa de formação contínua em matemática para professores do primeiro ciclo do ensino básico no ano lectivo em que o estudo se inicia. Colocou-se assim, inicialmente, a necessidade de proceder à selecção dos participantes. Os métodos de amostragem podem ser ou não probabilísticos (Almeida e Freire, 1997). Uma amostra aleatória, incluída no tipo de amostragem probabilístico, permitindo a generalização, não seria justificável na opção metodológica escolhida, já que não é a generalização dos resultados que se procura mas antes a descoberta, a compreensão, a intuição sobre os fenómenos; deve-se então optar por um método não probabilístico cuja forma mais comum é a amostra intencional, por ser a que nos permite aprender mais (Merriam, 1988). Goetz & LeCompte (1984) chamam-lhe *amostra criteriosa*. Nesta conformidade, os critérios adoptados para a escolha dos participantes foram: variação de idades, variação de formação de base ou complementar, variação de serviço atribuído (titular de turma/professor de apoio; um ou mais anos de escolaridade), variação de tempo de frequência do programa de formação (iniciação ou continuação). Procurou-se assim variedade – embora não representatividade – na escolha dos casos. Com base nestes critérios, os professores foram escolhidos de entre os três grupos que à investigadora, como formadora do programa, cumpria acompanhar, verificando-se deste modo, para além dos supracitados, o critério de oportunidade ou conveniência referido por vários autores (Merriam, 1988; Stake, 1994), já que o universo sobre o qual recaiu a escolha estava limitado ao grupo de formandos atribuído à investigadora. Para além disso, procurou-se que os participantes fossem bons informantes e tivessem disponibilidade, para que se pudesse passar o maior tempo possível com eles, de modo a fornecerem a máxima oportunidade para se aprender neste estudo.

Leonor[9] tirou o curso do Magistério Primário e fez uma formação complementar na área de Estudo do Meio e é, no início do estudo, uma professora experiente a frequentar o 2.º ano de formação, sendo titular de uma turma do segundo ano de escolaridade numa escola com características suburbanas; Ana[1], Guilherme[1] e Sílvia[1] estão, no início do estudo, no primeiro ano de formação mas têm idades e formações diversificadas: Ana e Sílvia tiraram o curso do Magistério Primário e são professoras com bastantes anos de experiência (sendo o curso de Ana anterior) mas, embora ambas tenham frequentado um curso de formação complementar, o de Sílvia é especializado em Matemática e Língua Portuguesa enquanto que o da Ana é em Expressões; por seu lado, Guilherme, o mais jovem, tem pouca experiência de ensino no primeiro ciclo e tem uma formação de base numa Escola Superior de Educação na variante de Educação Física. No que respeita ao serviço atribuído, Ana tem uma turma do primeiro ano e Guilherme é professor de apoio socioeducativo numa turma do segundo ano e ambos estão colocados numa escola que, embora implantada num meio rural, está muito próxima da cidade e acolhe crianças com níveis socioeconómicos e culturais muito diversificados; Sílvia é professora titular duma turma mista de primeiro e segundo ano numa escola com características eminentemente rurais.

Os quatro professores foram contactados no início do ano lectivo de 2006/07 e todos responderam afirmativamente ao pedido de colaboração neste trabalho. Foram informados acerca da finalidade do estudo, dos procedimentos de recolha de dados e do tempo extra que teriam de despender nesta colaboração. Foi-lhes evidentemente garantido o anonimato bem como total confidencialidade dos dados recolhidos nas suas turmas em registo vídeo, que nunca seriam utilizados a não ser para fins da investigação. O facto de todos pertencerem a grupos de que a investigadora é formadora facilitou a tarefa relativamente às questões do acesso e da aceitação, tendo esta colaboração sido encarada com naturalidade pelos professores, já que a planificação e observação de aulas e a reflexão sobre as mesmas em conjunto com estes professores era inerente às funções de formadora. Ou seja, não houve uma "invasão" na sua

---

[9] A todos foram atribuídos nomes fictícios, da sua escolha ou com o seu acordo.

vida profissional, ou, se houve, esta não foi provocada propriamente pelo estudo mas sim pela frequência do programa de formação.

No ano lectivo seguinte a situação alterou-se: Leonor deixou a formação em matemática pois já tinha completado o segundo ano. Também mudou de escola e de agrupamento, encontrando-se numa escola da periferia urbana e sendo titular duma turma do 1.º ano. No entanto, aceitou continuar a colaborar como participante neste estudo e abrir as portas da sala de aula à observação e ao registo vídeo.

Quanto aos outros três participantes, todos continuaram a frequentar o programa pela segunda vez. Ana e Sílvia continuaram na mesma escola e deram continuidade à mesma turma, um segundo ano no caso de Ana e uma turma mista de segundo e terceiro ano no caso de Sílvia; Guilherme mudou de escola e esteve no ano lectivo seguinte a exercer funções de apoio socioeducativo em duas escolas do mesmo agrupamento, de meio rural. No entanto, o seu acompanhamento na formação e para efeito deste estudo efectuou-se apenas numa dessas escolas, da sua preferência, onde apoiava uma turma mista de 2.º e 3.º ano.

Procedimentos

O estudo decorre no âmbito de um programa de formação contínua em matemática em que a investigadora é formadora e tem como objectivo descrever e explicar o impacto da formação no conhecimento, nas práticas e nas perspectivas dos professores envolvidos, bem como nas atitudes e aprendizagens dos seus alunos. Mais do que a quantificação e generalização de resultados, pretende-se a compreensão e interpretação do fenómeno da formação contínua. O estudo decorre num ambiente natural e o acompanhamento dos professores pela formadora/investigadora assume as características estabelecidas pelo programa de formação.

O programa de formação contínua iniciou-se no ano lectivo de 2005/06, no qual a investigadora participou como membro da equipa de formação, com responsabilidades na coordenação, reunindo sistematicamente um dia por semana com todos os elementos da equipa, embora sem a possibilidade de ter grupos de formandos. Foi este contacto intenso, durante um ano, com o programa de formação, nas suas diversas vertentes, a colaboração na planificação das várias actividades e o *feedback* que ia recebendo dos formadores da equipa sobre o desenvolvimento do trabalho, que suscitou na investigadora a vontade de concretizar um estudo com estas características.

O projecto do estudo inicia-se assim durante esse primeiro ano, fase em que são estabelecidas as suas linhas gerais e iniciada a elaboração de documentos de recolha de dados. A fase do trabalho de campo ocorre durante dois anos, com início em Setembro de 2006, numa altura em que a investigadora passa a integrar de forma mais plena a equipa de formação com a atribuição de três grupos de formandos no primeiro ano e cinco grupos no segundo ano. Desenvolve-se então, durante estes dois anos, isto é, até Julho de 2008, o acompanhamento dos quatro professores seleccionados, que integravam os três grupos de formação iniciais. Durante os anos de 2008/09 e 2009/10 é completada a análise de dados e é produzido o relatório escrito. Na Tabela 4 apresentam-se as diversas fases do estudo.

Tabela 4: *Calendarização do estudo*

Data	Fase do estudo
Ano lectivo 2005/06	Contacto com o programa de formação contínua. Elaboração do projecto do estudo.
Anos lectivos 2006/07 e 2007/08	Trabalho de campo.
Julho 2008 – Janeiro 2010	Relatório escrito.

Recolha de dados

A melhor técnica de recolha de dados num estudo de caso é a observação participante (Bogdan e Biklen, 1994). Na observação podemos distinguir vários papéis consoante o grau de participação, de acordo com Adler & Adler (1994): o investigador como membro total, o investigador como membro activo ou o investigador como membro periférico. Este último interage apenas casualmente com os participantes e a sua actividade permanece fortemente orientada para a investigação sem atravessar para o domínio da amizade. Actualmente não é muito usual este papel, já que se considera que uma perspectiva do interior é vital para formar uma ideia precisa sobre a actividade humana. A participação activa ocorre quando há da parte do investigador um maior envolvimento nas actividades e assunção de responsabilidades mas sem haver identificação com as finalidades e valores dos membros. Finalmente os investigadores com participação total são os que observam actividades num grupo de que fazem parte ou que passaram a fazer no decurso da investigação. Neste estudo escolheu-se uma observação participante activa, já que há envolvimento directo da investigadora nas actividades e grande proximidade com os professores sem, no entanto, haver uma pertença ao grupo. Optou-se ainda por um sistema de observação aberto para que se pudesse abarcar o maior número possível de contextos (Evertson & Green, 1989), tendo sempre em conta que o observador é o principal instrumento de observação, devendo fazer um registo natural das ocorrências e procurando não utilizar filtros pré-definidos.

Para além dos instrumentos narrativos, utilizados com vista a obter descrições detalhadas dos fenómenos observados e assim procurar compreender as ocorrências e identificar factores que influenciam as acções dos participantes, coloca-se a questão do suporte tecnológico. Segundo Erickson (1989) há diferenças cruciais entre a observação participante e as gravações e sua análise, com vantagens e inconvenientes para ambas as partes. A primeira vantagem das gravações é a possibilidade de fazer uma análise muito mais completa e exaustiva devido ao facto de poder revisitar o acontecimento as vezes que forem necessárias. A segunda é reduzir a dependência da necessidade da formulação de juízos numa fase precoce que podem vir a revelar-se falsos; com a gravação o observador pode deixar a interpretação em suspenso. Uma terceira vantagem é a redução da necessidade de o observador depender dos acontecimentos mais frequentes como as suas melhores fontes de dados; com a gravação podem ser estudados demoradamente acontecimentos pouco frequentes. As duas limitações principais apontadas ao uso de gravações prendem-se com a falta de oportunidade para verificar teorias que vai elaborando através do recurso de as pôr à prova enquanto observador participante e por outro lado não ter acesso às informações contextuais como histórias de vida e vínculos sociais dos participantes que não são captados pela gravação.

Por estes motivos, neste estudo não se abandonou nenhum dos instrumentos, tendo-se feito gravações em vídeo em complemento à observação de aulas.

Todavia, a maior crítica que é apontada à investigação baseada na observação reside na área da validade (Adler & Adler, 1994) já que os observadores se apoiam exclusivamente nas suas próprias percepções, o que pode conduzir a enviesamentos. Para reduzir a subjectividade, e consequente possibilidade de má interpretação, usa-se recolha de dados de várias naturezas e triangulação destes dados. Este processo consiste em usar múltiplas fontes de evidência para clarificar o significado, identificando diferentes formas de olhar o fenómeno e verificando se uma dada interpretação que foi feita é ou não meramente circunstancial (Stake, 1994; Huberman & Miles, 1994; Schoenfeld, 2002; Yin, 2005). Deve também recorrer-se a citações dos participantes para enriquecer e confirmar a análise do investigador (Adler & Adler, 1994).

Deste modo, neste estudo, além da observação das sessões de formação conjunta e das aulas, foi feito registo vídeo destas últimas e respectiva transcrição, complementado com relatórios sobre as aulas depois do visionamento do vídeo; foram realizadas entrevistas aos participantes, nas quais se incluem as reflexões sobre as aulas; foram tomadas notas de campo pela investigadora, e foi feita a análise de documentos. Foram ainda mantidas várias conversas informais sobre a planificação das aulas.

A finalidade das entrevistas é a recolha de dados que não podem ser obtidos por observação, tais como factos passados, opiniões, sentimentos, perspectivas. As entrevistas podem ser estruturadas, semi-estruturadas e não estruturadas. Alguns autores (Goetz & LeCompte, 1984) apontam vantagens às entrevistas semi-estruturadas, em que se estabelecem tópicos e temas específicos para servir de fio condutor da entrevista, mas em que as questões são realmente abertas para que os respondentes não tenham de escolher simplesmente entre as alternativas apresentadas. As entrevistas procuraram ser verdadeiros momentos de encontro constituindo experiências positivas e ricas para ambas as partes. Para afastar enviesamentos dependentes do papel da investigadora houve sempre da sua parte a preocupação de evitar ver o respondente à sua imagem e ainda evitar obter respostas apoiando alguma sua noção pré-concebida (Cohen et al., 2007), ou seja, houve sempre o esforço de uma postura de neutralidade. Com esse objectivo, procurou-se sempre não emitir opiniões, mantendo-se uma postura de escuta atenta e de conversa descontraída, dando-se aos professores a maior parte do tempo de discurso e não os interrompendo.

Quanto aos documentos, estes são uma fonte importante de dados e incluem propostas de trabalho; registos escritos tais como trabalho de alunos, portefólios, transcrições, notas de campo, reflexões e críticas; fotografias; gravações; etc.

Observação. A observação incidiu em todos os momentos de contacto, mas foi a observação de aulas que foi feita mais sistematicamente a cada um dos participantes. Durante o primeiro ano foram observadas quatro a cinco aulas de em média 90 minutos a cada professor acompanhadas de registo em vídeo (A1-1, A2-1, A3-1, A4-1, A5-1). Com vista a efectuar o registo vídeo das aulas foram feitos pedidos de autorização ao Presidente do Conselho Executivo do agrupamento respectivo e a todos os encarregados de educação dos alunos das turmas respectivas, com conhecimento ao professor coordenador da escola do primeiro ciclo respectiva e ao professor titular da turma no caso de Guilherme. Houve apenas um encarregado de educação numa turma no primeiro ano que não deu autorização para que fossem feitas filmagens ao seu educando, pelo que o aluno em questão, durante as aulas filmadas, foi colocado em posição de não ser abrangido pela câmara.

De todas as aulas observadas (à excepção da primeira aula de Leonor para a qual, por ter sido realizada muito cedo, não se dispunha ainda de autorização dos encarregados de educação) foi feita gravação em vídeo e posterior transcrição. Depois do visionamento e transcrição, e tendo em conta todos estes dados entretanto analisados, foi elaborado pela investigadora um relatório para cada aula (Rel), cujo guião (Anexo A) incluía a identificação, o ambiente da aula, as tarefas propostas e recursos, o papel do professor, o papel dos alunos, a produção matemática dos alunos e comentários da investigadora.

Optou-se por não fazer registo vídeo das sessões de formação conjunta uma vez que a valorização da actuação de um só professor poderia interferir na dinâmica da sessão.

No segundo ano lectivo, 2007/08, a recolha de dados no que diz respeito à observação de aulas continuou nos mesmos moldes, com gravação em vídeo das aulas observadas, que foram cinco de cada participante (A1-2, A2-2, A3-2, A4-2, A5-2), excepto no caso de Leonor em que foram observadas quatro aulas.

Não obstante, durante o segundo ano procurou-se dar uma orientação diferente, mais direccionada, à planificação e observação de aulas, para não haver tanta dispersão e os professores poderem aprofundar melhor um tema. Esta escolha seguiu a seguinte metodologia:

- Propôs-se à equipa de formadores do distrito um esquema de funcionamento do trabalho autónomo para os formandos do 2.º ano que passasse por criarem tarefas para a sala de aula e apresentá-las aos colegas do 1.º ano, assumindo, ainda que transitoriamente, a posição de formadores; o guião deste trabalho está discriminado no Capítulo 6. Esta opção tentava, do ponto de vista do programa de formação, melhorar a prática do ano anterior em relação ao trabalho autónomo, já que os professores tiveram dificuldades em organizar-se e trabalhar em grande grupo e queixaram-se também de terem tido trabalho acrescido em relação aos seus colegas do 1.º ano e usufruírem de menos créditos. Com esta proposta o trabalho autónomo é mais direccionado para a planificação de aulas, embora com cuidados acrescidos e com a obrigação de apresentar a experiência realizada aos colegas em sessão de formação conjunta, trazendo para a sessão exemplos do questionamento realizado, de algum trabalho de alunos que revele aprendizagens significativas e como forma de compreender o seu pensamento. Procurava–se também que trabalhassem a pares na planificação, e, se possível, essas equipas fizessem um acompanhamento mútuo das aulas e discussão conjunta. Este trabalho não seria assim visto como um trabalho extra para os formandos do segundo ano, podendo constituir parte substancial do portefólio a entregar no fim da formação.

Por outro lado, do ponto de vista desta investigação, pretendia-se no segundo ano deste estudo uma recolha de dados respeitante a um trabalho mais autónomo e mais explicitamente dirigido para a evolução do conhecimento matemático e didáctico dos participantes focado no tema do pensamento algébrico. Enumeram-se os factores que contribuíram para esta orientação:

- Manter um fio condutor para que não houvesse uma grande dispersão de dados que poderia impossibilitar a sua recolha e análise;
- O tema do pensamento algébrico não fazia parte dos anteriores programas do 1.º ciclo; em consequência é um tema que não tem sido muito trabalhado, quer a nível de sala de aula quer a nível de formação de professores;
- É um tema que tem vindo a ser recomendado nos documentos curriculares nacionais mais recentes, quer no *Currículo Nacional* (ME-DEB, 2001) quer na *Proposta de reajustamento do programa de matemática do ensino básico,* que entretanto foi homologado pelo Ministério da Educação em Dezembro de 2007 (ME-DEB, 2007);
- Muitos investigadores têm aconselhado a sua introdução desde os primeiros níveis de escolaridade (Kaput & Blanton, 2001; Jacobs et al., 2007; Warren, 2006; Schliemann et al., 2007);
- Considera-se o desenvolvimento do pensamento algébrico fundamental quer para aprendizagens posteriores quer no desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas e comunicação;
- É um tema que pode ser considerado como transversal, pelo menos dentro deste nível de ensino, pela profundidade e variedade das conexões que possibilita com todos os temas da matemática;
- Foi uma das linhas de força estabelecidas pela equipa de formação do distrito;
- O tema é do gosto e interesse pessoal da investigadora.

A recolha de dados deste segundo ano abrange a observação, entre outras, dessas aulas especialmente planificadas para apresentação ao grupo de colegas em formação. No caso de Leonor também se sugeriu que fosse realizado trabalho no âmbito do pensamento algébrico, tendo-lhe sido facultado o material utilizado nas sessões de formação conjunta, embora o seu trabalho fosse essencialmente autónomo, uma vez que esta professora já não se encontrava em formação.

Entrevistas. Foi realizada uma entrevista semi-estruturada a cada participante no início do ano lectivo de 2006/07, (E1), procurando, além de uma identificação pessoal e profissional, razões de adesão ao programa, posicionamento do professor em relação à matemática e ao seu ensino, factores que contribuem para as dificuldades dos alunos em Matemática e conhecimento matemático dos professores do primeiro ciclo.

A segunda entrevista, (E2), ocorreu durante o segundo período lectivo, procurando obter informações sobre a valorização feita pelo professor das várias experiências de aprendizagem tais como resolução de problemas, investigações matemáticas, jogos, bem como sobre formas de organização do trabalho na sala de aula e recursos, incluindo-se aqui materiais manipuláveis, fichas de trabalho, manual escolar. Para além dos pontos referidos, pretendeu-se auscultar as opiniões dos professores acerca do modo como estava a decorrer o programa de formação até ao momento.

Finalmente, a última entrevista do ano lectivo, (E3), ocorreu em Julho de 2007 e teve como principal objectivo fazer um balanço geral sobre o ano de frequência do programa de formação nas suas diferentes vertentes: sessões de trabalho conjuntas, acompanhamento em sala de aula, reflexão sobre as aulas, partilha de experiências e elaboração do portefólio. Foram focados aspectos como o desenvolvimento profissional dos professores e as aprendizagens dos seus alunos, bem como perspectivas para o próximo ano.

Os guiões respectivos encontram-se no Anexo A. Todas as entrevistas foram audiogravadas e posteriormente transcritas.

Para além destas entrevistas mais formalizadas, no final de cada aula observada houve sempre uma pequena conversa de reflexão entre o formando e a formadora, na maioria dos casos audiogravada e transcrita (RA3-1, RA4-1, RA5-1), que depois era complementada com o grupo de formação. Nesta conversa procurava-se que o professor comentasse a sua actuação, referindo-se às suas intervenções e às reacções dos alunos, aos diálogos suscitados, aos registos feitos, às aprendizagens realizadas. Nas sessões de formação eram também trocadas impressões e fornecidas sugestões de planificação das aulas.

No segundo ano começou-se com uma entrevista menos estruturada, (E4), assumindo mais o carácter de conversa informal fluindo sobre a turma, os manuais escolares, em que também se aproveitou para falar do trabalho a desenvolver, particularmente do trabalho autónomo tal como tinha já sido apresentado aos formandos na primeira sessão conjunta do ano lectivo, e diálogo sobre a definição do tema a explorar nesse trabalho bem como da respectiva calendarização.

No meio do ano lectivo, foi fornecido a cada participante o registo vídeo da aula observada que coincidia com a implementação do trabalho autónomo, tendo sido depois realizada uma entrevista sobre a aula à luz do visionamento desse registo (E5), em que se procurou que os professores identificassem pontos fortes e fracos da sua actuação, no que diz respeito às tarefas e recursos apresentados, aos conteúdos matemáticos envolvidos, à intervenção do professor nomeadamente no questionamento planeado e no que foi efectivamente feito, à comunicação que ocorreu e de modo geral ao ambiente da sala de aula, e à análise de producões escritas dos alunos. No fundo, esta entrevista foi uma conversa de reflexão sobre a aula tal como outras que decorreram no fim de cada aula observada, mas mais demorada e aprofundada pois o professor apoiava-se na visualização da sua própria aula, que tinha efectuado de antemão, podendo deste modo fundamentar melhor as suas opiniões e impressões.

Foi feita uma última entrevista no final do segundo ano lectivo, (E6), esta mais estruturada e apoiada num guião que foi previamente fornecido a todos os participantes, com o fim de auscultar as suas opiniões e posições actuais sobre o ensino e a aprendizagem de modo geral, e um balanço final sobre o programa de formação, procurando saber quais tinham sido os aspectos mais importantes, os temas que mais tinham contribuído para o aprofundamento do conhecimento matemático e didáctico e o modo como este se relaciona com as práticas; além disso procurou-se obter a visão dos professores sobre os reflexos da frequência do programa a médio e a longo prazo incluindo a sua disponibilidade para de futuro se tornarem dinamizadores ligados à matemática nas respectivas escolas, para além dos pontos fracos do programa.

Os guiões respectivos encontram-se no Anexo A. Todas as entrevistas foram audiogravadas e posteriormente transcritas.

Do mesmo modo que no primeiro ano, neste segundo ano foram sempre feitas reflexões com o professor no final de cada aula, de que foi sempre feita gravação áudio e transcrição (RA1-2, RA2-2, RA3-2, RA4-2, RA5-2).

No caso de Guilherme, este forneceu registo escrito das questões formuladas previamente para a última entrevista (REE6).

Por último, foi ainda realizada, no final do ano, uma entrevista com o professor titular da turma em que Guilherme trabalhou no segundo ano de formação (EPTT), que pretendia colher as suas impressões sobre o desenrolar do trabalho respeitante à formação, já que este professor, contrariamente à professora titular da turma durante o primeiro ano, não estava nem tinha estado ligado ao programa de formação contínua em matemática.

Documentos. A análise documental veio complementar a recolha de dados das observações e entrevistas tendo tido um papel de relevo no desenrolar deste estudo. Para além de todos os documentos produzidos pela investigadora e pela equipa de formação no âmbito da planificação de actividades, nomeadamente a construção de propostas para a sala de aula que foram exploradas nas sessões de formação conjunta e o documento regulador do funcionamento do trabalho autónomo e da avaliação, esta análise incidiu principalmente sobre os seguintes tipos de dados: (a) notas de campo, tomadas pela investigadora durante os dois anos num diário de campo (DC), das observações feitas quer nas sessões conjuntas de formação, quer nas aulas acompanhadas, quer ainda noutras circunstâncias de contacto, consistindo na descrição de factos e ainda em comentários, reflexões e identificação de padrões emergentes; (b) as tarefas entretanto seleccionadas ou construídas pelos vários participantes na planificação das aulas para as turmas com quem trabalhavam e respectivos materiais de apoio; (c) registos do trabalho dos alunos evidenciando as suas produções matemáticas durante as aulas; e (d) os portefólios realizados pelos professores, (Por1, Por2), exigidos como requisito de avaliação da sua frequência no programa de formação. Nestes os formandos deviam incluir o desenvolvimento de duas tarefas trabalhadas na sala de aula, incluindo fundamentação e justificação da escolha das tarefas, modo como se desenrolaram, aprendizagens matemáticas realizadas, reacções dos alunos, trabalho produzido pelos alunos e sua análise e, finalmente, uma apreciação crítica envolvendo auto-avaliação do trabalho realizado.

Síntese. Apresenta-se na Tabela 5 uma síntese dos procedimentos de recolha de dados anteriormente descritos, incluindo técnicas e instrumentos, ligados a cada uma das vertentes do programa, e para cada um dos professores participantes.

Tabela 5: *Síntese dos procedimentos de recolha de dados sobre as várias vertentes do programa*

Vertentes do programa	Técnica	Instrumento
Sessões de formação conjunta	Observações Entrevistas Documentos	 E1, E2, E3, E6 DC
Aulas	Observações Entrevistas Documentos	A1-1, A2-1, A3-1, A4-1, A5-1; A1-2, A2-2, A3-2, A4-2, A5-2 E1, E2, E3, E4, E5, E6 Rel DC Tarefas Registo do trabalho de alunos
Reflexão	Entrevistas Documentos	E1, E2, E3, E4, E5, E6, REE6, (Guilherme), EPTT (Guilherme) RA3-1, RA4-1, RA5-1, RA1-2, RA2-2, RA3-2, RA4-2, RA5-2 DC Por1, Por2
Trabalho autónomo	Observação Entrevistas Documentos	Guião do trabalho autónomo A3-2 E4, E5, E6 Rel RA3-2 Tarefas Registo do trabalho de alunos DC Por2

Apresenta-se em anexo (Anexo B) a calendarização das várias sessões de recolha de dados.

Análise de Dados

Os estudos de caso podem ser distinguidos pela natureza do resultado final em descritivos, interpretativos e avaliativos (Merriam, 1988). Nos primeiros há apenas uma descrição vazia de teorias; os segundos, além da descrição, são usados para desenvolver categorias conceptuais analisando, interpretando e teorizando; os últimos, além da descrição e explicação fazem julgamentos – por exemplo, avaliam o mérito de um programa. Embora evidentemente não haja uma linha separadora nítida entre uns e outros, atendendo ao objectivo definido por este estudo poderá situar-se na área entre os segundos e os terceiros.

A opção por uma investigação de índole interpretativa e naturalista traduz-se em termos de análise de dados no uso de métodos indutivos. Um ponto forte destes métodos é, segundo Yinger e Clark (1988), o facto de não terem de se incluir forçadamente os fenómenos estudados em marcos conceptuais pré-determinados. Em vez disso, o investigador tem de ler e analisar os dados até que surjam padrões e tendências interpretativas. Este processo recorrente de verificação da teoria com dados e do uso de dados para gerar teoria vai elaborando a teoria fundamentada que é a característica mais importante da investigação naturalista.

No presente estudo, a análise de dados começou já durante o processo de recolha, embora tenha continuado e sido naturalmente aprofundada e transformada no fim desse processo. Tal como aconselham Bogdan & Biklen (1994) para tornar a análise parte integrante da recolha de dados de modo a facilitar o trabalho de análise posterior, procurou-se: (1) depois de uma primeira visão geral, tomar decisões ligadas ao tipo de estudo a realizar que afunilaram concomitantemente o seu âmbito – é o processo que Huberman & Miles (1994) designam de redução de dados; (2) avaliar e reformular as questões gerais formuladas no início do trabalho procurando clarificá-las como se o objectivo do estudo tivesse de ser explicado a um leigo; (3) escrever, sempre que foi possível e relevante, comentários sobre acontecimentos, diálogos, palavras, circunstâncias, incidentes; (4) fazer a revisão da literatura durante o trabalho de campo de modo a poder contribuir para a análise; (5) envolver-se na interpretação dos dados, recorrendo para isso a técnicas de comparação/contraste, descoberta de padrões e temas, agrupamento e uso de metáforas para técnicas confirmatórias tais como a triangulação, a procura de casos negativos, a busca de situações inesperadas e a confirmação de resultados com respondentes (Huberman & Miles, 1994). Todo este processo é recorrente e interactivo.

Erickson (1989) considera que ao rever as notas de campo e outras fontes de dados para gerar ou confirmar as suas asserções, o investigador procura *vínculos-chave* entre diversos dados. São vínculos por ligarem vários dados como manifestações análogas do mesmo fenómeno e são chave por terem importância fundamental nas afirmações principais que o investigador deseja formular. Os padrões de generalização a procurar para formular esses vínculos-chave devem ser buscados dentro do caso em consideração e não de um caso ou de um contexto para outro. Erickson (1989) apresenta uma metáfora para a descoberta de padrões que consiste em considerar o conjunto de todos os dados (notas de campo, entrevistas, documentos, gravações) como uma grande caixa de cartão cheia de folhas de papel onde estão inscritos os dados. O vínculo-chave, acima referido, é um constructo analítico que funciona como um fio que une os diferentes tipos de dados. Numa hierarquia de vínculos principais e adicionais há fios que se unem por nós uns aos outros. A tarefa de análise de padrões consiste em descobrir os vínculos que determinam o maior número de ligações entre os dados. Quando se puxa um fio espera-se que este tenha o maior número possível de fios ligados aos dados.

> As afirmações mais sólidas são as que têm a maior quantidade de fios ligados a elas, através da mais ampla gama de fontes e tipos de dados. Se uma afirmação está corroborada não só por muitos casos registados nos dados das notas de campo, como também por informações obtidas em entrevistas e nos documentos do contexto, pode-se confiar mais na veracidade dessa afirmação do que noutra que esteja apenas corroborada por fontes de um único tipo, independentemente de quantos casos, desse tipo de dados, possam vincular-se analiticamente (Erickson, 1989, pp.268-269).

Assim, a análise sistemática dos dados começou por várias leituras de todo o conjunto de dados procurando identificar destaques ou repetições de palavras, frases, comportamentos, formas de pensar, acontecimentos. Esses destaques são diferentes *categorias* (Bogdan & Biklen, 1994). Este procedimento foi efectuado manualmente. Depois de criadas as categorias preliminares de codificação, procedeu-se a outra leitura em que se procurou encaixar as unidades de análise (acções – recolhidas de notas de campo e de gravações – e comentários – recolhidos de entrevistas formais e informais aos participantes) marcando cada uma com uma abreviatura e usando marcadores de cor diferente. As categorias foram sendo criadas ou acrescentadas à medida que se foi fazendo o trabalho de cortar e colocar cada unidade codificada na pasta respectiva. Algumas unidades de análise pertenciam a mais do que uma categoria e foi muito difícil nalguns casos tomar uma decisão, embora se conheçam as recomendações para que as categorias sejam mutuamente exclusivas (Cohen et al., 2007). Houve inevitavelmente avanços e recuos, correcções, estabelecimento de novas categorias e eliminação de outras. No final obtiveram-se as seguintes categorias: (a) apresentação da pessoa, que inclui o percurso académico e profissional, a relação com a matemática enquanto estudante e a formação matemática; (b) o retrato profissional prévio ao início da formação, que reúne as perspectivas sobre o ensino e a aprendizagem da matemática e as dificuldades/necessidades de formação; (c) o percurso profissional ao longo do programa, englobando as sessões de formação, a prática de sala de aula, o trabalho autónomo, o acompanhamento em sala de aula com extensão à relação com a formadora, a reflexão com extensão ao portefólio e a partilha de experiências, que traduzem precisamente as diversas vertentes do programa de formação; e (d) os reflexos do programa de formação, desdobrados no conhecimento matemático e didáctico e na prática de sala de aula, nas perspectivas do professor sobre a matemática e o seu ensino, nas atitudes e aprendizagens dos alunos, nos aspectos menos conseguidos e nas perspectivas para o futuro. Obteve-se assim uma estrutura descritiva disposta por ordem cronológica (Anexo C).

Na categoria da prática de sala de aula surge a descrição mais forte e importante que liga o conhecimento matemático e didáctico utilizado pelo professor na planificação e execução das suas aulas com as reacções, atitudes e aprendizagens dos seus alunos. Fez-se aqui, como já foi referido, a opção de reduzir os dados relatando essencialmente os episódios de sala de aula ligados de algum modo à emergência ou desenvolvimento do pensamento algébrico. Neste ponto, particularmente na produção matemática dos alunos, a que se deu particular relevo por ser claramente um dos que mais fortemente pode permitir dar resposta às questões formuladas no início do estudo, foram também definidas subcategorias de análise de acordo com os dados recolhidos, que diferem ligeiramente de caso para caso já que as abordagens foram diferentes, mas que englobam no seu conjunto: contagens visuais; padrões de repetição em sequências; padrões de crescimento em sequências; problemas de padrão; padrões no cálculo mental; propriedades das operações como generalização de factos numéricos; relacionamento entre operações; sentido das operações; raciocínio funcional; descoberta de invariantes numéricos; generalização da aritmética.

Para a tarefa da escrita, estas unidades básicas de análise foram também os itens básicos dos casos, que constituíram o que Erickson (1989) chama descrição particular. Na segunda etapa da análise de dados seguiu-se uma descrição geral identificando traços comuns e distintos nos quatro casos e por fim fez-se o comentário interpretativo.

Procurou-se sempre documentar o trabalho com boas descrições e citações provenientes dos dados que ilustrem e dêem força às afirmações feitas (Merriam, 1988; Erickson, 1989). Com efeito, uma crítica que se coloca aos estudos naturalistas é a de não haver prova real da validade das interpretações feitas, apesar do uso da triangulação. O que os investigadores devem fazer é apresentar as suas conclusões de forma que possam ser avaliadas pelo leitor. Duas características fundamentais devem nortear esta mostra: uma consiste na apresentação clara e completa das orientações teóricas e pressupostos bem como dos métodos e técnicas de investigação usados; outra é a apresentação de exemplos variados dos dados a partir dos quais se fizeram as apresentações, para que o leitor possa ter a oportunidade de julgar por si próprio. Na investigação experimental, aceitam-se as convenções estabelecidas sobre os métodos estatísticos; na investigação naturalista, o leitor tem de ser convencido da plausibilidade do que lê de uma forma que não difere da que leva o investigador às suas conclusões (Yinger & Clark, 1988; Bogdan & Biklen, 1994; Yin, 2005).

De facto, na investigação qualitativa o investigador é o primeiro instrumento de recolha e análise de dados, e, pelas características deste tipo de investigação, não há um único caminho certo, os procedimentos não estão escritos, o percurso não é óbvio (Merriam, 1988); deste modo deve ter, desde início, tolerância à ambiguidade. Contudo, à metáfora do detective proposta por esta autora, que embarca numa aventura cheia de descobertas, contrapõe-se o facto de que a observação e a análise são filtradas pelos seus pontos de vista, valores e visão do mundo. Tendo em mente as possíveis fragilidades de uma investigação deste tipo, é necessário observar critérios de qualidade, como sejam, a credibilidade, a transferibilidade, a fidedignidade e a confirmabilidade, termos naturalistas que substituem os termos correspondentes positivistas de validade interna, validade externa, fiabilidade e objectividade (Vale, 2004). A confirmabilidade refere-se ao facto de as conclusões dependerem apenas dos participantes e das condições do estudo e não da imaginação ou das ideias pré-concebidas do investigador. A fidedignidade verifica se o estudo poderia ser repetido com resultados semelhantes. A transferibilidade refere-se à extensão das conclusões, colocando o problema da generalização, embora, na verdade, o objectivo dum estudo de caso não seja formular generalizações, nem tal poderia acontecer já que se dedica a casos particulares. No entanto, estes estudos podem ir pouco a pouco iluminando e enriquecendo o conhecimento, fazendo assim uma generalização *analítica* ou generalização para a teoria, pois contribuem para que novas teorias possam surgir ou para confirmar ou rejeitar teorias já existentes (Yin, 2005; Ponte, 1994). Dos quatro aspectos nomeados é crucial o da credibilidade, que consiste em saber se os resultados da investigação são congruentes com a realidade, quer para os participantes, quer para os leitores.

Procurou-se assim neste estudo usar algumas estratégias (Vale, 2004) no sentido de obedecer aos critérios de qualidade enunciados, sobretudo no aspecto da credibilidade. Essas estratégias consistiram em: (a) triangulação de dados de diversas fontes, tal como foi referido na secção anterior; (b) observação persistente, nomeadamente no visionamento do material vídeo, de modo a fortalecer ou infirmar as interpretações anteriores e melhorar o processo de análise; (c) envolvimento prolongado com os professores-caso, que foi efectivamente de dois anos completos de acompanhamento em sala de aula, de modo a evitar distorções resultantes de um primeiro impacto e de acontecimentos esporádicos, e a aprofundar a compreensão dos significados de que se revestem as acções dos participantes; (d) discussões com pares, exteriores ao estudo mas suficientemente dentro do tema para poderem dar a sua opinião e debater alguns aspectos; (e) algum afastamento temporário pontual no período da escrita dos casos e da discussão e conclusões, de forma a ter uma visão um pouco distanciada dos aspectos em análise; e (f) validação dos casos pelos participantes. Depois da escrita do caso, este foi dado a ler ao respectivo professor com vista a obter uma confirmação e aceitação do seu conteúdo. Todos afirmaram que gostaram de recordar os episódios descritos, de que por vezes já não se lembravam, e reiteraram a sua opinião sobre a importância que para eles teve este percurso formativo. Afirmaram também que se sentiram bem retratados, correspondendo a descrição à revelação do seu sentir e da sua actuação como profissionais.

Ninguém atingiu a estrela polar, mas muitos encontraram
o caminho certo a olhar para ela.
Polya

Capítulo 6

O PROGRAMA DE FORMAÇÃO CONTÍNUA EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES DO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Neste capítulo apresentam-se os princípios e orgânica do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico, adiante designado por PFCM, e passa-se de seguida à sua interpretação a nível local, nas suas diversas componentes, numa das Instituições de Ensino Superior a quem foi conferida pela Tutela a implementação do PFCM no distrito respectivo, justamente aquela em que a investigadora exerce funções como formadora. Designar-se-á por Programa a implementação a nível local.

Princípios e orgânica do PFCM a nível nacional

O PFCM é criado pelo Despacho Conjunto n.º 812/2005 de 24 de Outubro dos Ministérios da Educação e da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior, com vista a uma melhoria das condições de ensino e aprendizagem da Matemática e à valorização das competências dos professores nesta disciplina no sentido de melhorar os níveis de sucesso dos alunos.

Na sequência da criação do PFCM[10], é elaborado um documento pela Comissão de Acompanhamento onde se definem princípios, objectivos, linhas orientadoras, estratégias, conteúdos e recursos.

Os princípios orientadores incluem: valorização do desenvolvimento profissional do professor; valorização de uma formação matemática de qualidade para o professor; valorização do desenvolvimento curricular em Matemática; reconhecimento das práticas lectivas dos professores como ponto de partida da formação; consideração das necessidades concretas dos professores relativamente às suas práticas curriculares em Matemática; valorização do trabalho colaborativo entre diferentes actores; valorização de dinâmicas curriculares contínuas centradas na Matemática.

Constituem objectivos fundamentais deste programa (ME, 2005):

1. Promover um aprofundamento do conhecimento matemático, didáctico e curricular dos professores do 1.º ciclo envolvidos, tendo em conta as actuais orientações curriculares neste domínio;
2. Favorecer a realização de experiências de desenvolvimento curricular em Matemática que contemplem a planificação de aulas, a sua condução e reflexão por parte dos professores envolvidos, apoiados pelos seus pares e formadores;
3. Desenvolver uma atitude positiva dos professores relativamente à Matemática, promovendo a auto-confiança nas suas capacidades como professores de Matemática, que inclua a criação de expectativas elevadas acerca do que os seus alunos podem aprender em Matemática;
4. Criar dinâmicas de trabalho em colaboração entre os professores de 1.º ciclo com vista a um investimento continuado no ensino da Matemática ao nível do grupo de professores da escola/agrupamento, com a identificação de um professor dinamizador da Matemática que promova um desenvolvimento curricular nesta área;
5. Promover o trabalho em rede entre escolas e agrupamentos em articulação com as instituições de formação inicial de professores.

Quanto às linhas orientadoras, pretende-se uma integração dos saberes científico e didáctico, partindo das práticas concretas, reflectindo sobre elas e elaborando materiais e partilhando ideias. Assim, o PFCM preconiza três vertentes fundamentais na formação: sessões

[10] Entretanto, a partir do ano lectivo de 2007/08, este programa passou a designar-se por Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Porém, em todo este estudo apenas se alude à parte do Programa relativa ao 1.º ciclo.

de trabalho conjuntas, experimentação em sala de aula acompanhada pelo formador e reflexão sobre as aulas, com o formador e depois no grupo de trabalho. O papel do formador deve ser sempre o de par e colaborador. Foram também previstas sessões colectivas, uma a meio do ano e outra no final do ano, abrangendo todos os professores do distrito que tenham ou não estado em formação, como forma de divulgação do Programa e partilha de experiências. A partir do segundo ano de funcionamento estas sessões colectivas foram reduzidas a uma no final do ano.

A gestão do programa cabe às instituições de Ensino Superior (Escolas Superiores de Educação ou Universidades) ao nível de cada distrito, respeitando os objectivos e princípios mas mantendo uma margem de autonomia de modo a flexibilizar a implementação de acordo com a realidade. A inscrição e frequência por parte dos professores é voluntária.

Em termos de organização prática, as sessões de formação, de três horas cada, devem ser em número de 15 e realizar-se ao longo de todo o ano lectivo, o que significa que têm uma periodicidade quinzenal. Estas sessões devem decorrer em horário não lectivo abrangendo grupos de oito a doze professores. Quanto ao acompanhamento em sala de aula, neste documento inicial preconizava-se uma ida do formador a cada escola pelo menos um dia por mês e o acompanhamento dos professores em sala de aula pelo menos uma vez em cada 2/3 meses. No segundo ano de formação houve por parte da Comissão de Acompanhamento uma maior clarificação do número de horas a destinar às aulas observadas, sendo um total de 10h para cada formando em iniciação e de 12h por cada formando em continuação. De modo a promover o trabalho em equipa, os grupos deverão ser constituídos por professores da mesma escola ou do mesmo agrupamento sendo também na escola ou sede de agrupamento que, em princípio, deverão decorrer as reuniões.

Nestas sessões, para além da reflexão sobre as aulas entretanto leccionadas por cada professor, analisam-se e desenvolvem-se propostas curriculares a experimentar na aula e, em paralelo, vai-se abordando e aprofundando o conhecimento matemático relacionado com essas propostas.

Neste esquema, e durante o primeiro ano, cada formador trabalha com seis grupos de professores que rodam quinzenalmente, dedicando 9h semanais às sessões de formação e 15h ao acompanhamento em sala de aula sendo o tempo restante destinado à planificação das sessões, elaboração de materiais e avaliação. Esta actividade de preparação e avaliação deverá também decorrer em equipa de formadores ao nível de cada Instituição de Ensino Superior.

No segundo ano foram destinados apenas cinco grupos a cada formador, tendo o tempo da sessão de formação revertido para um maior acompanhamento em sala de aula dos formandos do segundo ano.

Esta observação deve corresponder à planificação feita em conjunto nas sessões de formação, confrontando-se na análise posterior as expectativas com a realidade.

A avaliação dos formandos contempla a elaboração de um portefólio de desempenho que deve incluir pelo menos o trabalho de planificação de duas tarefas preparadas para os alunos e exploradas na sala de aula, com comentários e reflexão sobre a sua implementação tendo por base as produções dos alunos.

Os conteúdos previstos para o programa têm como referência os documentos oficiais *Programa de Matemática para o 1.º ciclo* (ME, 1990) e *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais* (ME, 2001) e visam o desenvolvimento do conhecimento matemático, didáctico e curricular dos professores abrangendo os seguintes domínios:

a) os temas matemáticos;

b) a natureza das tarefas para os alunos;

c) os recursos a utilizar, como contexto ou suporte das tarefas propostas;

d) a cultura de sala de aula e de avaliação.

Com respeito aos temas matemáticos, a formação deve aprofundar os temas constantes no programa do 1.º ciclo. Em relação à natureza das tarefas, o documento segue também de perto o *Currículo Nacional* realçando a importância de tarefas de resolução de problemas, de natureza investigativa, a prática compreensiva de procedimentos, os jogos e a realização de pequenos projectos. Quanto aos recursos, são citados os materiais manipuláveis, as tecnologias e os manuais escolares como os mais importantes. Por último, a cultura de sala de aula inclui os modos de relacionamento entre professor e alunos e os papéis que cada um desempenha, que se considera no documento como tendo grande influência na aprendizagem dos alunos e no modo como estes se relacionam com o conhecimento matemático. Embora a aprendizagem da Matemática seja preponderantemente influenciada pela natureza das tarefas que o professor propõe aos alunos, é também crucial a forma de organização da aprendizagem, que inclui por exemplo o grau de autonomia e intervenção que reserva aos alunos e as expectativas do professor quanto ao seu desempenho.

O documento termina com uma listagem de vários recursos úteis à formação, tanto bibliográficos com materiais manipuláveis.

A orgânica do Programa no distrito

O programa de formação no distrito onde decorreu este estudo, com sede na Escola Superior de Educação respectiva, desenvolveu-se naturalmente com base nos princípios gerais e nos objectivos definidos pela Comissão Nacional de Acompanhamento do PFCM. Para a sua interpretação a nível local teve-se como referência, para além dos documentos citados, o Programa de matemática em vigor, O Currículo Nacional, a proposta de reajustamento do Programa de matemática que mais tarde se converteu no novo Programa de Matemática do Ensino Básico e recomendações nacionais e internacionais sobre o ensino e a aprendizagem da matemática.

Apresentam-se algumas particularidades de ordem prática resultantes da implementação do PFCM a nível local de modo a permitir uma melhor caracterização do trabalho realizado ao longo dos três primeiros anos.

Equipa

A equipa do projecto integrava no ano de 2005/06 nove elementos, entre formadores e coordenadores. Era uma equipa equilibrada em termos de saberes e competências uma vez que era integrada por professores de várias formações e experiência profissional diversa.

No ano lectivo de 2006/07 a equipa era de sete elementos no 1.º ciclo, tendo saído dois elementos e sido integrado apenas um elemento novo e com dois formadores a tempo parcial.

No ano lectivo de 2007/08 a equipa era constituída por quatro elementos no 1.º ciclo, a coordenadora e três formadores em tempo integral.

Formandos

No primeiro ano de funcionamento do Programa, o ano lectivo 2005/2006, frequentaram a formação 196 professores. No segundo ano esse número foi de 201, dos quais

113 frequentaram pela primeira vez e 88 em continuação do primeiro ano. No terceiro ano de formação o número diminuiu para 126, sendo 65 pela primeira vez e 61 de continuação.

De um inquérito realizado no início de cada ano apuraram-se os seguintes dados:

Razões para a adesão. Os professores apontaram em todos os anos como principais razões para a adesão ao Programa a valorização profissional, a formação matemática e a partilha de experiências e, em muito menor número, a progressão na carreira.

Tempo de serviço. Curiosamente, quase metade dos formandos, nestes três primeiros anos de funcionamento do Programa, têm mais de 20 anos de serviço, tendo a quase totalidade mais de 10 anos de serviço.

Necessidades de formação. Cerca de 80% dos professores não frequentou acções de formação contínua em matemática nem congressos na área da matemática. Os professores apontaram sobretudo como necessidades de formação, e por ordem decrescente, Resolução de problemas, Estatística e Probabilidades, Jogos didácticos e Investigações. Os temas que declararam que menos lhes interessam em termos de formação são Calculadoras, Geometria, Operações e Sistemas de numeração.

Utilização de materiais. Os materiais mais utilizados por estes professores antes do início da formação são o quadro e fichas de trabalho, quer comerciais quer elaboradas pelo professor. A calculadora encontra-se entre os materiais menos utilizados, seguida do computador.

Conteúdos

A equipa de coordenação do projecto estabeleceu à partida, no ano lectivo de 2005/06, os conteúdos de formação com base nos seguintes documentos oficiais: *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º ciclo*, produzido pela Comissão de Acompanhamento, *Programa de Matemática* do 1.º ciclo em vigor e *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*.

Os resultados do inquérito aplicado aos participantes no início de cada ano lectivo para auscultar as suas necessidades de formação vieram reforçar a ideia inicial da equipa sobre a organização do plano de formação. Consequentemente, deu-se um grande relevo à resolução de problemas, que surge nos dois últimos documentos atrás referidos como actividade fundamental e como contexto de aprendizagem. Embora para os alunos do primeiro ciclo os problemas devam surgir naturalmente ao longo do ano em situações de exploração, descoberta e aplicação, entende-se que os professores deverão ter sobre esta capacidade transversal um conhecimento teórico que lhes permita por um lado ganhar auto-confiança e por outro monitorizar de forma eficaz a actividade dos alunos na aula.

Em termos práticos decidiu-se assim organizar as sessões em três grandes blocos que correspondem aos temas principais do programa em vigor: *Números e Operações*, *Geometria e Medida* e *Estatística e Probabilidades*. Dentro de cada um desenvolveu-se uma primeira sessão de Resolução de Problemas e Investigações ligada a esse tema em que se apresentaram alguns conceitos teóricos acerca destes processos matemáticos e uma grande variedade de tarefas que poderão vir a ser aplicadas aos alunos do primeiro ciclo. Devido aos anos de escolaridade a que se destinam, do primeiro ao quarto, houve a preocupação de seleccionar ou construir tarefas suficientemente flexíveis que pudessem vir a ser adaptadas, por simplificação ou enriquecimento, a alunos de vários níveis. Estas tarefas, para além de desenvolverem capacidades de resolução de problemas, tinham o objectivo de contextualizar e enquadrar os diversos temas, permitindo uma primeira abordagem que depois seria reforçada e aprofundada em sessões posteriores.

Seguiam-se duas ou três sessões de desenvolvimento do tema, com um trabalho aprofundado sobre alguns conceitos e procedimentos fundamentais de modo a desenvolver o conhecimento matemático dos professores, sempre numa perspectiva de aplicabilidade na sala de aula e contendo portanto várias propostas de trabalho que envolvem utilização de materiais estruturados e não estruturados, jogos e outras tarefas ligadas ao tema visando a compreensão de conceitos e o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação. São também sugeridos pequenos projectos.

Embora o tema *Estatística e Probabilidades* seja de muito menor relevo do que os outros dois no conjunto dos conteúdos do primeiro ciclo, considerou-se que lhe deveria ser dada importância reforçada nesta formação devido às necessidades dos professores nessa área, já que num passado recente não era objecto de estudo por professores deste nível de ensino.

Para além do desenvolvimento do conhecimento matemático e didáctico nestes três temas fundamentais, considerou-se importante dedicar uma sessão a outros recursos que não foram entretanto trabalhados nas sessões temáticas, designadamente o uso de computadores, a pesquisa de temas matemáticos na Internet que possam complementar os conhecimentos dos professores ou que possam constituir fontes de ideias para trabalho com os alunos e o conhecimento de jogos facilitadores de aprendizagens matemáticas.

No segundo ano de formação, os formandos que estavam a frequentar pela segunda vez tiveram sete sessões de trabalho autónomo. Nesses dias, em que o formador estava apenas com os formandos do 1.º ano, foram trabalhados alguns dos conteúdos do ano anterior, tendo-se definido uma lista de prioridades de acordo com a experiência anterior da equipa e com as necessidades de formação identificadas pelos formandos, já que não seria possível abarcar em oito sessões o que no ano anterior tinha sido trabalhado em quinze. Nas restantes sete sessões conjuntas, continuou-se a dar um grande relevo à resolução de problemas e às investigações matemáticas, por serem temas que uma grande parte dos professores não explorava por sistema e por proporcionarem formas de trabalho e dinâmicas de sala de aula completamente diferentes das habituais. Criaram-se novas tarefas de modo a não haver sobreposição com as apresentadas no ano anterior. Deu-se bastante realce à dinâmica de sala de aula e à comunicação matemática. Abordou-se o tema dos padrões, quer de repetição quer de crescimento, numa das sessões, em que se exploraram tarefas de procura de regularidades e generalização. Preparou-se ainda uma sessão sobre análise de manuais escolares e sobre projectos.

No terceiro ano de funcionamento, os formandos que estavam a frequentar pela segunda vez tiveram cinco sessões de trabalho autónomo em que se trabalhou com os do 1.º ano alguns conteúdos essenciais que tinham sido abordados com os de continuação no seu primeiro ano. Foram assim organizadas várias novas sessões em que os grupos trabalhavam em conjunto. Deu-se particular atenção, neste ano, a conteúdos inexistentes ou de pouco realce no programa de 1990 em vigor, e que surgiram valorizados pelo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), já que a proposta de programa estava em discussão pública no início do ano lectivo e o novo programa foi posteriormente homologado, em Dezembro de 2007. Neste sentido, foram destacados temas como: (a) o pensamento algébrico, onde se deu importância fundamental ao reconhecimento de padrões em sequências e consequente generalização (em complemento da abordagem feita no 1.º ano) e ao trabalho com as operações e respectivas propriedades; (b) os números racionais sob a forma de fracção, ao qual se fez uma abordagem teórica e didáctica; e (c) a importância do trabalho com as operações antes dos algoritmos convencionais. Organizou-se ainda uma sessão sobre *A Matemática na Cidade*, que consistiu, numa primeira parte, em trabalho de campo de pesquisa e registo fotográfico da relação com a matemática de elementos naturais ou humanos existentes nas respectivas localidades, e, numa segunda parte, da apresentação dessas descobertas ao grupo de trabalho. O objectivo principal desta sessão era o reconhecimento da possibilidade e da importância da ligação da matemática ao real.

No segundo e terceiro anos de formação foram sendo definidas algumas linhas de força resultantes da informação e impressões recolhidas pelos formadores no terreno, visando colmatar deficiências ou reforçar determinadas práticas. Os pontos seguintes fazem uma descrição de cada um desses aspectos.

A resolução de problemas e as investigações. Assumiu-se desde o início do Programa que a resolução de problemas é uma capacidade fundamental a desenvolver nos alunos e, se se quer que ela seja trabalhada, terá de começar-se por dar conhecimentos e auto-confiança aos professores, já que, dada a sua formação anterior, são poucos os que manifestam segurança e à vontade nesta matéria. De facto, não defendendo que seja o único tipo de actividade a desenvolver na sala de aula, e reconhecendo o papel e a importância das actividades mais rotineiras, verifica-se contudo que é naquelas, menos tradicionais, que os professores se sentem mais inseguros. A resolução de problemas pode envolver exploração de questões, aplicação de estratégias e formulação, teste e prova de conjecturas. Trata-se de uma actividade muito exigente, pois quem resolve um problema é desafiado a pensar para além do ponto de partida, a pensar de modo diferente, a ampliar o seu pensamento e, por estas vias, a raciocinar matematicamente. Designa-se por investigações aqueles problemas mais abertos, que podem conduzir a diferentes formas de exploração e consequentemente em que há várias respostas possíveis consoante o caminho que foi ditado pelas opções feitas por cada aluno.

A dinâmica de sala de aula e a comunicação. No pressuposto da utilização de tarefas não rotineiras de resolução de problemas e de investigação, para além de um reforço do conhecimento matemático, os professores necessitam de gerir uma dinâmica de sala de aula completamente diferente do que é tradicional, já que os alunos trabalham em pares ou grupos, há necessidade de fazer a discussão e a síntese do trabalho realizado e, consequentemente, de promover a comunicação e estabelecer regras com esse fim. Por outro lado, assume uma importância fundamental o questionamento, como forma de fazer os alunos avançar num momento de dificuldade sem no entanto lhes fornecer todos os elementos necessários à resolução do problema. Foi ainda preocupação da equipa levar os professores a pensar de antemão em boas formas de representação, que constituam sugestões de organização do trabalho ou que possam contribuir para promover a compreensão dos alunos que não conseguiram por si sós resolver o problema. Estão neste caso a codificação de elementos para simplificação do registo escrito (por exemplo, utilização de uma letra em vez de um desenho ou mesmo de um nome), bem como os esquemas, tabelas e listas organizadas.

Claro que, nesta conformidade, é necessário prover os professores com um conjunto vasto de tarefas bastante ricas do ponto de vista do apelo à compreensão, ao raciocínio, ao estabelecimento de relações, uma vez que se verifica que este tipo de tarefas escasseia nos manuais em circulação. Esse aspecto foi uma das preocupações da equipa.

O uso de materiais manipuláveis. Uma acção considerada fundamental pela equipa foi o incentivo ao uso de materiais manipuláveis. Com efeito, considera-se que, sobretudo neste nível de ensino, é necessário um primeiro contacto das crianças com representações mais concretas dos conceitos matemáticos para que tenham condições de ir fazendo, ao seu ritmo, uma progressiva abstracção. Sempre que possível privilegiou-se que o professor construísse os materiais com os seus próprios alunos. No entanto, para colmatar as outras situações, foi fornecido a todos os agrupamentos com professores em formação, logo no início do primeiro ano, um conjunto de materiais manipuláveis considerados fundamentais ao ensino da matemática no primeiro ciclo. No segundo ano de formação distribuíram-se mais alguns materiais por escola, os considerados primeira prioridade (blocos de base dez, barrinhas Cuisenaire e geoplanos) dada a dificuldade que alguns professores manifestavam em se deslocar à sede do agrupamento. Verificou-se desde o início que grande parte dos professores não usavam regularmente estes materiais na sala de aula, embora os reputassem de importantes na aprendizagem mas, ou não os tinham à mão ou não sabiam utilizá-los e explorá-los. Daí ter-se considerado de grande importância fornecer sugestões de exploração válidas, em que se analisava explicitamente os tópicos matemáticos que eram introduzidos ou aprofundados com esses materiais, de modo a encarar o seu uso seriamente e não apenas como uma brincadeira ou um passatempo. Foi também reforçada a ideia de que o uso de materiais deve ser sempre acompanhado do registo pelos alunos do trabalho realizado e tendo em vista, obviamente, que os alunos prescindam deles num futuro mais ou menos próximo.

O cálculo mental. A observação revelou a todos os elementos da equipa que o cálculo mental não era valorizado pelos professores sendo muito incipiente ou mesmo deficiente na maioria dos alunos. Apesar de serem os aspectos numéricos aqueles que são, sem dúvida, mais trabalhados pelos professores, esse trabalho centra-se mais no desenvolvimento de regras e procedimentos para a realização dos algoritmos de cálculo tradicionais. O que acontece é que estes procedimentos de cálculo de papel e lápis, mesmo tendo sido antecedidos de algumas estratégias de cálculo mental, neutralizam completamente o seu desenvolvimento porque, por um lado, não lhes é dada importância pelo professor e, por outro, revelam-se como inúteis face a outra ferramenta de cálculo, com papel e lápis, aparentemente mais poderosa e eficaz. Assim, julgou-se fundamental, ao nível das sessões de formação, a insistência e reforço do cálculo mental, que se considera de primordial importância pela sua utilidade no dia-a-dia e por promover um pensamento matemático de ordem elevada. Acresce ainda o seu valor formativo na compreensão da estrutura dos números e operações e do próprio sistema de numeração decimal, bem como o pensamento criativo e independente na invenção de estratégias engenhosas. Com efeito, encontraram-se muitas crianças sem qualquer flexibilidade a nível numérico por nunca lhes terem sido proporcionados exercícios e outras tarefas com que pudessem desenvolver esta capacidade. No decurso do Programa ssociou-se sempre o cálculo mental não à recitação decorada de factos numéricos mas à descoberta de padrões e regularidades na estrutura numérica e nos resultados das operações de modo a poder construir ou interiorizar estratégias pessoais. Procurou-se ainda passar aos professores a mensagem de que o desenvolvimento desta capacidade não se adquire com uma tarefa que entretanto apliquem (e muitas foram as aplicadas nas aulas acompanhadas) mas que é o resultado dum trabalho e reforço permanente e continuado e sobretudo da sua valorização pelo professor.

Os padrões como via para o pensamento algébrico. Como já foi referido, o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) contempla, desde o primeiro ciclo, as ideias algébricas no trabalho com sequências, nas relações entre números e entre números e operações, para além do estudo de propriedades geométricas como a simetria. No entendimento do Programa de Matemática, o percurso de aprendizagem com a consideração da álgebra como forma de pensamento matemático, desde os primeiros anos, facilitará aprendizagens posteriores da álgebra. Para além destas razões, há ainda um importante factor a ter em consideração que é o envolvimento de alguns elementos da equipa de formação no projecto *Matemática e Padrões no ensino básico: perspectivas e experiências curriculares de alunos e professores*, cuja investigação fez ressaltar a importância do tema quer para aprendizagens futuras quer no aprofundamento no presente de conceitos matemáticos e suas conexões, bem como no desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas, raciocínio e comunicação. A equipa de formação considerou desta feita importante confrontar os professores em formação com este tema e uma boa variedade de tarefas a ele ligadas, já que os professores não têm, de modo geral, contacto com as ideias algébricas ou, pelo menos, não têm consciência de que, orientando adequadamente determinado tipo de trabalho que já é realizado, poderão estar a desenvolver nos alunos o pensamento algébrico. Por exemplo, ao procurar generalizações para determinados factos aritméticos como adicionar zero, adicionar dez, multiplicar por um, multiplicar por cinquenta. O desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, que também foi uma linha de força deste Programa, tem muitos pontos de contacto com a iniciação à álgebra: com aquele objectivo em vista desenvolveram-se tarefas de descoberta de padrões em tabelas de números, em fios de contas para os mais novos e na recta numérica. Trabalharam-se situações tão elementares como, por exemplo, 32 mais 10, mais 10, mais 10, etc., visualizando esses números numa tabela de 10×10, para que as crianças interiorizassem o padrão na formação dessas somas e pudessem, depois de algum tempo, "saber" sem consulta (e sem contar pelos dedos!) que 32+10=42 e que 32+20 = 32+10+10 e que o padrão é o mesmo para 57+10 ou 24+20. Paralelamente valorizou-se o trabalho de descoberta de padrões em sequências numéricas e a expressão da sua generalização sobretudo em linguagem corrente. Neste campo, deu-se grande importância a diferentes estratégias de contagem de conjuntos de objectos como pré-requisito para o desenvolvimento da capacidade de visualização.

Construiu-se assim uma proposta didáctica em três fases (Vale et al., 2009) que pudesse levar a uma familiarização progressiva com determinadas técnicas e estratégias úteis com vista à generalização: (1) Contagens; (2) Sequências; e (3) Problemas. No primeiro caso, a capacidade de "contagem visual", entendida como a apreensão da estrutura espacial da disposição de um determinado conjunto de objectos encarado globalmente, pode ter um papel de auxiliar poderoso quer nessa contagem quer na descoberta de regularidades e consequente estabelecimento de conjecturas. Apresenta-se de seguida na Figura 19 um exemplo desta situação, com o qual se pretende ilustrar a procura de diferentes modos de visualização da estrutura, a descoberta de regularidades que permitem um cálculo rápido e a sua transformação em expressões numéricas equivalentes.

Quantos peixinhos estão na figura?
Descobre diferentes modos de contagem.
Escreve as expressões numéricas respectivas.
Que concluis?

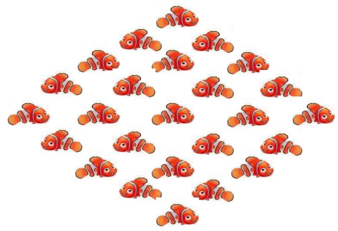


Figura 19. Contagens visuais

Este é um exemplo de possível expressão numérica 5x5, por analogia com um arranjo rectangular, e 1+2+3+4+5+4+3+2+1 por leitura horizontal (vertical).

Na segunda fase trata-se do reconhecimento de padrões em sequências, de modo a permitir a generalização através de regras que os próprios alunos podem formular, recorrendo ou não à simbologia. A procura de padrões em sequências numéricas pode ser uma boa oportunidade para introduzir ou relembrar números e relações numéricas, por exemplo, números pares e ímpares; múltiplos; potências.

Com o exemplo apresentado na Figura 20 pretende-se mostrar como a apropriação visual da regularidade permite um grau de generalização até à descoberta do termo geral da sequência que por simples observação da sequência numérica não seria possível a alunos deste nível de ensino.

Considera a sequência de estrelas em L.

fig1 fig2 fig3

1. Quantas estrelas tem o 4.º L?
2. Quantas estrelas são necessárias para construir a 20.ª figura?
Explica como pensaste. Discute com o colega do lado.
4. Explica por palavras tuas quantas bolas precisas para desenhar uma figura qualquer na sequência.

Figura 20. Sequência de estrelas

Se os alunos se limitarem a observar a sequência numérica resultante:

4, 6, 8, 10, 12, ...

é simples descobrir uma lei de formação por recorrência (cada termo obtém-se adicionando 2 unidades ao anterior) mas já não é nada simples descobrir o termo geral, ou seja, fazer uma generalização que permita dizer quantas estrelinhas tem uma figura de qualquer ordem da sequência.

A observação de cada uma das figuras e do invariante na sua estrutura - a apreensão das figuras como sendo constituídas, por exemplo, por uma coluna de estrelas e uma linha sobrante, dará origem às expressões 3+1, 4+2, 5+3, etc., o que permite conjecturar que o termo de qualquer ordem 20 será dado pela expressão 22+20 ou ainda que um termo de qualquer ordem n será dado pela expressão (n+2)+n.

A propósito da utilização de variáveis como representantes e tal como está em evidência neste exemplo, deve-se referir que esse trabalho foi desenvolvido com os professores nas sessões de formação conjuntas, e que este processo de generalização foi considerado natural. Em contrapartida, a sua utilização com os alunos não foi aconselhada. Ficou ao critério do professor, e de acordo com a sua turma, a introdução do uso de variáveis, com as devidas cautelas, depois da verbalização da generalização para a figura 10, ou a figura 53 ou a figura 100, e de uma representação icónica equivalente do tipo "?" ou " □ ".

Na terceira fase desta proposta didáctica apresentaram-se e resolveram-se problemas, na perspectiva de que o reconhecimento de padrões é uma estratégia poderosa de resolução de problemas. Nestas tarefas são os alunos que têm de construir as suas próprias sequências de modo a descobrir o padrão que os leve à generalização permitindo chegar à solução. É claro que muitas das questões anteriores já constituem problemas. Aqui trata-se de problemas de palavras, com um enunciado contextualizado, como na Figura 21:

O João deu uma boa notícia a dois amigos: amanhã vai haver cinema na escola! Nos cinco minutos seguintes cada um dos amigos contou-a apenas a outros dois. Cada aluno que ouviu a novidade contou-a a dois colegas no prazo de cinco minutos e depois disso não a contou a mais ninguém. Às nove e meia quantos meninos sabiam a novidade?

Figura 21. Problema de padrão

Este problema é ilustrativo da força da estratégia de descoberta de um padrão, pois verifica-se que, embora possam ser utilizadas outras estratégias, como a elaboração de um esquema, a descoberta do padrão na evolução dos números é incomparavelmente mais eficaz.

Assim, o pensamento algébrico, para além de preparar os alunos para aprendizagens posteriores, permite o desenvolvimento de capacidades transversais de resolução de problemas e comunicação e também uma grande variedade das conexões com todos os temas da matemática.

Recursos

No fim do primeiro ano de formação a coordenação optou por fazer uma compilação de todos os materiais utilizados nas sessões de formação numa brochura (Vale, Fão, Portela, Geraldes, Fonseca, Gigante, Lima & Pimentel, 2006). Esta brochura consta, em cada tópico apresentado, de uma breve introdução teórica a nível dos conceitos matemáticos envolvidos, de um número considerável de propostas de tarefas para a sala de aula e de imagens fotográficas que ilustram a aplicação dessas mesmas tarefas por professores em formação nas suas aulas durante o primeiro ano. Traz associado um CD donde se podem descarregar os enunciados de tarefas apresentadas e alguns anexos úteis como tabuleiros de jogos, imagens, tabelas, etc. Os formandos apreciaram muito esta iniciativa, pois passaram a dispor de uma fonte de recursos para a sala de aula e que podiam manipular de modo simples e prático, o que levou a equipa a editar mais duas brochuras nos dois anos subsequentes (Vale, Fão, Cabodeira, Portela, Geraldes, Fonseca & Pimentel, 2007; Vale, Fão, Alvatenga, Freire, Sousa & Pimentel, 2008) com os novos materiais entretanto produzidos. Esta iniciativa extravasou o âmbito da formação, sendo consultada por muitos professores exteriores ao Programa.

Foram construídos nas sessões de formação ou explicitada a possibilidade de construção pelo professor ou em conjunto com os alunos de uma grande variedade de materiais manipuláveis de apoio à aquisição de ideias matemáticas. Nos casos em que a construção não era viável recorreu-se à exploração e utilização de materiais manipuláveis comerciais, tendo os agrupamentos e escolas sido providos com um conjunto considerado fundamental.

Foi ainda criada, durante o terceiro ano de formação, uma plataforma *moodle* para permitir: (a) informações relevantes; (b) troca de impressões; (c) acesso aos documentos fornecidos nas sessões conjuntas de formação; e (d) colocação, para consulta, de trabalhos realizados pelos formandos.

Organização do trabalho

Podem considerar-se vários momentos neste Programa correspondentes a tipos de trabalho diversificados. A descrição feita de seguida de cada um desses momentos não é neutra mas sim atravessada pelas experiências e perspectivas da investigadora ao longo do seu percurso como formadora do Programa, de modo a dar a conhecer ao leitor os diferentes papéis assumidos pela investigadora que, embora enquadrados pelas opções e decisões da equipa de formação, têm sempre muito de pessoal. Os episódios relatados ocorreram em grupos de formação da sua responsabilidade.

Sessões de trabalho da equipa de formação. A equipa de formação reunia semanalmente com o objectivo primordial da construção de materiais de apoio às várias sessões. Esses materiais foram objecto de pesquisa, elaboração, análise, resolução, debate aprofundado e reflexão por parte da equipa de coordenação e de formadores previamente e em reuniões semanais conjuntas, conduzindo assim à sua reformulação e refinamento, facilitados por um equilíbrio no seio da equipa entre um saber mais científico e um saber mais feito de experiência. Este trabalho conduzia e proporcionava, naturalmente, a discussão de conceitos matemáticos envolvidos e também de estratégias de ensino. Eram muitos, e estimulantes, os debates proporcionados pelos desafios surgidos quer das tarefas que se iam organizando quer de situações inesperadas ou circunstanciais e que eram aproveitados para um maior enriquecimento.

Adicionalmente procedeu-se à elaboração, levantamento e tratamento de dados de inquéritos aplicados aos formandos sobre necessidades de formação e à preparação das diferentes sessões colectivas.

É importante referir também os aspectos de reflexão sobre a prática da equipa de formadores. Esta era feita de modo continuado nas reuniões semanais, onde se relatavam episódios da experiência vivida durante essa semana nas sessões de formação e de acompanhamento em sala de aula. Com base nesses episódios, partilhavam-se sucessos e constrangimentos, discutiam-se as melhores formas de abordagem para os dilemas encontrados, definiam-se formas de organização do trabalho e prioridades na planificação das sessões conjuntas, debatia-se o grau de aprofundamento de conceitos matemáticos e das sugestões didácticas a explorar.

Sessões conjuntas de formação. A formadora encontrava-se com os professores em reuniões quinzenais de formação, que decorriam normalmente nas sedes de agrupamento. Nessas sessões, numa primeira fase, os professores, em conjunto com a formadora, conversavam e reflectiam sobre as aulas entretanto observadas e, numa segunda e mais prolongada, analisavam, resolviam, debatiam aprofundadamente e reflectiam sobre os materiais apresentados pela formadora com vista à planificação das suas aulas.

Foi dada muita importância à reflexão sobre a prática profissional dos professores e à partilha de experiências com os colegas. Todas as sessões começavam por um período destinado a essa mesma partilha, em que cada professor com aula entretanto acompanhada pela formadora descrevia os aspectos essenciais da sua aula, realçando os pontos que julgasse mais pertinentes – o trabalho dos alunos, as suas dificuldades e sucessos, uma abordagem nova que tinha resultado, o ambiente da sala de aula. A formadora fazia também um comentário a essa mesma aula observada, realçando os aspectos mais interessantes e que pudessem servir de modelo para os outros professores. Esta reflexão era posterior à reflexão a seguir à aula observada, que ocorria sempre apenas entre o professor e a formadora. Outros professores, mesmo que não tivessem tido aula observada, foram-se habituando progressivamente a descrever, nos mesmos moldes, experiências de sala de aula que tinham entretanto realizado. Assim se procurou criar uma comunidade de aprendizagem, em que as iniciativas e experiências de uns pudessem ser de utilidade para os outros e reciprocamente, e em que fossem valorizadas, não só as aulas acompanhadas, mas todas as aulas de cada professor. O papel da formadora era o de desafio constante e moderadora das discussões. Fazia também a síntese e a sistematização dos conceitos abordados introduzindo, sempre que necessário, novos dados ou informações.

Na segunda parte da sessão os professores familiarizavam-se com tarefas que se pretendiam ricas do ponto de vista da aprendizagem matemática dos alunos através do seu próprio envolvimento na realização dessas tarefas. Utilizavam quando pertinente os materiais manipuláveis correspondentes e organizavam-se em pequenos grupos de modo a terem oportunidade para discutir e esclarecer dúvidas com os colegas e a formadora. Simultaneamente, "pondo-se na pele" dos alunos, reflectiam sobre eventuais dificuldades que poderiam surgir na exploração dessas tarefas na sua sala de aula e pensavam em formas de questionamento que permitissem ultrapassá-las. Com esta metodologia pretendia-se que, por um lado, desenvolvessem o seu conhecimento matemático e didáctico e, por outro, ganhassem gosto e confiança na realização com os seus alunos dum tipo de tarefas pouco utilizadas.

Com efeito, o professor deste nível de ensino tem necessidade de ter um conhecimento matemático sólido mas que suporte os conteúdos que lecciona: (a) adquirir conhecimento e familiaridade com os conceitos matemáticos fundamentais que lhe permitam conduzir um questionamento e uma interacção eficazes com os alunos por forma que estes possam desenvolver, de um modo natural, o seu pensamento matemático; (b) simultaneamente, adquirir intuição para captar comentários ou observações dos alunos que possam potencialmente conduzir, desde que bem explorados, a ideias poderosas, sabendo distinguir daqueles que não valerá a pena explorar e portanto optando, nesses casos, por passar à frente.

Para atingir estes objectivos, a equipa de formação decidiu utilizar o veículo da exploração e análise de tarefas com um formato apropriado para poderem ser trabalhadas pelos alunos. De facto, elas fornecem um suporte concreto que permite detectar, no cômputo geral, uma série de conceitos fundamentais e procedimentos que um aluno do primeiro ciclo deverá dominar, bem como de raciocínios que deverá desenvolver. A título de exemplo, apresenta-se a tarefa da Figura 22 que foi explorada em conjunto com os professores:

A Rita pôs a secar cinco guardanapos. Quantas molas é que ela usou?
Começa por fazer um desenho que ilustre a situação.
Podes também fazer uma tabela onde registes os vários resultados que encontraste.
Analisa a tabela e procura tirar conclusões.
Procura agora responder: E se fossem 10 guardanapos? E 47?

Figura 22. Exemplo de tarefa utilizada nas sessões de formação conjunta

Sugeriu-se a construção de uma tabela com os dados recolhidos a partir das experiências dos próprios alunos. A tarefa é suficientemente aberta para permitir diferentes possibilidades e foram exploradas todas as que foram surgindo. Pela observação e análise da tabela entretanto construída num dos vários casos possíveis - pendurar cada guardanapo com duas molas, e apresentada na Figura 23, surgem inevitavelmente, de forma mais ou menos explícita, conceitos como: números pares e ímpares; regularidade na evolução da distribuição do número de molas; definição da sucessão por recorrência; operadores *dobro de* e *metade de* como operadores inversos; proporcionalidade; definição da sucessão através do seu termo geral; variável; função; etc.

n.º de guardanapos	n.º de molas
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
...	...

Figura 23. Relação entre o número de molas e o número de guardanapos

Todos estes tópicos matemáticos foram abordados com os formandos, embora alguns deles não devam, obviamente, ser tratados de forma explícita com as crianças. O conhecimento matemático surgia assim em acção, de forma situada, como resultado de uma exploração que é possível e mesmo desejável os professores realizarem com os seus alunos, o que fornece uma maior motivação para o seu aprofundamento do que a mera aprendizagem dos conceitos matemáticos por si, desligados de qualquer contexto. Por outro lado, o trabalho conjunto com os colegas e a formadora permitia chamar a atenção para algumas explorações interessantes que não estão presentes no enunciado da tarefa, tais como, por exemplo:

- "Se a Rita tivesse 15 molas quantos guardanapos deveria pendurar de modo a gastá-las todas?" – o que conduz a uma impossibilidade que deve ser discutida e justificada;

- "Com 28 molas quantos guardanapos pode a Rita pendurar?" – o que exige o recurso à operação inversa, sua discussão e justificação.

Na maioria das sessões de formação foi usada esta metodologia de trabalho – partir de tarefas que a equipa desenvolveu ou seleccionou e que foram sendo recolhidas em publicações, como já foi referido.

Por vezes, a própria tarefa suscitava, inesperadamente, a exploração matemática de tópicos não previstos. Por exemplo, uma tarefa relacionada com fracções, em que se pedia para dividirem um rectângulo em partes de igual área com o objectivo de se construírem umas bandeirinhas representativas do "país dos quartos" $\left(\frac{1}{4}\right)$, revelou-se muito rica pela exploração matemática a que deu origem. Tendo sido pedidas soluções criativas, surgiram nas sessões de formação as situações registadas na Figura 24.

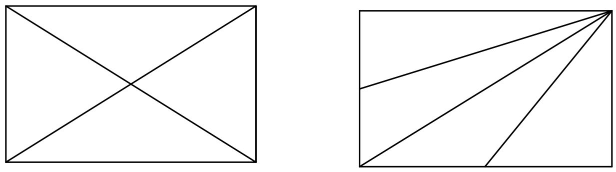


Figura 24. Relação entre as áreas dos triângulos

Os professores não estavam certos da igualdade das áreas obtidas com a divisão, embora muitos a pressentissem intuitivamente. Foi então necessário procurar uma justificação, de preferência acessível a alunos do 1.º ciclo.

No primeiro caso, o traçado das medianas do rectângulo mostra claramente que os dois triângulos são equivalentes já que podem considerar-se constituídos por dois triângulos geometricamente iguais (por serem resultado da divisão de um rectângulo por uma diagonal), apenas num arranjo diferente, como pode constatar-se na Figura 25.

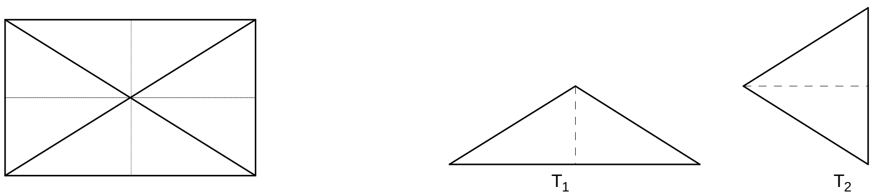


Figura 25. Prova da equivalência dos dois triângulos

Fez-se também, neste caso, a demonstração usando a fórmula da área do triângulo – esta já inacessível aos alunos:

Considerando o rectângulo inicial com base b e altura h, as áreas dos triângulos T_1 e T_2 vêm dadas por

$$A_{T_1} = \frac{b \times \frac{h}{2}}{2} \qquad \text{e} \qquad A_{T_2} = \frac{h \times \frac{b}{2}}{2}$$

donde se verifica serem iguais.

O caso da segunda “bandeira” é um pouco mais complexo; a diagonal do rectângulo divide-o em dois triângulos iguais. Desses, cada um está dividido em dois triângulos por um segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto (estabelecido por construção). Assim, esses dois novos triângulos têm a mesma base e a mesma altura, donde se pode concluir que têm a mesma área. Na Figura 26, na imagem da direita vê-se um par de triângulos que ocupa a metade do rectângulo abaixo da diagonal, mas o mesmo raciocínio se aplica ao outro par, que ocupa a metade do rectângulo acima da diagonal. Daqui resulta que os quatro triângulos, embora com formas completamente diferentes, têm a mesma área.

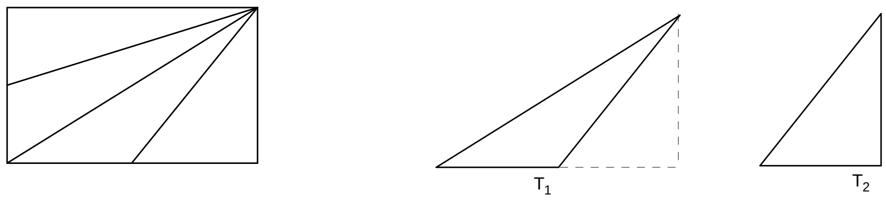


Figura 26. Prova da equivalência de um dos pares de triângulos

Mais difícil foi arranjar uma prova acessível aos alunos. No entanto, o traçado da figura numa malha rectangular (ou num geoplano, material muito usado na formação) pode levar à conclusão da igualdade das áreas, já que estas podem ser calculadas por uma estratégia de enquadramento por rectângulos, de que é simples calcular a área, tal como se mostra na Figura 27. Neste caso estamos obviamente a limitar o problema a rectângulos cujas dimensões estão entre si numa razão de inteiros, mas esta é uma subtileza que pensamos poder ignorar com alunos destas idades (embora os professores possam ter disso consciência). Além disso, estamos a realizar o cálculo num caso concreto, mas que é generalizável a um rectângulo de quaisquer dimensões numa malha quadrada.

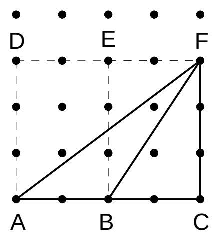


Figura 27. Prova da igualdade das áreas dos dois triângulos

A justificação poderá ser feita como segue:

A área do triângulo [BCF] é metade da área do rectângulo [BCFE], ou seja, é igual a 3.

A área do triângulo [ABF] é igual à diferença entre a área do triângulo [ACF] – que é metade da área do rectângulo [ACFD] - e a área do triângulo [BCF], ou seja, é igual a 12 : 2 – 3 = 3.

Logo, os dois triângulos têm a mesma área.

Estas explorações tiveram também a vantagem de ilustrar e discutir a possibilidade e oportunidade de demonstração no 1.º ciclo.

Paralelamente a estas abordagens houve várias sessões em que se tratou, explicitamente, conteúdos matemáticos para além dos exigíveis aos alunos, sob a forma de exposição pela formadora, de modo a complementar e alargar conhecimentos matemáticos dos professores julgados necessários. É o caso de: números racionais decimais e não decimais; classificação de triângulos e de quadriláteros; polígonos regulares e não regulares, convexos e não convexos, conceitos ligados à estatística e às probabilidades, etc. Estes são temas que os professores não dominavam ou que era necessário recordar ou aprofundar.

Sessões de acompanhamento em sala de aula. Nas sessões de acompanhamento, os formadores assistiam e acompanhavam as actividades da sala de aula, onde os professores exploravam com os seus alunos algumas das tarefas previamente abordadas, trabalhadas e reflectidas nas sessões de formação descritas anteriormente. Depois de prolongada discussão, a equipa de formadores optou pela observação participante para pôr o professor mais à vontade, não dar o cariz de inspecção e porque efectivamente a presença doutro professor na aula pode constituir um benefício para os alunos em termos de apoio. A intervenção da formadora procurava ser muito mais de colaboração e apoio do que de crítica ou inspecção, porque é essa a sua estrutura pessoal. Com o tempo foi-se confirmando que esta postura é mais consentânea com o crescimento e desenvolvimento profissional.

Estas sessões tinham uma duração prolongada (em média noventa minutos), o que se justificava por um lado dada a existência de muitas escolas pequenas e/ou só com um professor em formação e a distância entre escolas, o que impossibilitaria ao formador a transição rápida entre turmas e levaria a grande desperdício de tempo, e por outro por se entender que uma observação rápida não daria uma ideia correcta sobre a actividade dos alunos, o desenvolvimento das tarefas, o tipo de interacções e a dinâmica da sala de aula.

Os professores em formação valorizaram muito estas sessões de acompanhamento uma vez estabelecido um clima de empatia e colaboração entre formando e formadora, já que, para além de fazerem em conjunto a reflexão da aula no fim desta, apontando novas possibilidades para o futuro, a formadora podia, *in loco*, dar sugestões ou mesmo fazer pequenas intervenções na aula, o que era bem recebido tanto pelo professor em formação como pelos seus alunos e tinha a vantagem de evitar abordagens menos conseguidas ou enriquecer explorações iniciadas. Adicionalmente, quebrava a rotina da aula constituindo assim um factor de motivação e atenção para os alunos. A formadora e investigadora pode afirmar, da sua própria experiência, que foi sempre muito bem recebida pelos alunos, muitas vezes ao som de gritos de alegria no recreio: "Vem aí a professora de matemática!". Relatam-se de seguida alguns episódios que procuram ilustrar eventuais benefícios da presença da formadora na sala de aula.

Numa aula em que a professora tinha tido um percalço com a impressão e fotocópia de uma ficha de trabalho preparada para utilizar na aula observada, acabou por optar, à última hora, por escolher uma tarefa constante no manual adoptado. Tratava-se de um 4.º ano e a tarefa era do seguinte teor: À esquerda da página havia uma imagem de um geoplano com duas figuras geométricas, um trapézio e um triângulo, e imediatamente à direita figurava um ponteado de 5x5, vazio, das mesmas dimensões do da primeira figura. Pedia-se então para passar para o ponteado as figuras geométricas do geoplano e pintá-las. Seguia-se um segundo exercício absolutamente igual, apenas com outras figuras. Perante a perspectiva absurda de ter os alunos do 4.º ano a gastar um tempo precioso da aula de matemática a copiar e pintar, a formadora sugeriu à professora que, embora aproveitando como base a tarefa, esta fosse acrescentada com o cálculo das áreas e comparação dos perímetros das figuras em questão, donde resultou uma aula em que os alunos trabalharam e que constituiu um desafio ao seu nível. A professora, na reflexão, comentou que, só por isto, já tinha valido a pena estar a frequentar a formação, porque tinha aprendido que é necessário um olhar crítico sobre os manuais, que muitas vezes são um pouco "endeusados" na perspectiva de que tacitamente se pensa que quem os fez deve saber o que está a fazer. Por outro lado, é importante que, em face destas situações, os professores adquiram a experiência de enriquecer as tarefas apresentadas pelos manuais partindo delas, já que, como dizem, os pais exigem o seu uso porque fizeram despesa na sua compra. Esta reflexão foi partilhada com o grupo na sessão de formação seguinte.

Noutra aula a professora apresentou aos alunos do 3.º ano o seguinte problema, ilustrado na Figura 28: Colorir a figura apenas com uma cor de todos os modos possíveis.

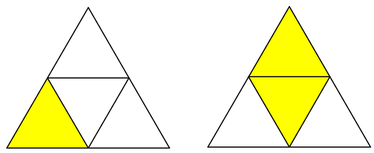


Figura 28. Dois modos diferentes de colorir a figura

Tratava-se de descobrir todas as hipóteses do tipo das apresentadas. A professora estava já sensibilizada, através de outros problemas já trabalhados, para a necessidade de se proceder organizadamente, de modo a não repetir ou esquecer hipóteses. No entanto, verificou-se que, apesar dessas recomendações, alguns alunos não conseguiam ser sistemáticos devido à dificuldade acrescida da configuração dos triângulos (se fossem 4 quadrados a figura tornava-se muito mais simples). Deste modo, a formadora sugeriu a numeração das casinhas como se apresenta na Figura 29 para facilitar a sua escolha organizada para pintar.

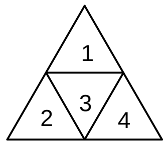


Figura 29. Numeração dos triângulos

A elaboração de uma lista organizada de possibilidades, cada uma delas relacionada com uma representação pictórica, permite esgotar todos os casos com menor probabilidade de falha ou repetição:

1	2	3	4		
1,2	1,3	1,4	2,3	2,4	3,4
1,2,3	1,2,4	1,3,4	2,3,4		
1,2,3,4					

Assim, criou-se outro modo de representação que apoia e facilita muito a tarefa em curso de pintar de todas as maneiras possíveis. Este modo de representação introduz um certo formalismo mas tem a vantagem de ir familiarizando os alunos com processos de codificação e descodificação e com a necessidade de organização e sistematização do pensamento, sobretudo em problemas de contagem. Este procedimento foi apenas introduzido na síntese da tarefa, quando um aluno, no quadro, nas malhas triangulares previamente traçadas pela professora, ia colocando com *post it* triângulos de cartolina vermelha em diversas posições, em correspondência com o código que se ia simultaneamente definindo com os alunos e se ia também registando no quadro.

Numa outra ocasião, outra professora, em pesquisa na Internet, encontrou um problema de que gostou e que resolveu trabalhar com os seus alunos do 4.º ano. Era "Sapos e rãs". Dois sapos e duas rãs precisavam de atravessar um lago e tinham cinco pedrinhas para não ter de mergulhar na água fria. A imagem[11] apresentada pela professora é a da Figura 30.

[11] Retirado de http://www.acervodejogos.com/jogo74.htm em 2008,Mai05

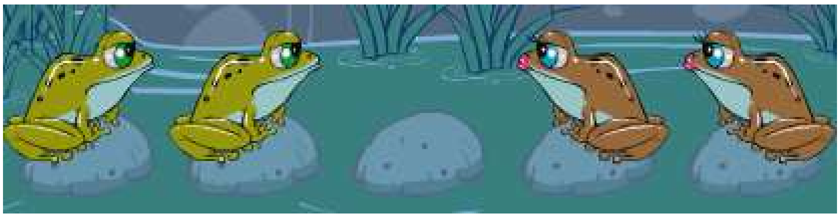


Figura 30. Sapos e rãs

Os animais tinham de avançar para a pedra seguinte ou saltar por cima de um companheiro, mas não podiam voltar para trás. Depois pedia-se para resolver o mesmo problema para três animais de cada espécie. O jogo por si só é interessante como problema e os alunos ficaram entusiasmados. A professora tinha planeado que os alunos dramatizassem a situação com cadeiras (rapazes e raparigas) e, com as várias experiências, foram chegando à descoberta do padrão não numérico: era necessário não deixar juntar dois animais da mesma espécie senão o jogo encravava. Assim, o segredo era fazer os movimentos de modo que os animais ficassem sempre alternados: sapo – rã – sapo – rã - ... Tanto para dois sapos e duas rãs como depois para três sapos e três rãs contaram o número de movimentos necessários. De seguida, em grupos de três, e podendo simular a experiência com marcas coloridas, pretendia--se que encontrassem uma representação eficaz para fazerem o registo do número de movimentos. Verificou-se que no primeiro caso eram precisos 8 movimentos e no segundo caso 15. Faltava no entanto a parte matemática mais importante, que era determinar se esses números obedeciam a um padrão, facto sobre o qual a professora não tinha chegado a qualquer conclusão. E aí a intervenção da formadora foi útil ao instigar os alunos a descobrirem esse padrão. Primeiro analisou rapidamente a situação com a professora (em plena aula, enquanto os alunos estavam ocupados na descoberta da forma de representação dos movimentos efectuados), tendo-lhe indicado qual era o padrão para que não ficasse ansiosa e para lhe mostrar que este era acessível aos alunos, dando eventualmente pistas. Sugeriu que realizassem o caso mais simples, em que existe apenas uma rã e um sapo, e fossem registando numa tabela o número de rãs e, em correspondência, o número de movimentos. Alguns grupos descobriram, face à relação entre o número de movimentos, que avançava +5, depois +7, e portanto no caso de 4 rãs seria +9, ou seja, 24. Descobriram assim o padrão por recorrência, mas a formadora chamou a atenção para o facto de este padrão, apesar de inteiramente correcto, não permitir determinar o que se passa, por exemplo, com 50 rãs se não se souber o que se passa com 49. De seguida foi sugerido que tentassem transformar os números em produtos e houve logo alunos que conseguiram descobrir que 3 = 1x3, 8 = 2x4, 15 = 3x5 e portanto no caso de 4 rãs o número de movimentos deveria ser 4x6 dando depois o salto para a generalização distante, para o caso de 100 rãs (100x102) e mesmo de um número desconhecido de rãs, N, em que o número de movimentos deveria ser Nx(N+2). A professora considerou muito positiva esta intervenção da formadora, já que veio enriquecer do ponto de vista matemático a investigação proposta e levou os alunos a irem mais além, trabalhando, sem a professora esperar, o pensamento algébrico no processo de generalização. Nesse mesmo dia, ao fim da tarde, na sessão de formação conjunta, a professora partilhou com os colegas esta experiência, tendo orientado, na própria sessão, a investigação com os colegas tal como a realizou na sua aula, até chegarem em conjunto à conclusão final sobre o número de movimentos necessários a N rãs. Os colegas consideraram esta partilha muito enriquecedora para além de se terem divertido bastante a fazer a dramatização da situação.

Como se vê, procurou-se sempre tirar partido das iniciativas dos professores e, em caso de insuficiência, sugerir complementos ou alternativas. Não se pode, porém, depreender que tudo correu sempre pelo melhor. Momentos houve de angústia e insegurança sobre o melhor caminho a seguir, sobre o grau de intervenção adequado ou ainda por falta de tempo para um trabalho mais personalizado quando tal se revelava necessário. Para a investigadora e formadora foi também uma aprendizagem muito rica, recheada de êxitos, de desafios e por vezes de perplexidades.

Sessões colectivas. No primeiro ano de funcionamento do Programa, realizaram-se duas sessões colectivas, uma em Março e outra no final do ano. A primeira decorreu durante uma tarde e contou com duas conferências plenárias com o tema A matemática no 1.º ciclo: perspectivas de mudança e um painel sobre relatos de experiências. O seminário final, realizado em Julho, no fim do ano lectivo, pretendia constituir uma forma de divulgação do programa e do trabalho realizado no seu âmbito e também mais uma oportunidade de formação. No primeiro ano de funcionamento foram realizadas conferências por professores e investigadores convidados e foram realizadas pelos formadores várias sessões práticas sobre temas variados em que os professores puderam inscrever-se. No ano subsequente manteve-se o formato das conferências na parte da manhã mas realizou-se durante a tarde uma feira de ideias e materiais organizada em quiosques onde todos os professores podiam apresentar experiências de ensino e materiais. Esta iniciativa foi muito bem recebida pelos professores principalmente pelo seu carácter informal. O facto de o professor, num espaço aberto como é um ginásio, apresentar o seu trabalho durante cerca de 10 minutos a quem quisesse parar no seu quiosque, libertou esta apresentação da carga inibidora que certamente teria se tivesse sido feita numa sala clássica. Apareceram muitas apresentações de experiências e de materiais usados pelos professores na sala de aula. Nos quiosques havia alternância de professores do 1.º e do 2.º ciclo com o fim de possibilitar uma integração dos dois níveis de ensino.

Aproveitando a boa experiência do ano anterior, no ano lectivo de 2007/08 o seminário voltou a realizar-se nos mesmos moldes. Houve ainda maior participação do que no ano anterior já que a maioria dos professores no 2.º ano de formação aproveitaram para fazer a apresentação do trabalho autónomo que já tinha sido elaborada anteriormente, como se descreverá no ponto seguinte.

O trabalho autónomo. Durante o segundo ano de formação, os professores devem, de acordo com as normas do PFCM, realizar trabalho autónomo. Da primeira vez que tal aconteceu foi pois no ano lectivo de 2006/07 e tinham para o efeito sete sessões de duas horas. A equipa definiu neste primeiro ano de trabalho autónomo que os professores deviam trabalhar na mesma escola e à mesma hora que decorria a formação com os seus colegas que frequentavam pela primeira vez, embora noutro espaço, e tiveram liberdade para trabalhar temas do seu interesse de entre uma série de sugestões fornecidas pelos formadores. Assim, poderiam estudar um conteúdo matemático, desenvolver um projecto, planificar tarefas para os seus alunos com destaque para algum tópico ou capacidade, como por exemplo a comunicação, etc. Verificou-se no entanto que grande parte dos professores tiveram dificuldade em organizar-se e em produzir um trabalho de qualidade, tendo lamentado que acabavam por ter um trabalho paralelo muito maior que os colegas do primeiro ano e auferindo no fim menos créditos de formação. Deste modo, foi proposto no ano lectivo de 2007/08 um trabalho de tipo diferente, mais virado para os requisitos de avaliação da acção mas mais aprofundado, cujas linhas fundamentais se discriminam na Figura 31.

Cada professor ou par de professores do 2.º ano prepara, em trabalho autónomo, uma pequena sessão de formação para os colegas. Esta sessão deverá ter as seguintes características:

- Basear-se numa experiência de sala de aula com os seus alunos previamente realizada.
- As tarefas desenvolvidas podem ter sido propostas em sessões de formação de anos anteriores ou ser criadas ou seleccionadas pelos formandos, dentro das linhas orientadoras e finalidades do programa.
- Explicitar e fundamentar os conteúdos matemáticos que se pretendem trabalhar e eventualmente propor aos colegas tarefas de enriquecimento visando aprofundar o conhecimento matemático necessário para ensinar esse conteúdo.
- Pormenorizar o questionamento que planeou fazer e o que fez efectivamente aos alunos para os apoiar na realização da tarefa e lhes proporcionar uma aprendizagem significativa.
- Apresentar algum trabalho de alunos cuja análise tenha particular relevância.
- Eventualmente, se for um trabalho a pares e as condições o permitirem, o trabalho conjunto pode não ser apenas de planificação mas ser aprofundado com um acompanhamento mútuo das aulas e discussão conjunta.
- Apresentar as suas impressões sobre o modo como decorreu a experiência, as reacções dos alunos e as aprendizagens realizadas.

Figura 31. Guião do trabalho autónomo

Este trabalho podia constituir parte substancial do portefólio a entregar no fim da formação, embora se pretendesse que a sua apresentação fosse feita muito antes do final do ano lectivo.

Procurou-se com esta proposta promover a reflexão como uma componente crucial do desenvolvimento profissional do professor. O facto de os formandos dinamizarem uma sessão para os colegas do 1.º ano levando-os a descentrar-se deles próprios e mudando, ainda que transitoriamente, a sua identidade, permitiria a distanciação e simultaneamente a motivação requeridas para uma reflexão necessária à mudança (Hodgen, 2003).

Por outro lado, a possibilidade de um trabalho conjunto aprofundado, que foi agarrada por alguns dos formandos, promovendo a partilha de ideias e da prática, bem como de medos, expectativas e outros sentimentos, permitia reduzir o isolamento dos professores e desenvolver processos de mudança, segundo o conceito já explanado de amigos críticos (Day, 2001).

Além do que já foi referido, este trabalho abria perspectivas para, num futuro próximo, se constituírem nas próprias escolas equipas de trabalho e debate de ideias sobre conhecimentos e experiências da prática dinamizadas por um coordenador mais ligado à área da matemática, o que, de resto, é um dos desígnios do PFCM.

Na avaliação final deste trabalho devem referir-se os seguintes pontos: (a) globalmente, os professores revelaram grande empenhamento na sua preparação; (b) os proponentes elaboraram materiais úteis e adequados; (c) as apresentações foram de grande qualidade; (d) os colegas do 1.º ano consideraram de grande valor a formação recebida dos seus pares, tendo em muitos casos introduzido na sua própria prática as sugestões colhidas dos colegas; e (e) os próprios fizeram uma auto-avaliação muito positiva do seu trabalho.

Os professores envolveram-se na preparação e implementação de aulas, na maioria dos casos em pares, e as apresentações foram feitas com muito profissionalismo e boa qualidade, tanto quanto à forma como quanto ao conteúdo. Em muitos casos foi utilizada tecnologia (apresentações em *PowerPoint*) e o guião fornecido foi cumprido. Normalmente os recursos e tarefas basearam-se em sugestões dadas ao longo da formação mas acrescentando um cunho pessoal. Também foram colocados, pela maioria dos grupos, desafios aos colegas relacionados com o trabalho apresentado. Estes desafios foram sendo aproveitados para explorar e aprofundar conteúdos matemáticos.

No fim destas sessões fazia-se uma troca de impressões informal e os formandos foram-se pronunciando muito positivamente sobre esta forma de trabalho autónomo. Numa dessas ocasiões, a formadora e investigadora, dirigindo-se aos formandos do 1.º ano, lembrou que, se quisessem continuar no Programa, no ano seguinte seria a sua vez, ao que um formando respondeu: "Pois é, mas o problema é que a fasquia está muito alta!".

Para alguns dos formandos esta experiência constituiu a primeira vez em que fizeram uma apresentação pública de um trabalho seu, o que os encheu de orgulho e levou a um maior envolvimento e valorização do trabalho realizado.

O conteúdo destas apresentações foi, nalguns casos, colocado na plataforma *moodle* que entretanto foi criada para comunicação entre os vários participantes neste programa. Outra forma de divulgação destes trabalhos foi o seminário final, onde a grande maioria dos formandos do segundo ano apresentou o seu trabalho autónomo.

Referem-se de seguida alguns exemplos concretos de apresentações de trabalho autónomo realizadas em sessões conjuntas.

Num dos grupos o formando trabalhou números pares e ímpares e relatou uma conjectura que tinha sido feita por um dos seus alunos do 2.º ano no início desse trabalho: "Os números 12, 15, 16 e 19 são todos ímpares pois começam por 1 que é um número ímpar".

Face a esta situação, o professor colocou aos colegas, na sessão de formação, a questão de como levar o aluno a aperceber-se do erro, provocando assim uma discussão sobre o tema. Apresentou de seguida a sua opção no decurso da aula, que consistiu em mostrar ao aluno que o 1 a que ele se referia tem o valor de uma dezena, e 10 é um número par; assim, o que decide a paridade do número não pode ser esse algarismo. Relatou ainda que posteriormente nessa mesma aula os seus alunos conseguiram concluir que esse papel é desempenhado pelo algarismo das unidades.

Noutro caso, um grupo de três formandas trabalhou os sólidos, tendo uma delas dedicado mais atenção às pirâmides, que construiu com os alunos e depois na sessão de formação a partir de arame e palhinhas, tendo realizado paralelamente as respectivas planificações.

Surgiu então o interesse na contagem e relação entre o número de faces, arestas e vértices de várias pirâmides e descoberta de regularidades, tendo sido elaborada pelo grupo uma tabela como a apresentada na Figura 32.

Pirâmide	N.º faces	N.º arestas	N.º vértices
Triangular	4=3+1	6=2x3	4=3+1
Quadrangular	5=4+1	8=2x4	5=4+1
Pentagonal	6=5+1	10=2x5	6=5+1
Hexagonal	7=6+1	12=2x6	7=6+1
…	…	…	…
Polígono da base de n lados	n+1	2xn	n+1

Figura 32. Relações entre o número de faces, arestas e vértices nas várias pirâmides

O mesmo trabalho foi realizado para os prismas. Este trabalho proporcionou uma maior profundidade na abordagem do tópico, permitindo a formulação de conjecturas e a generalização e, consequentemente, o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Avaliação

Avaliação dos formandos. O Programa distinguia como principal elemento de avaliação dos formandos a elaboração de um portefólio reflectindo o desenvolvimento profissional decorrente da formação e que deveria incluir, no mínimo, duas situações de ensino/aprendizagem da matemática com os alunos, apresentando justificação da selecção de duas tarefas, o modo como foram trabalhadas e exploradas, e reflexão sobre a realização das tarefas tendo por base a análise das produções dos alunos e a exploração feita pelo professor, podendo contemplar respostas dadas, dúvidas e dificuldades levantadas pelos alunos, registos feitos, raciocínios realizados, produção matemática dos alunos, surpresas, dilemas ou dificuldades sentidas pelo professor. Devia ainda contemplar uma reflexão acerca do trabalho desenvolvido na sala de aula e nas sessões de formação e uma apreciação global sobre a formação no seu todo.

Para o efeito foi fornecido aos professores, desde o primeiro ano de formação, um guião para a realização do portefólio elaborado pela equipa (Anexo D); foram também divulgados aos formandos os indicadores de qualidade definidos pela Comissão de Acompanhamento.

Da análise dos trabalhos pôde constatar-se que a sua qualidade foi crescendo com os anos de funcionamento do Programa, talvez por os próprios formadores serem progressivamente mais alertados para a sua importância e por ter havido um maior acompanhamento na sua elaboração ao longo do ano. De facto, no primeiro ano em que a investigadora foi formadora, 2006/07, não houve praticamente lugar a *feedback* sobre o trabalho que ia sendo realizado para os portefólios pela simples razão de que os formandos não apresentavam rascunho, deixando muito para o fim a sua realização. No segundo ano já houve um maior acompanhamento da elaboração dos portefólios por parte dos formadores.

No entanto este processo de avaliação foi alvo de reflexão pela equipa de formadores, de que resultou uma apreciação do seguinte teor:

É nossa opinião que a avaliação final dos formandos não deveria basear-se exclusivamente no portefólio.

De facto, verificam-se algumas situações de injustiça por dois motivos fundamentais:

a) Por se encontrarem portefólios demasiado bem feitos que não correspondem à apreciação global do formador sobre o trabalho desenvolvido pelo formando, por este afirmar ter feito um tipo de exploração com um aprofundamento matemático e didáctico que não foi observado, mesmo na descrição de aulas observadas pelo formador;

b) Pelo contrário, por haver formandos que, embora com um excelente desempenho e boas qualidades de professor na área da matemática, tendo desenvolvido um trabalho de exploração sistemática de conceitos e capacidades matemáticas fundamentais, não puderam ou não conseguiram transpor para linguagem escrita esse trabalho, tendo apresentado um portefólio pobre ou demasiado sucinto que não espelha a realidade.

Propôs-se assim que seja acrescentado um item de avaliação, para além dos existentes, cuja formulação traduza o maior ou menor grau de correspondência do conteúdo do portefólio ao trabalho do formando tal como foi observado pelo formador ao longo do ano.

Avaliação do Programa por parte dos formandos e da Comissão de Acompanhamento. Realizou-se, no fim de cada ano lectivo de funcionamento, um inquérito aos professores em formação para auscultar o seu grau de satisfação em relação a alguns aspectos do decurso do Programa. Apresentam-se de seguida os dados em relação aos aspectos questionados:

Em relação ao Programa. No ano lectivo de 2005/06, 92% dos formandos declara-se bastante ou totalmente satisfeito; no ano lectivo de 2006/07 esse número é de 95% e em 2007/08 de 99%. Não há nenhum formando que se declare pouco ou nada satisfeito em qualquer dos três anos.

Em relação ao conhecimento matemático e didáctico proporcionado pelo Programa. No ano lectivo de 2005/06, 96% dos formandos declara-se bastante ou totalmente satisfeito; no ano lectivo de 2006/07 esse número é de 98% e em 2007/08 de 99%. Não há nenhum formando que se declare pouco ou nada satisfeito em qualquer dos três anos.

Em relação aos materiais fornecidos. No ano lectivo de 2005/06 há 84% dos formandos bastante ou totalmente satisfeito. 1% está pouco satisfeito. No ano 2006/07 há 78% dos formandos bastante ou totalmente satisfeito. 4% está pouco satisfeito. Em 2007/08 91% está bastante ou totalmente satisfeito e 9% encontra-se satisfeito.

Em relação às sessões de formação efectuadas. 93% dos formandos encontra-se, em 2005/06, bastante ou totalmente satisfeito; no ano lectivo de 2006/07 esse número é de 92%. Não há nenhum formando que se declare pouco ou nada satisfeito em 2005/06; em 2006/07 1% exprime pouca satisfação. Em 2007/08 a percentagem de formandos bastante ou totalmente satisfeitos é de 99%, declarando-se 1% satisfeito.

Em relação às sessões de acompanhamento em sala de aula efectuadas. 91% dos formandos encontra-se, em 2005/06, bastante ou totalmente satisfeito; no ano lectivo de 2006/07 esse número é de 92%. Não há nenhum formando que se declare pouco ou nada satisfeito em 2005/06; em 2006/07 1% exprime pouca satisfação. Em 2007/08 99% encontra-se bastante ou totalmente satisfeito e apenas 1% exprime satisfação.

Em relação ao envolvimento dos alunos nas tarefas propostas com base no Programa. No ano lectivo de 2005/06, 97% dos formandos declara-se bastante ou totalmente satisfeito; no ano lectivo de 2006/07 esse número é de 98%. Não há nenhum formando que se declare pouco ou nada satisfeito. Em 2007/08 o mesmo número é de 96% declarando-se 4% satisfeitos.

Em relação às sessões de trabalho autónomo. Como estas sessões se destinavam apenas a formandos no seu segundo ano, a recolha de dados só foi feita a partir de 2006/07. Nesse ano, 49% dos formandos declara-se bastante ou totalmente satisfeito, 32% exprime satisfação e 19% declara-se pouco ou nada satisfeito. Em 2007/08 84% declara-se bastante ou totalmente satisfeito e 16% diz-se satisfeito.

Em relação a sugestões de melhoramento no futuro. No ano lectivo de 2005/06, a sugestão que colheu a maior percentagem (35%) foi sem dúvida a de apetrechar as escolas com mais materiais didácticos. Houve também uma percentagem significativa dos formandos (18%) que referiram um aumento do número de sessões de acompanhamento em sala de aula. No ano seguinte 27% dos formandos insiste também no apetrechamento das escolas com material didáctico. O valor mais notório de seguida (10%) refere-se, como no ano anterior, ao aumento do número de sessões de acompanhamento. Outras menções, em 2005/06, vão no sentido da construção de materiais nas sessões de formação, da manutenção do carácter prático e funcional das tarefas realizadas e da manutenção do mesmo formador de modo a dar continuidade aos grupos do ano anterior e, em 2006/07, da organização de sessões por anos de escolaridade e da alteração da estrutura das sessões autónomas. Em 2007/08 há bastantes menções que referem explicitamente "nada a alterar"; É também bastante referido o aumento do número de sessões de acompanhamento, a dispensa da componente não lectiva, o apetrechamento das escolas com material didáctico. Neste ano surge a necessidade da rentabilização da plataforma *moodle* que se manteve ainda em estado inicial por falta de adesão dos formandos.

Pode assim constatar-se que o grau de satisfação dos formandos em relação a diversos aspectos do Programa é, de modo geral e em todos os anos, muito elevado. A excepção diz respeito à dotação das escolas com material didáctico, apesar de ter sido feita com verbas próprias do programa, e a estruturação do trabalho autónomo em 2006/07, que foi revista e modificada no ano seguinte tendo os números sido substancialmente modificados; veio nesse ano a colher uma avaliação muito mais positiva.

Por parte da Comissão de Acompanhamento foram realizadas visitas anuais por alguns dos seus elementos que, além de participarem na reunião semanal de trabalho da equipa, assistiram a uma sessão de formação de um dos formadores. Foram também objecto de análise os planos anuais de formação e os diversos relatórios de actividades elaborados pela coordenadora do Programa.

Avaliação do PFCM a nível nacional. Far-se-á uma breve referência aos resultados de um estudo de avaliação encomendado pelo Ministério da Educação à Universidade de Aveiro incidindo sobre o período de Setembro de 2005 a Setembro de 2007 e que foi tornado público em Janeiro de 2008. Este estudo baseou-se em: (a) Entrevistas aos coordenadores das 18 Instituições de Ensino Superior (IES) envolvidas; (b) Questionário individual on-line aos formadores; (c) Questionário individual aos formandos; (d) Análise dos planos de formação das IES; (e) Análise dos relatórios apresentados pelas IES; (f) Visitas a escolas do 1.º ciclo; e (g) Análise de elementos relativos à concepção, organização e execução do Programa.

Os principais resultados decorrentes de indicadores qualitativos apontam para (a) As vantagens do modelo de formação em contexto de trabalho adoptado; (b) A melhoria da formação matemática e didáctica dos professores formandos; (c) A produção de recursos didácticos, especialmente textos, de apoio à formação e ao ensino da Matemática e a insuficiência do uso de *software* informático; (d) O carácter limitado da interacção entre formandos de uma mesma ou de diferentes escolas e particularmente com a comunidade; e (e) Dificuldades de ordem organizacional tais como falta de tempo, dispersão de escolas, etc.

As recomendações vão no sentido de: (1) Manutenção do modelo de formação envolvendo a supervisão em articulação com as sessões de formação e trabalho autónomo dos formandos; (2) Divulgação de recursos usados na formação e exemplos de boas práticas; (3) Identificação de professores nas escolas dinamizadores do trabalho; (4) Promoção do aprofundamento e consolidação da formação matemática dos professores; (5) Promoção de laços de trabalho entre os professores do 1.º e do 2.º ciclo; (6) Criação nas escolas de todas as condições para que os professores possam participar de forma adequada no PFCM; e (7) Reequacionamento do uso de portefólios como instrumento de avaliação.

A conclusão essencial deste estudo é de que o PFCM atingiu genericamente, neste período, as finalidades que se propunha. O seu impacto na formação dos professores foi positivo, tanto mais que é um programa complexo, de carácter inovador e lançado em condições nem sempre fáceis. A Comissão que presidiu ao estudo faz a recomendação final da continuidade deste programa, introduzindo as melhorias assinaladas, alargando-se a mais professores e assegurando a sua sustentabilidade futura.

Síntese

Este Programa é o contexto em que se desenvolve o presente estudo e todo o trabalho da investigadora. Como ficou em destaque, a planificação e execução da formação seguiu obviamente as linhas gerais ditadas pela Comissão de Acompanhamento do PFCM. No entanto, o facto de a investigadora ser também formadora e elemento da coordenação do Programa permite identificar alguns pontos de influência do trabalho em curso nas linhas de actuação da equipa e, por sua vez, das opções principais da equipa no direccionamento do trabalho de investigação. Com efeito, houve uma interpenetração das duas componentes: o trabalho de investigação em curso já a partir do final do ano lectivo de 2005/06 pôde dar um contributo na fundamentação, planificação e implementação das actividades de formação. As linhas de força do Programa que foram sendo estabelecidas por terem sido identificadas como necessidades de formação foram objecto de estudo na revisão da literatura em ensino e aprendizagem da matemática, designadamente as tarefas e a comunicação na sala de aula, o cálculo mental e a sua integração no sentido do número, e ainda o pensamento algébrico a partir do trabalho com padrões. Puderam neste sentido ser dadas algumas sugestões de funcionamento e de propostas para a sala de aula úteis para a formação. Para o aprofundamento do tema dos padrões e confirmação da sua importância no ensino básico contribuiu ainda o envolvimento da investigadora, juntamente com outros elementos da equipa, no projecto *Matemática e Padrões no ensino básico: perspectivas e experiências curriculares de alunos e professores.* A revisão de literatura sobre formação de professores pôde dar um contributo para a resolução de problemas colocados à equipa de formadores pelo desenvolvimento do Programa, nomeadamente no que se refere à alteração das linhas de actuação sobre o trabalho autónomo dos formandos do segundo ano no início do ano lectivo de 2007/08, em que foi construída e adoptada uma proposta diferente que se revelou mais do agrado dos formandos e mais eficaz em termos de desenvolvimento profissional.

Deste modo, foi a participação da investigadora na coordenação das actividades da formação desde o primeiro ano que, como referido no capítulo anterior, despoletou o interesse e vontade de iniciar este trabalho de investigação. A partir daí, o trabalho como membro da equipa de formação e coordenação foi umas vezes causa e outras consequência do trabalho de investigação. Os papéis de formadora e de investigadora estiveram sempre muito ligados e assim a investigação efectuou-se sempre no contexto das questões suscitadas pela prática e por seu lado a prática foi influenciada pelo estudo exigido pela investigação.

Capítulo 7

ANA

Este capítulo é dedicado à professora que neste estudo assumiu o nome de Ana. Começa por se fazer uma breve apresentação da pessoa no seu percurso pessoal e profissional, evoluindo para a caracterização da sua relação com a matemática enquanto estudante e para o seu retrato profissional prévio ao programa de formação. Analisa-se de seguida o seu percurso durante a frequência do programa, nas suas várias vertentes, as suas impressões pessoais ao longo do tempo, bem como os reflexos deste programa no seu conhecimento matemático e didáctico, na sua prática de sala de aula e nas aprendizagens dos seus alunos.

Apresentação

Ana tem pouco menos de cinquenta anos, é morena, de estatura média, um porte agradável e uma aparência cuidada. É uma pessoa educada, calma e ponderada mas com um sentido de humor fino que a torna bem disposta e divertida. É casada e tem um filho que frequenta um curso universitário noutra cidade. Pertence ao quadro de escola, é professora titular e desempenha as funções de coordenadora da escola onde está colocada. Tem 24 anos de serviço.

Percurso académico e profissional

Ana completou o 11.º ano num tempo em que este ainda era terminal e ainda começou a frequentar o 12.º ano, mas não o terminou, já que o seu objectivo não era seguir estudos universitários. No seu relato afirma que sempre quis ser professora do 1.º ciclo:

> Sempre disse que gostava de ser professora do 1.º ciclo. Eu sempre... Não sei se... não sei bem porque os meus irmãos até têm todos cursos superiores. Queriam muito que eu tirasse um curso superior, inclusive os meus pais. Mas eu queria sempre... eu sempre quis ser professora do 1.º ciclo. (E1, 23/11/2006)

Procura explicar esta sua preferência na profissão que escolheu pelo seu gosto por crianças e pela influência que nela exerceram as professoras primárias que teve, de quem gostou muito. Continua a gostar daquilo que faz, embora reconheça nestes últimos tempos uma certa desmotivação. No entanto, afirma que se fosse hoje ainda mantinha esta sua escolha:

> Eu acho que mantinha, apesar de tudo. Apesar da imagem que estão a querer dar dos professores. Eu acho que ainda mantinha pelos alunos. Pelo resto não sei se mantinha. Mas pela relação que se consegue ter enquanto professor com [os alunos]. Eu acho que mantinha. (E1, 23/11/2006)

Nessa altura não era necessário ter o 12.º ano para se candidatar ao curso do Magistério Primário. Deste modo, tirou o referido curso na cidade onde nasceu e vive. Depois da frequência de três anos do curso do Magistério foi colocada em Novembro de 1984 num lugar remoto do Alto Minho onde não havia alojamento decente nem condições de higiene.

> A minha primeira aula eu não apresentei. Eu não consegui, porque realmente aquilo era muito longe, muito... era um desterro e estava lá um professor regente... no primeiro dia que fui, no dia seguinte que me fui apresentar é assim... eu se falasse, chorava [Rindo]. E então ele falou por mim [Continuando a rir]... Foi complicado. (E1, 23/11/2006)

Depois foi sendo colocada noutras escolas, também de meio rural e com difíceis acessos, tendo tido assim um início de vida profissional difícil. Contudo, afirma que foram estas experiências que mais a marcaram:

> Mas foram as escolas mais rurais, as escolas mais... foram as que me marcaram mais. Porque os miúdos têm outro tipo de necessidades de afecto, de... diferente. E a ligação professor-aluno é muito... muito sentida. (E1, 23/11/2006)

A escola do primeiro ciclo onde actualmente lecciona é de plano centenário e tem características rurais pois está situada numa aldeia da periferia da cidade. No entanto a população estudantil que a frequenta é bastante heterogénea em termos socioeconómicos e culturais pois engloba os habitantes tradicionais da aldeia e outros, por vezes de profissões liberais, que entretanto aí estabeleceram a sua residência embora trabalhem na cidade. Na escola há quatro turmas e estão colocados seis professores, entre titulares de turma e de apoio socioeducativo. Ana sente-se bem na escola, onde considera que há um bom ambiente de trabalho entre colegas.

Relação com a matemática enquanto estudante

Ana nunca teve um gosto especial pela matemática. De facto, embora tenha tido sucesso no 11.º ano, nunca foi uma disciplina que a seduzisse, sendo a sua disciplina preferida a língua portuguesa. Nunca viu na matemática escolar qualquer utilidade para o dia-a-dia, justificando o facto pela maneira como esta disciplina era dada, embora sem querer culpar os professores, pois admite que até teve professores bons. Considera que era o sistema de ensino que não ajudava, os alunos eram passivos, tinham apenas que aprender e repetir procedimentos:

> E acho que na altura nós éramos assim, como é que hei-de dizer, não... não era... a nossa atitude não era muito activa, era mais passiva, era mais... o professor explicava, fazíamos os exerciciozinhos até parecia tudo tipo... e depois ele corrigia. Portanto, nós tínhamos uma atitude um pouco passiva, penso eu. Não havia envolvimento. Não... não... Acho que não sentíamos muito aquilo que estávamos a fazer. Era mais, talvez, mecanizar porque, às vezes, até éramos capazes de saber fazer um determinado exercício e noutro contexto já tínhamos talvez dificuldades. Eu penso que é porque não estávamos a sentir mesmo... é isso. E talvez isso não me tivesse dito muito. Não sei. (E1, 23/11/2006)

Depois de assumir esta verdade, continua afirmando que estudava porque tinha de ser, e estudava pela noite fora a fazer exercícios, contrariamente às outras disciplinas que só conseguia estudar de dia. Considera que hoje em dia a situação do ensino da matemática no secundário é diferente, apontando o exemplo do filho que tem um gosto pela matemática que era impensável para ela, já que considera a matemática bela e usa-a até como passatempo!

Formação matemática na formação inicial e complementar

No que diz respeito à formação inicial como professora, Ana afirma:

> E no Magistério também não houve nada... Eu não aprendi portanto, como é que hei-de dizer, no Magistério eu não aprendi nada para poder ensinar diferente daquilo que me foi dado enquanto andei no liceu. (E1, 23/11/2006)

Refere que no Magistério havia mais a preocupação de avaliar do que de criar situações que pudessem ajudar na vida futura. Lembra o papel das orientadoras de estágio, que ajudavam no que era preciso – não só na matemática mas também nas outras áreas - e avaliavam os alunos, mas defende que o trabalho de planificação era feito pelos alunos por pesquisa dos manuais. E de seguida faz com naturalidade a seguinte afirmação:

> Não me lembro no Magistério de ter formação em Matemática que me pudesse ser útil enquanto professora. Eu não tive Matemática no Magistério! (E1, 23/11/2006)

A investigadora estranhou e questionou a afirmação, pois no tempo em que a professora frequentou a Escola do Magistério já havia formação ligada à matemática, mas Ana afirmava com toda a sinceridade que não se lembrava absolutamente de aulas de matemática. Mais tarde, em conversa com colegas, chegou à conclusão que realmente tinha tido matemática, mas este episódio é significativo do impacto nulo da formação matemática na sua formação inicial como professora do 1.º ciclo. A professora reconhece que a formação matemática que teve foi até ao 11.º ano, mas esta "era uma matemática que não tem nada a ver com o que o professor precisa no 1.º ciclo". Falou ainda de uma disciplina de Didáctica, mas didáctica geral, não ligada à matemática. Assim, concluiu que a sua formação não foi a suficiente para ser professora do 1.º ciclo de matemática e que teve que estudar e aprender muito por si.

Ana frequentou um curso de complemento de formação em Expressões na Escola Superior de Educação da cidade onde vive cujo plano curricular contemplava uma disciplina de matemática. Esta disciplina pretendia integrar, numa perspectiva teórico-prática, aspectos de conhecimento matemático e didáctico ligados ao ensino da matemática no primeiro ciclo. Ana reconhece que esta disciplina lhe deu uma outra visão: "Depois de fazer o complemento de formação eu tenho uma imagem diferente da matemática". (E1, 23/11/2006)

E ainda:

> Penso que com o complemento eu vi que realmente o papel do professor não é o de estar ali a explicar tudo direitinho para no fim o aluno repetir tudo direitinho. Portanto, eu não estou a desvalorizar o papel do professor, não é? Mas acho que o papel do professor até é mais complicado agora [Rindo]. Eu acho que é. (E1, 23/11/2006)

De facto, Ana assume a importância que para ela teve a frequência desta disciplina de matemática no complemento de formação sobretudo por a ter alertado para algumas perspectivas significativamente diferentes sobre o ensino da matemática nos últimos anos e de que não tinha plena consciência anteriormente. "O meu despertar para a matemática foi a ESE" (E4, 03/12/2007). Nunca frequentou previamente outra acção de formação contínua em matemática.

Retrato profissional prévio

Nesta secção procura caracterizar-se a postura profissional de Ana antes de ingressar no Programa de formação. Uma vez que o início da recolha de dados coincide com o início da frequência da formação, a descrição que aqui se faz baseia-se mais nas entrevistas do que na observação directa.

Perspectivas sobre o ensino e a aprendizagem da matemática

Ana reconhece que a sua visão da matemática ao iniciar a profissão era a de uma ciência muito abstracta, sem relações com o dia-a-dia, muito repetitiva, que não tinha em conta os conhecimentos informais dos alunos antes de virem para a escola. Era uma ciência já feita, perfeita, que os alunos tinham de assimilar. Hoje, e essencialmente por influência do curso de complemento de formação, já tem outra visão. Considera a matemática uma disciplina mais estimulante e faz um esforço no sentido de se adaptar. No entanto, acha que ainda não consegue completamente:

> Eu faço um esforço. Tenho noção de que ainda... E, às vezes, tenho a preocupação de que até esteja a prejudicar a Matemática em benefício doutra... da Língua Portuguesa. (E1, 23/11/2006)

Quanto às finalidades do ensino e da aprendizagem da matemática, Ana refere o seu valor prático de aplicação quotidiana, reconhecendo que está presente nas mais variadas situações:

> Acho que é uma disciplina indispensável como as outras. Mas acho que a matemática está implícita no nosso dia-a-dia quase em tudo. Mesmo às vezes não... não parece que está, mas acho que está implícita no nosso dia-a-dia. Sei lá! Nas tarefas mais elementares, na... desde fazer uma compra, desde... Sei lá! Coisas que não nos passa pela cabeça que estamos a fazer matemática ou que está ali a matemática, mas que está. (E2, 07/03/2007)

Valoriza ainda o seu aspecto formativo:

> Depois a nível de desenvolvimento do raciocínio, do exercício intelectual. [...] Que antes era muito mais virada para a memorização do que para o desenvolvimento dessas competências e que agora acho que a matemática está a ser vista doutra forma. (E2, 07/03/2007)

Continuando para a análise do seu papel enquanto professora, revela saber e acreditar que o papel do professor deve ser outro, mas ainda não se sente muito à-vontade nesse papel pois tinha muito enraizado o papel tradicional. Este conhecimento é um pouco como que teórico, cerebral, sem grandes reflexos na prática:

> É mais... eu acho que [o papel do professor] é mais no sentido de... de propor, de organizar, de orientar, de coordenar. Porque é... e aí já torna o aluno muito mais activo, porque se ele se envolver, sente. Agora que não é fácil para mim, não é. Ainda não estou completamente à-vontade a fazer isto na sala de aula. Tenho feito um esforço. [...] Eu tenho consciência que ainda não estou a aplicar isto enquanto professora a cem por cento. Não. Tenho limitações porque estava muito enraizado o outro procedimento. Outro tipo de professor. (E1, 23/11/2006)

Começa a valorizar também outra dinâmica de sala de aula em que os alunos trabalham em grupos e interagem entre si e com o professor. Porém reconhece algumas dificuldades e assume que de modo geral o tipo de trabalho mais utilizado é o individual:

> Os grupos, os trabalhos em grupos... No meu tempo não, praticamente, não existia, não é? [...] Ainda ontem, por exemplo, eu fiz um trabalho que foi em grupo. É mais difícil controlar o barulho. Mas eles gostam de trabalhar em grupo. [...] E também acaba por ajudar, porque aqueles que têm mais dificuldades também se sentem apoiados. E acho que essa inter-relação entre os alunos e entre alunos e professores é muito importante... (E1, 23/11/2006)

> O [trabalho na aula] que eu mais faço é individual. Isso não há dúvida. (E2, 07/03/2007)

Quanto aos recursos usados na sala de aula, Ana dá conta de que por vezes constrói fichas de trabalho com "montagens" de exercícios de vários manuais que vai pesquisando. Utiliza bastante o manual, normalmente na aula, e essencialmente por causa dos pais, pois estes criticam a sua não utilização. Apesar disso, utiliza também o quadro e fichas:

> Por exemplo, estou a dar uma determinada matéria e se até nem vou ao mesmo tempo no livro, não quer dizer que não a tenha dado, não é? Posso ter trabalhado no quadro ou nas fichas ou outro tipo de... Os pais: «Ai, mas ainda não fez no livro». [...] Também me apoio no livro, mas apoio-me muito mais noutro tipo de... no quadro... Gosto do quadro para trabalhar com eles e também as fichinhas, também utilizo. (E1, 23/11/2006)

Costuma também marcar sempre um pequeno trabalho para casa, pois acha que é útil para a sistematização daquilo que se fez durante o dia.

Quanto aos materiais manipuláveis, a escola onde está agora tem bastante variedade que às vezes utiliza, embora sem grande segurança. Às vezes também cria o seu próprio material.

Entre os factores que podem condicionar o sucesso em matemática elege o factor cultural:

> Também, se calhar, eu acho que se cria uma cultura de que a matemática era o bichinho mau, não é? Porque... E os alunos acho que se realmente tiverem uma negativa a matemática não é tão mau como ter uma negativa a outra disciplina. (E1, 23/11/2006)

Dificuldades/Necessidades de formação

Ana considera que tem várias necessidades de formação atendendo a que a sua formação inicial não a preparou para os novos desafios do ensino da matemática, como foi visível pelas intervenções anteriores, o que conduz ao risco de ensinar como aprendeu:

> Mas faço um esforço por dar matemática de forma diferente do que aquilo que eu aprendi. E às vezes até apelando à criatividade. Mas penso que a formação ... penso que esta formação nos faz muita falta. (E1, 23/11/2006)

Valoriza por exemplo o uso de materiais manipuláveis como modo de promover a motivação e a compreensão dos alunos, mas assume dificuldades na sua exploração:

> Mesmo, por exemplo, a nível dos materiais, a manipulação de... Eu nunca tinha tido assim contacto com uma diversidade tão grande de materiais. Tenho dificuldade em explorar alguns dos materiais, tirar maior partido deles. Posso tirar algum... mas não os conhecendo e não... nunca tive essa oportunidade. (E1, 23/11/2006)

Esta professora apresenta-se assim muito empenhada numa busca de desenvolvimento profissional que lhe permita superar algumas deficiências na formação como professora de matemática que reconhece com humildade possuir.

Ana considera que é necessário dar aos alunos uma visão da matemática como uma disciplina mais aliciante e mais ancorada nos seus interesses e vivências, na vida real, de modo consistente com aquilo que aprendeu no complemento de formação. E espera esse papel desta formação:

> Foi também por isso... para ver se conseguia dar uma imagem diferente da matemática aos alunos que eu também entrei nesta formação. Porque tive já uma pontinha no complemento e que me deixou assim com vontade de realmente continuar. (E1, 23/11/2006)

Refere também a sua vontade de inverter o actual estado de coisas na aprendizagem da matemática e levar os alunos a desenvolver mais competências nesta área:

> Também estou aqui na formação para isso, porque acredito [que posso desenvolver competências matemáticas nos meus alunos]. Portanto, também [...] se não acreditasse nisso não tinha lógica eu estar nesta formação. Acredito que é possível fazer diferente e chegar a resultados diferentes. E eles gostam deste tipo de matemática. Eu acho que eles estão muito abertos, muito mais abertos do que os próprios professores [Rindo]. (E1, 23/11/2006)

Defendeu assim a ideia de que o professor é importante no processo de aprendizagem dos alunos, uma vez que esta é fortemente influenciada pelo tipo de experiências que o professor pode proporcionar na sala de aula.

O percurso profissional ao longo do Programa

Pretende-se aqui descrever o percurso de Ana durante a frequência do programa de formação. Por uma questão de organização, apresentam-se inicialmente e em separado as vertentes do programa que proporcionam uma descrição mais concreta e extensiva, e cujos dados foram recolhidos por observação directa e/ou registo vídeo, como sejam, as sessões de formação, a prática de sala de aula, incluindo particularmente a produção matemática dos alunos, e o trabalho autónomo. Outros aspectos mais gerais de impressões e atitudes da professora, cujos dados foram recolhidos essencialmente através de entrevista, e que estão ligados às vertentes do programa de acompanhamento em sala de aula, particularmente na relação com a formadora, de reflexão e de partilha de experiências, são apresentados logo de seguida na parte final da secção e integram por vezes vários aspectos em simultâneo, já que nas entrevistas a professora faz a sua gestão conjunta.

As sessões de formação

Ana manteve desde o início até ao fim do programa, ao longo dos dois anos de formação, uma postura de grande interesse e empenhamento, sendo assídua nas sessões conjuntas de formação que decorriam quinzenalmente. Vinha normalmente na companhia de outros colegas da mesma escola, com quem privilegiava o trabalho de grupo sobre as questões que eram trabalhadas e exploradas na sessão. Mostrou-se sempre à-vontade e descontraída. Quando assim o entendia intervinha activamente, embora de uma forma discreta, como é do seu temperamento.

Considera que as sessões eram úteis para o aprofundamento de ideias e conceitos matemáticos por vezes teóricos mas muito virados para as suas necessidades, o que exprime do seguinte modo: "Eu acho que [a sessão de formação], apesar de ser teórica, é muito prática também". (E2, 07/03/2007)

Valoriza essencialmente nas sessões a exploração de materiais manipuláveis, as sugestões para a sua utilização e as tarefas que lhes estão associadas que foram realizadas nas sessões com o propósito de serem depois utilizadas com os alunos com eventuais adaptações por parte dos professores. Reconhece que não conhecia a maioria das tarefas ou, se conhecia, não as utilizava, pois nunca tinha tido oportunidade de as explorar em conjunto com outros professores e perceber o seu valor didáctico:

> Eu gostei imenso das sessões de formação, porque... mais a nível de exploração do material, e das sugestões e [...] das tarefas. [...]. Era novidade. Muitas delas eram novidade. Embora a gente conhecesse o material e conhecesse a tarefa, mas depois o estar ali, experimentar, fazer, explicar era diferente. (E3, 10/07/2007)

Aprecia também pequenas "dicas" concretas que, mesmo parecendo banais, têm para ela muita importância, até porque podem sugerir-lhe ideias para outras situações de sala de aula, e que a equipa de formadores, na sua planificação das sessões, tinha o cuidado de contemplar, por vezes recorrendo a materiais não estruturados, de uso corrente:

> Não é aquela matemática em que se fala que é importante e tal para os miúdos e se dá aquela imagem da matemática toda, mas sem concretizar. E portanto [a formadora} tem sempre o cuidado de levar situações que nós possamos pôr na sala de aula. Ainda no outro dia aquele clip e aquela cordinha, nunca me passou pela cabeça que realmente pudesse fazer-se isso. [...]. Mas são situações assim tão... que às vezes parecem irrisórias, mas que são importantes [...]. Acho que pode dar uma sugestão e dali partir para outras e... e a concretização sempre presente, porque dá essa... tenta, pelo menos é aquilo que eu recebo, que realmente deve-se concretizar ao máximo, não é? (E2, 07/03/2007)

Verificou-se que fez a ponte para a sala de aula dos tópicos trabalhados nas sessões de formação. Em todas as aulas observadas foram trabalhadas tarefas sugeridas na formação, e mesmo noutras aulas não observadas a professora afirma que as utilizou, referindo sempre os materiais de apoio à tarefa como fundamentais:

> Porque, por exemplo, eu trabalhei imensas coisas, que não trabalhava, fora [das aulas assistidas]. Lembro-me dos miras. Com os dominós trabalhei imenso. Com as simetrias com os espelhos. Sei lá! Uma série de coisas que não foram nas aulas que esteve. (E3, 10/07/2007)

Como fonte de recursos realça a importância da brochura elaborada pela equipa de formadores, que lhe tem sido muito útil para esclarecimento e sugestões.

A prática de sala de aula

Ambiente. Ana tem uma turma com 23 alunos que iniciam o 1.º ano em 2006/07 e que depois progridem para o 2.º ano, sendo nesta altura integrada mais uma aluna pelo que passam a ser 24. É constituída por 15 rapazes e 8 (9) raparigas. Trabalham durante os dois anos numa sala duma escola antiga (edifício de 1928) mas bem decorada e com vistas amplas.

As mesas duplas estão dispostas em U e há no centro uma mesa onde trabalha um grupinho de alunos que precisam de maior apoio. É uma turma muito viva e inicialmente barulhenta. Notou-se contudo uma grande evolução no comportamento dos alunos ao longo do tempo. Aos poucos foram interiorizando as regras de funcionamento da sala de aula e a partir do fim do 1.º ano continuam vivos e interventivos mas mais calmos e responsáveis, com regras de conduta interiorizadas, sabendo ouvir, respeitar os outros e aguardar a sua vez. Quando isto não acontece fazem heterocrítica.

Nota-se em Ana uma tendência para a Língua Portuguesa, como ela própria afirma, mas esta preferência acaba por ser uma mais-valia para o trabalho com a matemática: constrói normalmente histórias ou aproveita textos para contextualizar as tarefas, o que se torna mais motivador para os alunos, e faz com muita flexibilidade a sua exploração, o que lhe permite cumprir a função de interdisciplinaridade dum modo natural. As aulas têm assim uma boa motivação inicial, conseguindo prender a atenção dos alunos, que estão de modo geral muito interessados e entusiasmados com as surpresas que vão surgindo e envolvem-se no trabalho de forma empenhada.

As tarefas e os recursos. Nas aulas observadas Ana escolheu tarefas perfeitamente adequadas ao nível dos alunos. De modo geral baseava-se em tarefas sugeridas nas sessões conjuntas de formação, que depois adaptava e a que dava um cunho pessoal. A sua natureza era diversificada, com predomínio das tarefas de cariz exploratório. O uso de materiais manipuláveis, quer comerciais quer construídos, era muito frequente garantindo assim uma primeira etapa de concretização de modo a que os alunos compreendessem o alcance e objectivos da tarefa. Normalmente era entregue uma ficha de trabalho e registo com indicações para os alunos sobre a sequência de trabalho a seguir e questões orientadoras. Houve várias oportunidades de resolução de problemas, alguns deles de carácter mais aberto e investigativo, em que eram possíveis várias abordagens e pontos de chegada diversos. As rotinas de cálculo foram exploradas nas aulas observadas no contexto de tarefas a realizar e não duma forma isolada.

Das tarefas referidas neste trabalho, as que foram apresentadas por Ana em suporte de papel constam do Anexo E.

Durante o primeiro ano, (1) Começou por uma exploração dos blocos lógicos e seus atributos. Utilizando os blocos lógicos e tabelas em cartolina coladas no quadro para afixar peças com *post-it* explorou de forma lúdica os vários atributos dos blocos lógicos – forma, tamanho, cor e espessura; (2) Trabalhou com os dominós uma primeira abordagem aos números. Cada aluno tinha o seu próprio jogo que a professora no início do ano pediu aos pais para comprarem e que fica na escola. No entanto, foi entregue um dominó a cada par com a recomendação de trabalharem os dois. Separar as pecinhas que têm uma pinta dum lado. Pô-las por ordem, pondo para cima o lado de uma pinta e ordenando-as por baixo. Completar um jogo de dominó com as peças convenientes. Identificar em cada peça as pintas com o numeral respectivo e calcular a soma. Indicar as pintas que faltam de um dos lados duma peça para perfazer um total indicado. Procurar duas, três e quatro peças que totalizem 10 (nos caracóis). Construir quadrados de soma 3, 4, 5 , ...; (3) Na 1.ª parte resolveram um problema aberto – os guardanapos, de descoberta de padrões. Ficha de trabalho elaborada pela professora. Guardanapos de papel. Corda. Molas. Na 2.ª parte: Formulação de problemas. Comunicação matemática. Apresentou uma expressão (do tipo 11 – 5 + 1 = 7) a cada um, todas diferentes, e cada aluno tinha de inventar uma situação problemática que pudesse ser ilustrada por aquela expressão e apresentá-la à turma; (4) Na última aula iniciou com uma tarefa de memória visual. Imagem de uma casa que os alunos têm de reproduzir de memória depois de a fixarem por um minuto. Exploração dos elementos geométricos da figura. De seguida fizeram a construção do tangram por dobragens e recorte partindo de uma folha rectangular.

No segundo ano dedicou-se mais, como lhe tinha sido pedido, às bases do pensamento algébrico, passando pelo desenvolvimento do sentido do número: (5) Retomou os dominós mas agora para trabalhar padrões. A professora desenhou no quadro uma sequência de dominós 3-4,3-5,3-6,3-0,3-1, e pediu as seguintes. Cada um procura no seu jogo as peças para completar a sequência. Depois pôs 2-3,3-4,4-5 e pediu as seguintes. Por fim os alunos construíram novos padrões; (6) Cinco problemas de palavras, uns de adição e outros relacionados com interpretações diferentes da subtracção (retirar e comparar) seguidos de uma última tarefa que pretendia que inventassem uma situação problemática para uma dada expressão numérica com adição e subtracção por recurso à recta numérica. Apoiou-se também na tabela dos cem. O trabalho feito foi essencialmente individual. A professora recorreu a esta forma de organização em grande parte porque estava doente e com falta de voz; (7) A recta numérica marcada no chão serviu de apoio e recurso para todo o trabalho desenvolvido de exploração de padrões e de resolução de situações problemáticas com forte recurso ao cálculo mental. Havia dois dados gigantes, um para estabelecer o número de partida e outro para marcar o salto. Depois de os dados serem lançados, os alunos, à vez, diziam quais os números percorridos e deslocavam-se para a recta marcando com o pé o seu número. Na segunda parte passou-se a um problema que envolvia 29 rapazes e 42 raparigas perguntando quantas crianças eram no total. Adivinhar a expressão numérica correspondente a determinados saltos na recta; (8) Contagens visuais para desenvolvimento do sentido do número e procura de padrões. Utilizou uma série de imagens, obtidas na sessão de formação, ampliadas em A3 que foram sendo sucessivamente afixadas no quadro. Os alunos procuravam modos de contagem baseados em regularidades das figuras e deslocavam-se ao quadro, à vez, para explicar o seu pensamento; e (9) Fez uma iniciação ao raciocínio funcional com a descoberta de relações numéricas entre objectos e imagens em conjuntos de três para três. A tarefa “Descobre o meu segredo”, sugerida na formação, foi trabalhada pela professora de forma criativa, pondo o seu segredo no quadro para descobrirem mas que ninguém podia revelar. À medida que os alunos iam descobrindo podiam dizer ao ouvido da professora. Só depois a professora indicava quais os meninos autorizados a revelar o segredo. Começou por 5→8, 9→12, 12→15 e continuou com outros, evoluindo progressivamente no grau de complexidade. Por fim pediu aos alunos que, numa folha própria, inventassem eles “segredos” para colocarem aos colegas.

Papel da professora. Enquadra sempre a tarefa com uma história ou a leitura de um texto relacionado. Distribui o material. Dá orientações aos alunos. Lê o enunciado quando é caso disso e coloca questões para facilitar a compreensão, já que se trata de alunos muito novinhos. Dá indicações no início da tarefa mas deixa liberdade aos alunos para descobrirem e progredirem por si no trabalho. Neste particular também se observa evolução no sentido da autonomia dos alunos. Ana denota uma preocupação crescente de que os alunos façam as suas próprias descobertas e exprimam os seus pontos de vista. Do relatório da primeira aula filmada:

> Procura que os alunos cheguem às conclusões mas eles acabam por falar um pouco caoticamente e não são todos abrangidos pelo desenvolvimento de competências de comunicação mas só os que se adiantam a falar; respondem também por vezes em coro. As regras ainda não estão muito bem interiorizadas. (Rel1-1, 27/02/2007)

Mas, da 2.ª aula do segundo ano, pode ler-se:

> Neste aspecto da comunicação os alunos estão muito mais desenvoltos. "Eu fiz de outra maneira!" e a explicação, a facilidade de expressão progressiva, é notória. A professora impõe regras de intervenção, de respeito pelo outro, que deve traduzir-se em ouvi-lo e acompanhar o seu raciocínio. (Rel2-2, 22/01/2008)

E da 4.ª aula:

> A professora usa um tom de voz muito adequado, calma e amável mas firme quanto a questões de disciplina. Vai fazendo no quadro, ao lado da figura, os registos do que os alunos vão dizendo oralmente. Foi uma aula muito participada. Quase todos os alunos tiveram oportunidade para dizerem como pensaram, mas na sua vez, sem atropelos. Nota-se uma evolução enorme neste aspecto. (Rel4-2, 01/04/2008)

Também há outra atitude na professora que sofre uma grande evolução. No primeiro ano considerava, mais ou menos tacitamente, que os alunos são muito pequeninos e incapazes de trabalhar a matemática a sério, além de não se aventurar para números altos. Se só ia no 11 não falava no 12 e, além disso, tinha a noção de que só devem ser trabalhados no 1.º ano os números até 20. Esta questão foi objecto de reflexão com a formadora e a professora foi-se tornando mais "afoita" a abordar outros números no 2.º ano, apresentando questões de nível de complexidade elevado.

Ana vai ganhando com o passar do tempo um à-vontade e uma flexibilidade na abordagem das questões, relacionando vários tópicos, que não possuía no início. Por exemplo, a tarefa dos dados em que um deles dá o número de partida e o outro dá a amplitude do salto não é muito confortável para o professor porque este não sabe o que vai sair e tem de estar preparado para tudo. Outro exemplo surge no seguinte diálogo, em que os alunos procuram formas de contagem dos bagos numa imagem. A professora aproveita uma situação inesperada para associar ao algarismo das unidades dos múltiplos de 5:

> Aluno 1: Estes 3 mais estes 3 mais estes 3 mais estes 3 mais estes 3 [Apontando ao mesmo tempo que fala para cada um dos cachos verdes com 3 bagos].
> Prof. E isso o que é?
> Aluno 3: 3 vezes 5 igual a 15.
> Prof. Então tinhas que fazer o quê? Já tínhamos 5 vezes 7…
> Aluno 3: Vezes 3.
> Prof. E tínhamos 5 vezes 3 [Registando no quadro]. Este quanto é que dava, 5 vezes 7?
> Aluno 3: 35.
> Aluno 4: 36.
> Prof. Hein?
> Aluno 4: 35.
> Prof. Podia ser 36?
> A[vários] Não.
> Prof. Porquê? Por que é que não podia ser 36?
> Aluno 5: Porque o número é par.
> Prof. Não, não, não.
> Aluno 4: É ímpar.
> Prof. Pensem. 5 vezes 7 alguma vez podia dar 36?
> A[vários] Não.
> Prof. Porquê?
> Aluno 6: Por causa que é 5 vezes 7, 35.
> Aluno 4: Porque é sempre 0 e 5.
> Prof. Diz.
> Aluno 3: Do 0 e do 5.
> Prof. Porque estamos na tabuada do 5 e é sempre… a terminação ou é em 0 ou é em 5. Nunca podia ser em 6, Aluno 4. (A4-2, 31/03/2008)

Nesta aula das contagens visuais, particularmente, houve muita animação e participação. A professora fez a primeira tarefa em conjunto com toda a turma mas para as restantes deu um tempo para pensarem e cada um registar no seu papel onde tinha também um desenho em ponto pequeno e, ao lado, espaço para as expressões numéricas correspondentes. À medida que surgem as hipóteses, Ana vai registando no quadro as expressões que os alunos dizem, pede a explicação e justificação e de seguida suscita o seu cálculo invocando técnicas de associação de parcelas iguais ou de "amigos do dez", números que adicionados dão 10. Por vezes são os alunos que fazem o registo. Questiona muito os alunos sobre as formas que eles arranjam e remete para a turma as questões que surgem a propósito de uma hipótese. Ana comentou na reflexão que optou por ser ela a fazer no quadro a maior parte dos registos porque, como os alunos ainda escrevem muito lentamente, ia perder muito tempo e a aula tornava-se mais monótona e menos rica de possibilidades de exploração, e afinal os alunos já tinham os seus próprios registos na sua folha.

Papel dos alunos. Os alunos mostram-se em todas as aulas muito interessados e motivados para o trabalho e para as surpresas que lhes estão reservadas. Na revisão dos relatórios de aula encontram-se a este propósito os termos "colaborantes", "participativos", "expectantes". E as frases: "participaram activamente", "muito sossegados a trabalhar individualmente", "trabalharam bastante autonomamente", "Estiveram a realizar as tarefas em pares com bastante autonomia", "Trabalharam com afinco e interesse", "Estavam muito sossegados e trabalharam depois do toque aí um quarto de hora".

Como ilustração cita-se a tarefa das contagens visuais em que por vezes os alunos arranjam expressões que não surgem da contagem mas de modos de dar o resultado. Por exemplo 3x8-1 a propósito da imagem dos caracóis, apresentada na Figura 33.

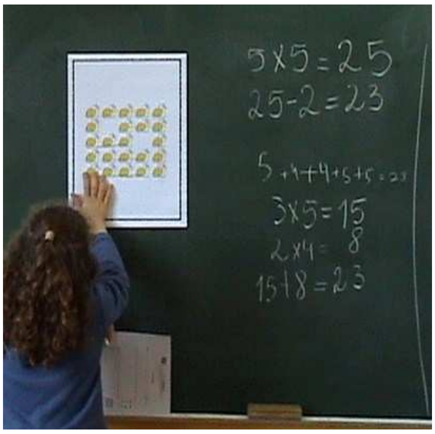


Figura 33. Contagem dos caracóis

A professora procura perceber em conjunto donde vem a expressão e se envolve algum raciocínio e depois diz que não devem inventar maneiras de chegar ao 23 mas que as contas devem ser consequência do olhar, mas eles, no afã de apresentar mais maneiras, não resistem à tentação... Esta questão foi comentada na reflexão e Ana adianta que isso acontece pois têm feito muitas decomposições. Mas sobressaía sobretudo a vontade de participar.

Do relatório:

> Por exemplo, nos peixinhos: "eu sei outra, 25+0" Nesta aula os alunos mostram-se muito interventivos. Expressam o seu modo de pensar no quadro perante a turma. Procuram vários modos de contar. Fazem os registos. De modo geral revelam bastante autonomia para 2.° ano. (Rel4-2, 31/03/2008)

A participação é feita de forma ordeira, havendo respeito por quem está no uso da palavra que faz com que os colegas se mantenham em escuta atenta.

Produção matemática dos alunos. Ao longo destes dois anos verificou-se que foram focados e abordados muitos tópicos matemáticos do programa. Esta análise não pretende apresentá-los exaustivamente nem tal seria possível. Procurar-se-á apresentar alguns episódios com o objectivo de ilustrar o desenvolvimento de capacidades transversais constantes nesse mesmo programa ligadas sobretudo ao desenvolvimento do sentido do número e à emergência do pensamento algébrico, pois foi esse o tópico privilegiado na segunda parte deste estudo, e que se mostraram mais relevantes através da observação de aulas, ficando simultaneamente em destaque, através dos diálogos transcritos, o conhecimento matemático e didáctico evidenciado pela professora na gestão do desenrolar da actividade na aula.

O pensamento algébrico era uma tema novo para Ana, pelo menos a designação, e a professora adianta que podia até abordar alguns aspectos sem se aperceber de que estava a trabalhar neste campo, mas o facto de o professor estar consciente de que o trabalho está a servir um dado propósito faz valorizar esse tópico:

> O pensamento algébrico. Uma pessoa pode trabalhar, não é? Mas sem ter a noção de que aquilo poderia desenvolver o pensamento algébrico. Não tinha essa noção quando fazia as actividades. [Com as sessões de formação] ficamos com essa ideia. (E6, 11/07/2008)

E, de seguida, referindo-se ao trabalho dos alunos ligado ao pensamento algébrico:

> Eles fazem... Muito. E sistematizaram. Eles interiorizaram. A nível de padrões, a nível de sequências, a nível de... Portanto, foram trabalhadas actividades que eu via assim os resultados que nos outros anos não via desta forma. Não via. É uma organização diferente do trabalho do professor também. Exige uma outra direcção. (E6, 11/07/2008)

Contagens visuais. Na aula das contagens visuais os alunos habituaram-se a olhar para as figuras e descobrir um padrão na disposição de um conjunto de objectos que facilite a contagem. E a olharem de várias maneiras diferentes para poderem decidir qual a melhor, ou seja, a que possibilita uma contagem mais rápida. E a descobrirem soluções mais elegantes, bonitas e naturais que outras. Foi uma excelente oportunidade para escreverem várias representações numéricas para a contagem dos elementos das figuras e para de seguida verificarem a sua equivalência através do cálculo. Ana insistiu muito, e oportunamente, sobretudo na transformação em multiplicação da soma de parcelas iguais o que veio mesmo no momento já que está a trabalhar a multiplicação. Tiveram inúmeras situações - 5+5+5+5+5, 4+4, 7+7+7+7, etc. - para transformar. Foi também um momento de comunicação matemática: partilha de raciocínios, necessidade de se exprimirem de modo inteligível e ao mesmo tempo de ouvirem os outros, o que de resto já fazem bastante bem. Apresentam-se alguns exemplos de expressões que os alunos descobriram associadas às imagens fornecidas:

Nos pintainhos: 3+2+3; 3+3+1+1; 3+3+3-1; 3x3-1.

Nos caracóis: 5x5-2 e muitas outras hipóteses.

Nos peixinhos: 5x5.

Neste caso a professora ficou admirada porque 11 alunos (metade da turma) escreveram imediatamente 5x5 mesmo não sendo um quadrado. O facto de ser losango mostrou-se irrelevante porque nesta idade não ligam a estar "torto" mas o facto de ter o vértice para cima em diamante poderia dificultar a visualização do arranjo, o que não foi o caso.

Nas flores: 5+5 ou 2x5 ou 3+2+4+1 ou (4+1)+2+3 ou (2+2+1+2)+3 ou 2+2+2+2+2.

A Figura 34 ilustra modos de contagem dos peixinhos e das flores.

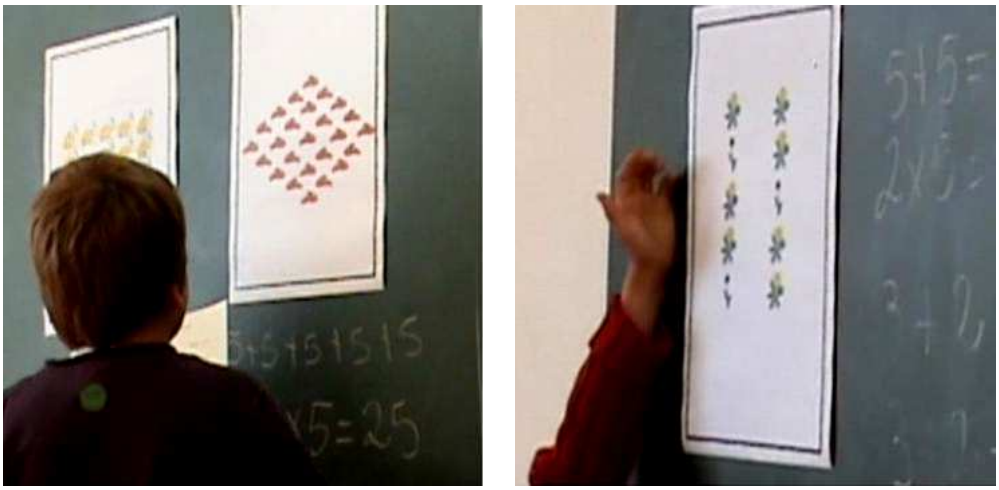


Figura 34. Contagens dos peixinhos e das flores

Nas uvas: 7+7+7+7+7 o que dá 5x7; 3+3+3+3+3 o que dá 5x3; (7+3)+(7+3) +(7+3)+(7+3)+(7+3) o que dá 5x10.

Como ninguém tinha apresentado a contagem dos peixinhos por filas horizontais a professora propôs essa hipótese, por ser bonita e harmoniosa: 1+2+3+4+5+4+3+2+1. Um aluno comenta: "É um padrão!"

Padrões de crescimento em sequências. Na segunda aula com dominós os alunos fizeram descoberta de padrões numéricos em sequências e verbalização dos raciocínios. A segunda tarefa foi mais difícil para eles, mesmo trabalhando a pares. Os alunos mais fracos tiveram muitas dificuldades porque não conseguiam lidar com as duas mudanças simultâneas. Na primeira tarefa uma parte do dominó era fixa (3) e só a outra variava, e na segunda variavam as duas. Notou-se que a viragem de 6 para 0 – que corresponde a uma aritmética modular (mod 7) - os alunos compreenderam bem: "como não há 7 pintas damos a volta e voltamos ao zero!"

A professora desenhou no quadro as peças 2-3, 3-4 e 4-5 e pediu as seguintes. No fim fez a síntese:

Prof. Qual era o padrão?
Aluno 1 Era mais um.
Prof. Era mais aonde?
$A_{[\text{vários}]}$ Em cima e em baixo.
Prof. Era sempre mais um...
$A_{[\text{vários}]}$ ... em cima e mais um em baixo. (A1-2, 19/11/2007)

Padrões no cálculo mental. Na segunda parte da aula de padrões com dominós os alunos trabalharam pela primeira vez a tabela dos cem. Estavam a contar de 5 em 5 e a professora, com a tabela dos cem afixada no quadro, tentava que os alunos "dessem o salto", pedindo-lhes a generalização do que se passava numa linha para as seguintes:

Prof: Olha Aluno 1, se fosse nesta linha [Referindo-se à linha 31 a 40]? Se fosse aqui nesta quais eram os que tinhas que marcar?
Prof. Trinta e cinco. Só? E que mais?
Aluno 1: Quarenta.
Prof. E o quarenta. Trinta e cinco e o quarenta [Rodeando na tabela do quadro os respectivos números]. E então se fosse nesta, que eu estava a perguntar [Referindo-se novamente à linha 81 a 90]? Queres vir aqui Aluno 1? Queres vir aqui mais próximo? Anda cá.
Aluno 1: Oitenta e cinco.
Prof. Oitenta e cinco.
Prof. Só oitenta e cinco? E que mais?
Aluno 1: Noventa.
Prof. [...] Quais eram, Aluna 2? Quais eram desta linha [Referindo-se à linha 91 a 100]?
Aluna 2: Noventa e cinco.
Prof. Noventa e cinco.
Aluna 2: E cem. (A1-2, 19/11/2007)

Ao analisar a primeira coluna da tabela (1, 11, 21, 31, ...) a professora procurou que fizessem descobertas e as justificassem, mas nenhum conseguiu explicar porque é que a terminação era sempre 1, e a professora acabou por conduzir para a explicação:

Prof. Mas aqui o algarismo das unidades, se vocês repararem nas linhas, é sempre o mesmo!
[...]
Aluno 1: Porque está na primeira fila.
Prof. De quanto em quanto?... É mais quanto da primeira para?...
$A_{\text{[vários]}}$ Dez.
Prof. É sempre mais...?
$A_{\text{[vários]}}$ Dez.
Prof. Então porque é que aqui tem sempre o mesmo... o algarismo das unidades é sempre o mesmo?
Aluno 2: Porque o lado direito...
Prof. [Batendo palmas] Ora pensem um bocadinho.
Aluno 1: Porque termina tudo em um.
Prof. E porque é que termina aqui este sempre em um, este termina sempre em dois, este termina sempre em três?...
Aluno 1: Porque no fim termina tudo em zero, na última fila.
Prof. Quanto é que eu somo aqui? Daqui para aqui quanto é que eu somo?
$A_{\text{[vários]}}$ É mais dez.
(...)
Prof. Dez. Dez quantas dezenas são?
$A_{\text{[vários]}}$ Uma.
Aluno 1: Uma dezena e zero unidades.
Prof. Sim. Uma dezena e zero unidades. São dez unidades, não é? Mas o algarismo das dezenas é um, e o algarismo das unidades qual é?
$A_{\text{[vários]}}$ O zero.
Prof. Então, já sabem porque é que se mantém? Porque é que se mantém? Se eu tiver um mais dez... É ou não é?
$A_{\text{[vários]}}$ Sim.
Prof. Dá quanto? Dá quanto?
$A_{\text{[vários]}}$ Dá onze.
Prof. Dá onze. Porque é que este se mantém? Se eu tiver agora onze mais dez, dá quantos?
Prof. Dá quantos? Aluno 3?
Aluno 3: Vinte e um. (A1-2, 19/11/2007)

Problemas de padrão. A meio do primeiro ano, Ana optou por trabalhar um problema aberto que envolve várias formas de pendurar guardanapos e cuja estratégia principal é a descoberta de um padrão. Enquadrou a tarefa com uma história. Numa folha distribuída havia uma imagem da forma como a mãe da Rita pendurou os guardanapos. Os alunos fizeram uma simulação da situação com corda esticada na sala, guardanapos e molas, em que iam dialogando mas sem grande aprofundamento, apenas para facilitar a compreensão da tarefa. De seguida distribuiu uma ficha de trabalho para melhor exploração, descoberta do padrão e registo das situações.

Enquanto dois alunos penduravam os guardanapos na corda, a turma discutiu se o número de molas era ou não o mesmo que o que estava na figura, pois a figura tinha os guardanapos esticados e a aluna dobrou-os ao meio pela corda. Chegaram à conclusão que era indiferente, apesar dos dois modos diferentes de pendurar o número de molas gasto nestes dois casos era o mesmo.

Deviam de seguida dizer, de acordo com a ficha, quantas molas seriam precisas para pendurar 6, 7 e 10 guardanapos. Como estratégia inicial fizeram um desenho, continuando a situação para 6 guardanapos. O facto de ter havido alunos que não penduraram da mesma maneira possibilitou a explicação do próprio e a interiorização pelos outros, e discussões ricas sobre o número de molas necessário e porque seria diferente dos outros. Mas foi talvez um pouco prematuro, já que as crianças são muito pequenas e algumas não conseguem organizar-se. Do relatório:

> Um aluno tinha um estendal onde, numa das partes, só cabiam dois guardanapos, portanto neste não ia descobrir padrão. Talvez tivesse sido melhor fazerem primeiro todos igual para tirarem a mesma conclusão, e só depois darem asas à imaginação. (Rel3-1, 05/04/2007)

De qualquer modo a professora começou por fazer a síntese do processo usado pela maioria dos alunos, que foi simulado na turma, como se pode ver na Figura 35.

Figura 35. Simulação de um modo de estender guardanapos

A generalização próxima foi feita.

Prof.	Vocês viram... Até porque houve meninos que antes de começarem a desenhar disseram logo quantas molas iam ser precisas.
Aluno 1	7.
Prof.	Para 5 precisávamos de quantas molas?
$A_{[vários]}$	6.

Prof. Para 7 precisávamos de quantas molas?
A$_{[vários]}$ 8.
Prof. Para 10 precisávamos de quantas molas?
A$_{[vários]}$ 11.
Prof. Para 12 precisávamos de quantas molas?
A$_{[vários]}$ 13. (A3-1, 04/04/2007)

Mesmo a generalização distante foi conseguida, com o questionamento da professora:

Prof. Então se eu tiver 7 guardanapos vou precisar de quantas molas?
A$_{[vários]}$ 8.
Prof. Porquê? Vou precisar sempre de quantas mais?
Aluno 2 [Respondendo prontamente] Sempre mais uma. (A3-1, 04/04/2007)

E a justificação e explicação:

Prof. É sempre mais uma. Não é?
Aluno 3: Porque se não tiver mais uma um…
Aluno 3: [Continuando] … um pano fica caído um bocadinho. [referindo-se ao último guardanapo que fica sem a mola final] (A3-1, 04/04/2007)

A exploração ficou-se por aqui, sem ter contemplado a situação inversa, que estava prevista (Quantos guardanapos tem a Rita se gastou 6 molas?), posto que houve alguns alunos que tiveram dificuldade já na primeira conclusão, de quantas molas são necessárias para 4 guardanapos, mesmo vendo a simulação. Nesta fase do 1.º ano, nota-se que algumas crianças não adquiriram completamente o conceito de número, que deverá ser anterior às relações entre os números, e têm de ser dados passos cautelosos e graduais.

Propriedades das operações como generalização de factos numéricos. Surgiram alguns casos em que os alunos foram induzidos a confirmar em casos concretos as propriedades comutativa e associativa da adição, sempre numa perspectiva de facilitar o cálculo mental. Numa aula estavam a resolver o problema: "A Joana tinha 3 cromos. O irmão deu-lhe 4 e o amigo deu-lhe 2. Com quantos ficou?" com o apoio da recta numérica. Obtiveram a expressão 3+4+2 e, quando a professora fazia a síntese, uma aluna disse que tinha feito de outra maneira. Explicou então:

Prof. Outra maneira para dar 4?… Diz lá, Aluna 1.
Aluna 1: 4 mais 2…
Prof. Mais 2?…
Aluna 1: … mais 3.
Prof. Mais 3.

Aluna 1: Igual a 9.
[Ficando o registo no quadro: 4+2+3=9].
Prof. E como é que era isto? Quem é que estava aqui [Apontando para o número 4]? Quem é que me explica aqui? Aluna 2, diz-me lá. Quem está aqui? Este corresponde a quem?
Aluna 2: Ao irmão.
Prof Dá, dá. O resultado… Isto é só para perceber que o resultado é sempre o?…
$A_{[vários]}$ Mesmo.
Prof. … mesmo. Não é? Posso mudar as parcelas que o resultado é sempre o mesmo. A posição não interessa. (A2-2, 21/01/2008)

Noutra ocasião surgiu novamente a propriedade comutativa, ao adicionar 29+42, tendo-se concluído por experimentação na recta numérica que era o mesmo que 42+29, embora alguns alunos tivessem inicialmente achado que não:

Prof. Sim. Olhem! Agora vamos juntar… Porque vocês disseram que podemos juntar os meninos com as meninas, mas os meninos com as meninas não, porque não dá o mesmo. Vamos juntar. Estamos no 42. O Hugo disse que o 29 pode ser 10 mais 10 mais 9. Eu vou pedir, por exemplo, à Aluna 1 que venha cá saltar mais 10. Está no 42 vai passar para quanto com mais 10? Se está no 42, vai passar para quanto com mais 10?
[A Aluna 1 coloca o pé no número 52 da recta numérica.]
Prof. Exactamente. Vai passar para o 50 e?…
Aluna 1: E 2.
Prof. … e 2. E agora mais 10.
Prof.B Eu vou pôr estes a juntar as coisas com outro o giz por baixo.
Prof. Exacto.
Prof.B Estava aqui e agora estamos a juntar os meninos.
Prof. Mais 10. Aluno 2! Anda cá. Mais 10. Estás no 52, vais passar para onde, Aluno 2? 52. 52.
Aluno 2: 62.
Prof. Para o 62.
[O Aluno 2 coloca o pé no número 62 da recta numérica.]
Prof. Então já temos… 10 mais 10 quanto dá? 10 mais 10 quanto dá?
Prof.B 20.
Prof. 20. Quantos é que faltam? Quantos é que faltam?
Aluno 3: 9.
Prof.B Quantos meninos eram?
$A_{[vários]}$ 29.
Prof.B Eram 29. Já contaram 10 mais 10, 20. Quantos é que faltam?
Prof. Então agora vamos juntar mais 9. Vem aqui o Aluno 4 juntar mais 9 e vai ver onde é que vai parar.
[O Aluno 4 coloca o pé no número 71 da recta numérica.]
(…)
Prof. Ao 71. Então o que é que nós podemos concluir? O que é que nós podemos concluir? Diz, Aluno 5! Diz. Diz. Diz.
Aluno 5: Tanto dá.
Prof. Diz.
Aluno 5: Tanto dá 29 mais…
Prof. 42.
Aluno 5: … 42 como 42 mais 29. (A3-2, 18/02/2008)

E ainda surge a propriedade associativa por estratégia de cálculo mental, quando os alunos concluem, também por experimentação na recta numérica e orientados pela professora, que 42+29 = 42+30-1:

Prof	Quantos meninos eram antes? Quantos eram antes?
Aluna 1:	29.
Prof.	20 e?...
$A_{[\text{vários}]}$	9.
Prof.	29. Então nós pusemos mais 1 menino. Foi ou não foi? E então agora o que é que temos que fazer? O que é que nós temos que fazer agora? Nós tínhamos tirado duas meninas e agora juntámo-las. E aos meninos nós tirámos ou pusemos mais 1.
$A_{[\text{vários}]}$	Pusemos mais 1.
Prof.	Pusemos mais 1, porque eles eram 29. Nós pusemos 30. E então agora o que é que temos que fazer? Agora no fim o que é que vamos fazer?
Aluno 2:	Tirar.
Prof.	Diz.
$A_{[\text{vários}]}$	Tirar.
Prof.	Mas eles não eram 30! Eram 29. Nós estamos a pôr aqui mais 1 só para nos facilitar a conta, para ser mais fácil. Porque é mais fácil juntar 30. (A3-2, 18/02/2008)

O raciocínio funcional. Na última aula do segundo ano Ana optou por trabalhar o raciocínio funcional através da tarefa *Descobre o meu segredo*. Falou um bocadinho dos segredos, que era necessário guardá-los até ser autorizado a revelar, disse que em matemática também havia segredos e que iam fazer uma tarefa em que tinham que guardar segredo até ser permitido revelar. Leva os alunos a expressarem-se de forma correcta em matemática. Procura e consegue que mantenham o segredo. Diz que "não está autorizado" e que quem quiser tem de dizer baixinho. Começou por

$$\begin{array}{r} 5 \rightarrow 8 \\ 9 \rightarrow 12 \\ 12 \rightarrow 15 \end{array}$$

Os alunos, à medida que iam descobrindo, iam dizendo ao ouvido da professora. Este primeiro exercício foi oral. Para os que não conseguiam a professora ia dando dicas.

Prof.	O que é que eu teria feito a estes números [apontando para os números da primeira coluna] para depois obter estes [apontando para os números da segunda coluna]? Pensem. Pensem um bocadinho. O que eu fiz no primeiro, fiz no segundo e fiz no terceiro. Exactamente a mesma coisa.
$A_{[\text{vários}]}$	Já sei.
Aluno 1:	Não podes dizer. Chiu! É segredo.
Prof.	O que eu quero é cabecinhas a pensar. Olhem! O Aluno 2 vai-me dizer o segredo muito baixinho. Diz lá. [O Aluno 2 diz então o segredo à professora.] (A5-2, 05/05/2008)

A segunda era mais difícil:

$4 \rightarrow 8$
$8 \rightarrow 16$
$6 \rightarrow 12$

De seguida deu uma ficha com quatro segredos para descobrir. Aqui já tiveram indicações precisas para registarem em linguagem matemática o segredo descoberto.

Depois apresentou um envolvendo duas operações, o que foi ainda mais difícil:

$6 \rightarrow 19$

$5 \rightarrow 16$

$8 \rightarrow 25$

Por fim receberam uma folha com as casinhas em branco para inventarem eles próprios os seus segredos.

Os alunos expressam o seu modo de pensar quando autorizados: "acrescentamos mais 3". Houve um aluno que disse logo: "E para o outro lado é menos 3".

Muitos alunos, no segundo caso, diziam +4 porque olhavam só para a primeira correspondência. A professora insistia muito nesse facto:

Prof. Não. Eu disse que o truque era igual! Os pózinhos são os mesmos!
Aluno 1: 8 mais 4.
Prof. Se eu aqui somei mais 4, eu aqui também tenho que somar mais 4. Então vou pôr 8 mais 4 [Registando no quadro]. É igual a quanto?
Aluno 2: 16.
Prof. É?! Então conta. Chiu! Conta.
Aluno 2: 12.
Prof. 12. Então vamos ver. Mais 4 pode ser?
$A_{[vários]}$ Não.
Prof. Pode ser, Aluno 3, mais 4? Não. Porquê? Porque eu já vi aqui no segundo dizendo que não podia ser, porque me dá 12 e eu tenho aqui 16. Portanto, há bocado vocês estavam todos a dizer mais 4, porque só estavam a fazer este. Mas não podem fazer só um! (A5-2, 05/05/2008)

Todos queriam dizer em segredo o que tinham pensado mas ninguém quebrou as regras, pelo menos ostensivamente.

Foi sempre invocada, depois da descoberta directa, a operação inversa para pensar ao contrário, andando com a setinha para trás. A relação multiplicativa foi difícil de descobrir, mas depois foi treinada com o dobro, o triplo e as inversas correspondentes. A escrita da multiplicação como operador, 2x, $\frac{1}{2}$x, etc. foi mobilizada e ficou interiorizada.

Um aluno chamou à metade a "segunda parte" por analogia com a quarta parte.

Na ficha tinham quatro segredos com operações diferentes e tiveram de usar uma representação matemática correcta, tanto para a relação a descobrir como para a sua inversa – nesse caso registavam em baixo invertendo o sentido da seta.

A formadora acompanhou individualmente alguns alunos que tiveram dificuldades em descobrir o segredo, mas com algum apoio foram capazes.

No caso da multiplicação o desconhecimento da tabuada não lhes permitia as descobertas porque aqueles números não lhes diziam nada. Ana comentava para a turma: "Estão a ver porque é que a professora diz sempre que a tabuada é para saber de cor? Depois querem fazer estes joguinhos e quem não souber não consegue".

O desafio seguinte foi mais duro: descobrir uma relação de duas operações. Houve um aluno que descobriu logo mas os outros não conseguiam. Assim, a professora teve de os ajudar na descoberta dizendo que eram duas operações. Mesmo assim teve de orientar mais para que conseguissem chegar lá. "Como se passa do 6 para o 19?" Um disse x3 e Ana aproveitou para continuar e dizer que não era bem, que faltava alguma coisa... E descobriram assim que era +1, verificando se esta relação funcionava nos casos seguintes.

Finalmente inventaram cada um o seu segredo para colocar aos outros, o que para alguns não foi tarefa fácil! Ana ajudava: "São vocês que vão pôr os números que quiserem para construir o segredo. O que for para um tem de ser para todos!". E ia incentivando os que construíam um: "Mais complicado! Eu gosto de desafios complicados!".

O primeiro aluno que pôs no quadro o seu segredo tinha na sua folha o registo apresentado na Figura 36.

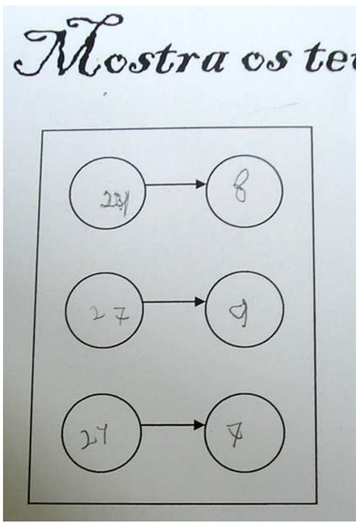


Figura 36. Apresentação de um "segredo"

Como alguns alunos não estavam a conseguir descobrir, a professora propôs que vissem o inverso, talvez fosse mais fácil. Para os fazer falar, Ana dizia: "Ó [nome do aluno], dá autorização a estes meninos, parece que já descobriram!".

O segundo foi

$1 \rightarrow 10$
$2 \rightarrow 20$
$3 \rightarrow 30$

Outro foi

$400 \rightarrow 500$
$500 \rightarrow 600$
$600 \rightarrow 700$

Ana, na reflexão, considerou que tinha demorado muito tempo, mas concluiu que como foi a primeira vez, é natural o tempo gasto e afirmou que iria continuar este trabalho em aulas posteriores. Reconheceu a importância desta descoberta com números salteados afirmando que às vezes nos manuais aparece mas tudo seguido e os alunos até preenchem na vertical sem se aperceberem da relação da esquerda para a direita. Afirmou que os alunos a tinham surpreendido pela quantidade e qualidade dos resultados alcançados. Confessou que não estava à espera de tanto. Tendo prosseguido este trabalho numa aula posterior, deu conta depois que todos tinham quatro segredos e alguns bem difíceis, com duas operações e do tipo metade mais 3, triplo menos 2, etc.

O trabalho autónomo

Como formanda a frequentar o segundo ano, Ana deveria realizar um trabalho autónomo como componente da formação. Como já foi referido anteriormente, foi-lhe proposto que o trabalho autónomo se realizasse baseado no desenvolvimento do pensamento algébrico. No início desse ano lectivo, numa conversa mantida com a formadora, Ana manifestou a sua intenção de trabalhar com os seus alunos do 2.º ano a descoberta de padrões numéricos para facilitar o cálculo mental com recurso à recta numérica, tendo referido algumas pesquisas já feitas na Internet. Ana constituiu deste modo um par de trabalho com uma colega de escola, que nesse momento desempenhava funções de apoio socioeducativo na sua turma, e elaboraram em conjunto um trabalho de intervenção que consistiu na planificação, realização e apresentação de uma aula na turma do 2.º ano de que Ana era titular. Decidiram trabalhar o tema Números e Operações do programa em vigor de modo a desenvolver nos alunos a seguinte competência: "Predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente em problemas envolvendo divisores e múltiplos de números ou implicando processos organizados de contagem". Os objectivos da aula eram (a) Desenvolver o cálculo mental; (b) Desenvolver a capacidade de abstracção; (c) Tomar consciência das propriedades das operações (adição); (d) Fazer generalizações sobre propriedades numéricas; (e) Descobrir regularidades na tabela dos cem; (f) Resolver situações problemáticas utilizando a recta numérica; e (g) Desenvolver o pensamento algébrico. No dia da aula, que foi observada pela formadora, as professoras procuraram um espaço diferente da sala de aula habitual já que pretendiam que os alunos trabalhassem sobre uma grande recta numérica desenhada no chão e não havia na sala condições para o fazerem. Para o efeito utilizaram um pavilhão anexo à escola onde é habitual os alunos praticarem educação física e fizeram antecipadamente a marcação da recta com giz no chão de madeira, de 0 a 100, com os números apenas nas dezenas exactas, tal como se ilustra na Figura 37. Do diário de campo da investigadora: "Os alunos estavam animadíssimos, até pela novidade de uma aula fora do seu espaço habitual. Assim, estavam motivados para o trabalho. O comportamento é bom". (DC, 18/02/2008)

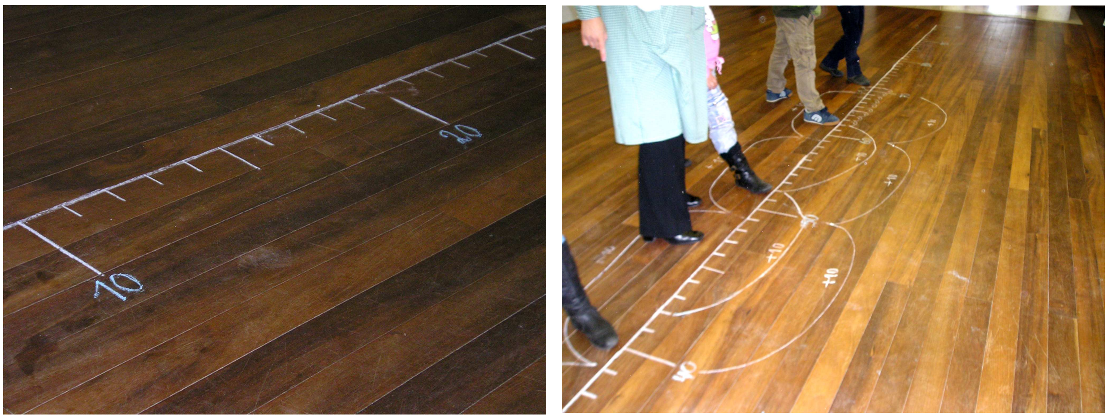


Figura 37. Recta numérica no chão

Começaram por comparar a recta com um objecto conhecido: a régua. Realizaram um primeiro jogo, usando dois dados gigantes, em que o resultado de um deles marcava o número de partida e o do outro a amplitude do salto. Os próprios alunos é que faziam, à vez, com o pé, a marcação dos vários saltos que resultavam e iam contando. Outros faziam um registo dos números saídos numa tabela dos cem (p.e., no primeiro jogo o primeiro dado indica o 6 e o segundo o 4; então as crianças, à vez, vão dizendo e marcando na recta com o pé: 6, 10, 14, 18, ..., enquanto que outros colegas – um representante de cada grupo - vão registando os mesmos números na tabela). As professoras sugeriram que analisassem o algarismo das unidades dos números onde os meninos tinham o pé e que tirassem conclusões. A professora rodeou com giz no chão todos os algarismos das unidades da sequência constituída para facilitar a percepção do padrão. De notar o entrosamento e complementaridade do trabalho das duas professoras:

Prof.B	A seguir ao 6 qual é o das unidades que aparece?
A:	O 10.
Prof	Qual vinha então a seguir ao 6? Ao 46?
$A_{\text{[vários]}}$	O 50.
Prof	O 50. Não é?
Prof.B	E a seguir ao 50?
$A_{\text{[vários]}}$	O 54.
Prof.B	E a seguir?
Prof	Olhem para os números. A seguir ao 54 qual viria?
$A_{\text{[vários]}}$	O 58.
Prof	A seguir ao 54 qual viria?
$A_{\text{[vários]}}$	58.
Prof	58. E a seguir ao 58 qual viria?
$A_{\text{[vários]}}$	62
Prof	E a seguir ao 62 qual viria?
$A_{\text{[vários]}}$	O 66.
Prof	O 66. Sim. Exactamente. O 66. E a seguir ao 66?
A:	O 70.
Prof	O 70. Portanto, repete de quanto em quanto? Nós andamos sempre de quanto em quanto?
$A_{\text{[vários]}}$	4.
Prof	De 4 em 4. Quais são os números que repetiam então? Era 6, 0, 4, 8...
Prof.B	6, 0, 4...
Prof	... 8,
$A_{\text{[vários]}}$	2.
Prof	E depois começava outra vez de novo. 6, o 0, o 4... (A3-2, 18/02/2008)

Na segunda volta deste jogo saiu o 3 e saltos de 2, o que foi outra oportunidade para procurarem padrões de repetição no algarismo das unidades:

Prof:	Olhem! Quais foram os números que saíram?
Prof	Ora digam.
Aluno 1:	3, 5, 7, 9, 11, 13...
Prof.B	... 15, 17.

Prof. Já repararam em alguma coisa ou não?

$A_{[\text{vários}]}$ Já. É repetido.

Prof A partir de que número?

[Vários alunos pronunciam-se em simultâneo percebendo-se: «Do 15.»; «Do 13.»]

Prof Diz, [nome da aluna].

Aluna: Do 13.

Prof A partir do 13. 3... Ora ouçam! 3, 5, 13... Qual é o que vem a seguir ao 13?

$A_{[\text{vários}]}$ 15.

Prof 15. 5. O algarismo das unidades do 15 também é o?...

$A_{[\text{vários}]}$ 5.

Prof ... 5. Portanto, 3, 5... Então que número vai ser a seguir?

$A_{[\text{vários}]}$ 17.

Prof A seguir ao 15 que número vai ser?

$A_{[\text{vários}]}$ 17.

Prof 17. Já está. E a seguir?

$A_{[\text{vários}]}$ 19.

Prof 19.

[A [nome da aluna] caminha até à recta numérica e coloca o pé no número 19.]

Prof [nome do aluno]! A seguir?

Prof.B Estamos no 19.

[O [nome do aluno] coloca o pé no número 21 da recta numérica.]

Prof.B Cheguem para trás. 21. A seguir, [nome do aluno]. Anda. Diz qual é o número.

Aluno 23.

Prof.B 23.

Prof.B Então vocês há bocado com a professora A já estiveram a ver o padrão. Não já? Que se repetia. Então agora eu vou pedir aos meninos cujo algarismo das unidades é o 3 vão dar um passo à frente. Os meninos que têm o algarismo das unidades o 3...

Prof Viram-se ao contrário.

Prof.B Viram-se ao contrário?

Prof Sim. Passam... Por exemplo...Começou no 3, não foi? Portanto, ela vai ficar virada assim. Põe o pezinho. Assim.

Prof.B Olhem! Eu vou repetir outra vez. Os meninos que estão num número em que o algarismo das unidades é o 3 vêm para este lado da recta. Em que é o 3.

[Os alunos que estão posicionados no número em que o algarismo das unidades é 3 dão um passo à frente e viram-se para o lado contrário.]

Prof.B Então que número é? Que número és tu, [nome da aluna]?

A1: 3.

Prof.B E tu?

A2 13.

Prof.B E tu?

A3: 23.

Prof.B 23. E se agora houvesse outro, qual seria?

$A_{[\text{vários}]}$ O 33.

Prof E se houvesse outro?

$A_{[\text{vários}]}$ 43.

Prof.B E se houvesse outro?

$A_{[\text{vários}]}$ 53, 63, 73...

Prof.B Pronto. Muito bem. (A3-2, 18/02/2008)

Esta situação também serviu para outra exploração, a dos números ímpares:

Prof Eu vou pedir à [nome da aluna] que me diga estes números que números é que são? 3, 5, 7, 9, 11... Que números é que são?

A4: São números ímpares
Prof Muito bem. São números ímpares. E porque é que são todos números ímpares? Quem é que descobre?
A[vários] Porque é de 2 em 2.
Prof Muito bem. Sim senhor.
Inv. E?...
A4: Porque o 3 é um número ímpar

E, um pouco adiante, as professoras questionam: E se...?

Prof E por que é que são números ímpares?
A1: Porque fazendo pares sobra 1.
Prof Muito bem. Sim senhor. Eles costumam fazer com os grupinhos. Não é? Ora.
Prof.B Quer dizer então que se a gente juntar um número ímpar com um número par o resultado vai ser sempre sempre sempre quê? Se a gente juntar um número ímpar com um número par vai dar um número quê?
A2: [Muito baixinho] Ímpar.
Prof.B Diz.
A[vários] Ímpar.
Prof.B Ímpar. Se juntarmos um ímpar com um par vai dar sempre sempre ímpar. Não é? Vocês estavam sempre a somar mais 2, mais 2, mais 2, mais 2 e os números dão sempre ímpares.
Prof E se em vez do número 3 saísse o número 2? Ó [nome do aluno]!
A5: Ficava pares.
Prof Se em vez de sair o número 3 eu começasse no número 2. Os números que íamos ter eram pares ou ímpares?
A[vários] Pares.
Prof Porquê?
A6: Porque eram de 2 em 2.
Inv. E aqui também era de 2 em 2.
Prof Pois.
A4: Porque começava num número par.
Prof Ah! Porque o 3 era um número ímpar. Então porquê estão?
A2: Porque começava num número par.
Prof Ah! Então digam-me lá o que é que acontece quando começa num número par e se junta 2.
A3: Sai sempre um número par.
Prof.B Pois. Exactamente. Então somando dois números pares o resultado é sempre par. Então e somando um número ímpar como é? Um número par com ímpar?
A4: É ímpar. (A3-2, 18/02/2008)

Ainda foi feita uma dramatização que consistiu em marcar posição no 45, saltar para o 55 e depois para o 65 e depois dar um passo atrás para o 64, pedindo de seguida aos alunos para traduzirem em linguagem matemática esta situação. Depois as professoras pediram para os alunos arranjarem e explicarem um modo expedito de calcular 25+47. Com estas tarefas procurava-se não só a identificação e tradução entre diferentes representações, mas também sugerir aos alunos estratégias úteis de cálculo mental, usadas ao somar 19, ou 47, a um número.

Sobre o papel dos alunos nesta aula realça-se a intervenção de todos e o uso intenso do cálculo mental, como pode ler-se no diário de campo:

> Estavam inicialmente todos sentados num banco muito comprido. Depois, à medida que as actividades se iam desenrolando, iam intervindo, levantando-se, indo à recta numérica, ou registando na folha (os que a tinham), lançando o dado, etc., tudo isto com a orientação das professoras. Usaram muito o cálculo mental pois nem havia possibilidade de registo. (DC, 18/02/2008)

Mais tarde, na sala de aula, cada grupo analisa a sua folha de registo e procura tirar outras conclusões. Apresentam-se algumas das conclusões registadas pelos alunos e depois pelas professoras no seu portefólio. *1.ª Tabela – de 4 em 4 a começar no 6: As colunas dos números ímpares não são pintadas; A contagem por coluna é de 20 em 20; Se juntarmos um número par a outro número par o resultado vai ser par. 3.ª Tabela – de 3 em 3 a começar no 5: O padrão [do algarismo das unidades] repete no número 41; A sequência dos números é ímpar/par; Passa-se duas casas em linha e em coluna: O padrão forma uma escada. 4.ª Tabela – de 5 em 5 a começar no 2: São pintados todos os números cujo algarismo das unidades é o 2 ou o 7; Se começasse no 3 eram as colunas com os algarismos das unidades 3 e 8.*

Outro tipo de tarefa com suporte da recta numérica foi a seguinte situação problemática: *Num autocarro escolar iam 29 rapazes e 42 raparigas. Quantas crianças iam no autocarro? Na primeira paragem saíram 27 alunos. Quantos alunos continuaram a viagem?* É de notar que no momento em que decorreu esta aula, estes alunos do 2.º ano ainda não conheciam o algoritmo da adição com transporte nem o da subtracção. Surgiram na aula algumas estratégias diferentes para resolver o problema.

Mais tarde, na sala de aula, o problema foi retomado e os alunos incentivados a registarem e explicarem as suas estratégias.

Apresenta-se na Figura 38 o registo de um dos alunos que consta do portefólio das professoras.

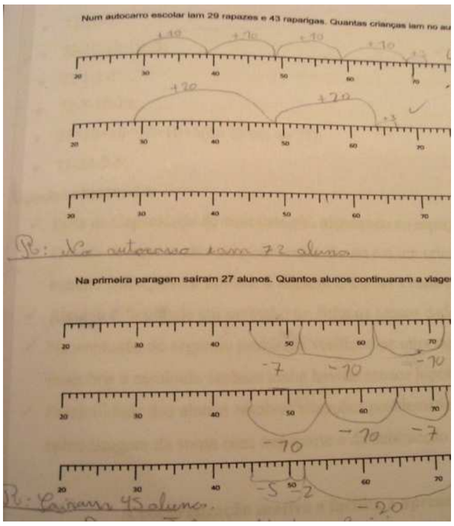


Figura 38. Estratégias de resolução do problema

Os principais aspectos da aula registados pelas professoras no portefólio foram: (a) Falta de capacidade de concentração atendendo ao espaço; (b) O facto de a recta não estar numerada de um em um criou mais dificuldades, no entanto conseguiram atribuir o número correcto a cada um dos traços; (c) Alguma dificuldade em assinalar na ficha os passos dados na recta do chão; (d) Na resolução do segundo problema verificou-se uma maior facilidade em descobrir o resultado embora tenha havido menos hipóteses; (e) Possibilidade de os alunos resolverem as situações problemáticas sem terem feito a aprendizagem da soma com transporte e da subtracção com empréstimo; e (f) A concretização motiva e facilita a aprendizagem.

Depois desta aula, a investigadora e formadora forneceu a Ana o filme, que ambas visionaram, e foi feita mais tarde uma reflexão da aula com o apoio desse visionamento. Ana afirma que não foi das aulas que gostou mais devido à falta de concentração de alguns alunos, embora eles tenham apreciado a mudança:

> À primeira vista não gostei. É um espaço onde costumam ter educação física e perdeu-se um pouco a concentração. Mas eles gostaram. Estão sempre a perguntar: quando é que temos outra aula de matemática no ginásio? (RA3-2, 07/03/2008)

Mas a observação do DVD permitiu-lhe fazer uma leitura diferente, e simultaneamente aperceber-se de pormenores na sua postura que poderiam ser melhorados:

> Com o decorrer da observação do DVD acho que os objectivos foram cumpridos. Outra coisa, estou a fazer um esforço por falar mais baixo. Eu falo naturalmente alto e acho que se falasse mais baixo obrigava-os a estar mais atentos. (RA3-2, 07/03/2008)

É de referir que realmente se notou na professora esse esforço por falar mais baixo em aulas seguintes. A formadora regista no diário de campo:

> Realmente a Ana fez um esforço para falar mais baixo tal como tinha dito. É uma pena não podermos fazer a reflexão sempre depois de visionarmos, ganhar essa possibilidade, mas não posso pedir isso em todas as aulas porque se perde muitíssimo tempo. (DC, 01/04/2008)

E no relatório da última aula: "A modulação da voz é excelente; baixa o tom de voz quando há barulho para eles se calarem – e consegue!" (Rel5-2, 06/05/2008)

Referindo-se de seguida às aprendizagens dos alunos, foi realçada a importância de o questionamento ser pensado de antemão para permitir uma exploração mais aprofundada dos conceitos matemáticos em jogo: "Eu fiz um esquemazinho em casa daquilo que se poderia perguntar, o que se podia explorar." (RA3-2, 07/03/2008). Quanto ao uso da recta numérica, Ana considerou-o um bom suporte semi-concreto, e sobretudo para a resolução dos problemas que faziam recurso a um algoritmo desconhecido, embora tenha verificado que para alguns alunos, que até já sabiam fazer o cálculo mentalmente, a recta complicou porque tiveram de se adaptar a esta nova representação sem terem necessidade. Em diálogo com a investigadora:

> Prof. Eles não faziam por conta porque não sabem o algoritmo com transporte, não é? Portanto a recta aí foi fundamental. Eu depois fiz o problema na sala para eles usarem a recta e eles tiveram dificuldade, alguns fizeram logo e até de várias maneiras mas outros tiveram muita dificuldade, e foram os que estiveram mais desatentos na aula. Custou-lhes passar do chão para o papel. Depois fiz o segundo problema e já foi mais fácil mas ainda tenho de explorar mais porque ainda não está.
> Porque eles perceberam. Oralmente conseguiam, pensar na dezena mais próxima, para somar 29 deve-se somar 30 e tirar 1, mas passar isso para a recta...
>
> Inv. Isso também é interessante. Porque pode estar a mostrar que a recta pelo menos para alguns pode não ser um apoio. O objectivo é que a recta constitua um suporte para o cálculo mental e não uma dificuldade acrescida. Mas a recta será mesmo um apoio?
>
> Prof. Acho que sim, para os que têm mais dificuldade é. Vão contando... Os que têm já um cálculo mental mais elaborado talvez não. Por exemplo, estou-me a lembrar do [nome do aluno]. Ele diz logo! E na recta teve dificuldade. (RA3-2, 07/03/2008)

O trabalho realizado foi apresentado aos colegas do 1.º ano e 2.º ano na sessão conjunta de formação. A apresentação foi conduzida com muito profissionalismo através da aplicação *powerpoint*, explicitando as fases principais da aula, ilustrando o trabalho dos alunos com fotografias e apresentando as principais conclusões.

É importante referir que a apresentação foi muito apreciada pelos colegas e que foram observadas posteriormente aulas de outros formandos que aproveitaram esta ideia.

Na entrevista final Ana também refere esse aspecto, afirmando que gostou tanto de apresentar o seu trabalho como de ver o dos outros colegas, pela partilha que possibilitou:

> Porque essa… foi aquela parte que eu acho que ela proporcionou de reflexão. De cooperação e de reflexão. Acho que o trabalho autónomo foi muito importante nesse aspecto. Até porque houve muita gente depois a aplicar na sala aquilo que os outros colegas fizeram. E isso é muito bom sinal. Portanto, são coisas que as pessoas gostaram e que foram fazer, porque viram, e que foram aplicadas. É a tal diferença. (E6, 11/07/2008)

Por último, este trabalho foi também apresentado no seminário final da formação que decorreu em Julho desse ano na ESE de modo a permitir que todos os professores em formação do distrito pudessem ver os trabalhos e experiências dos colegas.

O acompanhamento em sala de aula

Quando é questionada sobre as diferenças, se existirem, entre esta formação e outras que frequentou, defende que o que torna esta formação diferente das outras em que tem participado é a experiência na sala de aula. Entende que nas formações "de cadeira", mesmo que sejam boas, a pessoa ouve umas teorias interessantes, pensa que depois um dia talvez aplique, e entretanto até esquece.

> É a experiência na sala de aula. É a sala de aula. Não, mas é que marca mesmo! Porque a gente, quer queira quer não, tem que apresentar, não é? Tem que utilizar. Tem que pôr em prática. […] Não fica só pela teórica e depois um dia… pode ser que…Entretanto até esquece. (E2, 07/03/2007)

Apesar de acusar nessa altura uma certa ansiedade pela presença da formadora:

> [Rindo] Sempre com um bocadinho de receio das aulas. Porque é assim: sabe que já são muitos anos. Portanto, e a experiência que nós temos de ter professores dentro da sala … era negativa. […] Eu é sempre só até começar, porque depois começando, digo sinceramente, esqueço. Mas antes há sempre aquela ansiedade. (E2, 07/03/2007)

Contudo, no fim do primeiro ano lectivo já sente este acompanhamento de outro modo, muito mais sereno e auto-confiante:

> Muito diferente, porque eu acho que esta [formação], para além de realmente ter a preocupação de adquirirmos conhecimentos, não é, também teve um acompanhamento e uma supervisão e uma outra… teve a outra preocupação do professor. Portanto, não foi tanto só os conhecimentos,

> mas também ali se sentir auto-confiante ... por também lhe dar essa confiança para se sentir capaz, e estar na sala de aula, criar uma dinâmica diferente. E isso acho que foi conseguido. (E3, 10/07/2007)

A ideia sai reforçada no início do segundo ano, quando afirma: "A parte boa deste projecto é poderem acompanhar o professor na sala.". (E4, 03/12/2007)

E no final do segundo ano de formação, quando lhe é pedido para colocar por ordem de importância as várias vertentes da formação ao longo dos dois anos, Ana escolhe em primeiro lugar o acompanhamento em sala de aula, pois continua a achar que é essa dimensão que marca a diferença para as outras formações:

> Eu tenho hoje uma imagem totalmente diferente da matemática. Foi, acho que foi trabalhar na sala de aula. Foi [...] uma formação, para mim, mais real. (E6, 11/07/2008)

É importante também fazer, neste ponto, a comparação e o contraste com a frequência da disciplina de matemática do complemento de formação. Ana considera essa disciplina um marco no seu desenvolvimento profissional, pois foi o primeiro passo para uma visão diferente da matemática; aí aprendeu a olhar para a matemática de outro modo, a ter consciência que muita coisa tinha mudado no ensino desta disciplina, aprendeu coisas que lhe eram úteis na prática, e chegou a ter de fazer um trabalho de intervenção na sala de aula que lhe foi pedido como requisito de avaliação. Todavia, estabelece uma distinção nítida para esta formação, afirmando que esta se realizou na prática: "E acho que agora se deu o passo seguinte. Acho que agora ainda é mais [exigente que no complemento]". (E2, 07/03/2007)

Relação com a formadora. No fim do segundo ano, Ana sentia-se perfeitamente à-vontade na sua relação com a formadora e a entrada desta na sua sala de aula, já que passou a encarar o papel da formadora como o de colaboradora:

> [...] na sala de aula, de ter o apoio da formadora ali, de se poder chegar ao fim da aula e... discutir e ver o que estava mal e o que estava bem. Essa para mim foi o principal, porque foi diferente das outras formações. Marcou a diferença. Acho que esse ponto foi muito importante. Acho que houve uma parceria ali, pronto, entre formador e o formando. (E6, 11/07/2008)

E valoriza a relação estabelecida entre a formadora e os alunos:

> [...] a professora Teresa era-lhes muito querida. [...] Era-lhes muito familiar. [...] Era mais... era alguém que estava ali para ajudar. (E3, 10/07/2007)

> Eles depois também gostavam muito da professora Teresa e de a ter na sala. (E6, 11/07/2008)

E, na primeira aula do segundo ano, Ana faz uma "surpresa" aos alunos:

> Eles ficaram todos contentes quando a viram. Eu fiz propositadamente, porque não disse nada que hoje havia aula com a professora Teresa. E eu sei que eles gostam muito. Eles ficaram todos logo excitados. Se lhes tenho dito eram capazes de ficar mais calmos. Também pronto. Também acho que faz parte a emoção. (RA1-2, 19/11/2007)

No fim do primeiro ano de formação Ana pediu aos alunos para escreverem sobre as aulas de matemática. Há um depoimento que é particularmente interessante porque traduz exactamente aquilo que se espera do papel da sua própria professora e de outra pessoa dentro da sala: "A professora Teresa é boa porque ajuda todos, mas quem dá as aulas bonitas é a minha professora".

Este episódio sensibilizou a formadora, que registou no diário de campo:

> É assim mesmo, o seu a seu dono. Reflecte exactamente aquilo que deve ser a nossa intervenção: positiva mas sem se sobrepor à professora. Este miúdo do 1.º ano conseguiu uma frase perfeita para traduzir este sentir. (DC, 05/07/2007)

O bom relacionamento estabelecido entre professora, formadora e alunos foi certamente um dos factores de motivação para o trabalho.

No final dos trabalhos, e referindo-se à sua colaboração com a formadora no seu estudo de doutoramento, Ana comentou que essa colaboração tinha sido importante para si pois lhe permitiu reflectir mais e melhor sobre o trabalho que ia realizando.

A reflexão

No fim de cada aula observada era feita uma reflexão individual com a formadora sobre aspectos relevantes da aula. Ana viveu sempre estes momentos de forma empenhada, sentindo e defendendo que eram importantes quer para o prosseguimento da tarefa em aula posterior, já que lhe possibilitava determinados ajustes, quer para intervenções futuras.

Este momento de reflexão com a formadora era retomado e complementado na sessão conjunta de formação seguinte, onde Ana partilhava com os colegas presentes a sua aula, os materiais utilizados, as reacções dos alunos, o seu próprio papel enquanto professora e eventualmente alguns aspectos a alterar.

> [...] mesmo nas sessões, eu acho que é muito importante aquela parte em que depois se põe em comum o trabalho de cada escola, de cada professor. «Olha, nunca me tinha lembrado! Olha dava realmente!...» Eu acho que a partilha aqui está muito ao de cima. As pessoas têm que criar esse espírito. Mesmo que não estejam habituadas a ele. [...] E a abertura acho que está diferente... (E2, 07/03/2007)

E mais tarde é retomada a mesma ideia e é reforçada a importância da reflexão entre todos os intervenientes, aliada ao facto de se estar a reflectir sobre a própria prática concreta, o que estava em jogo era a prática:

> E nas próprias aulas [sessões de formação] em que nós apresentávamos as nossas actividades acho que também eram muito enriquecedoras, porque havia uma partilha. Quer dizer, todos podiam reflectir. A formadora, os formandos. Todos os intervenientes. Aliás, eu acho que foi uma formação que permitia reflectir todos os intervenientes mesmo. Os alunos... Porque eu aproveitei o DVD e também reflecti com os meus alunos. [...] Para mim foi uma formação completamente diferente das outras em que se está ali numa atitude passiva...a ouvir. E, portanto... e que muitas vezes ouvir aquilo que nós estamos a ouvir e dizemos: «Isto na prática o que é que nos está aqui a ajudar?» Não é? E ali não. Ali era a prática. (E6, 11/07/2008)

O portefólio. Ligado à reflexão sobre a prática profissional, e como requisito de avaliação, surge a necessidade de elaboração de um portefólio. Ana acusou no fim do primeiro ano a sua dificuldade e falta de gosto em fazer o portefólio que era exigido como parte integrante da formação. Confessa que não foi habituada a fazer registos e que nesta situação se torna mais difícil a elaboração do documento. Afirma que o importante era relatar o que se passou nas aulas e ter uma perspectiva sobre esses acontecimentos e em que é que eles contribuíram para as aprendizagens dos alunos, o que considera o ponto principal. E nesse aspecto reconhece que pode levar o professor a reflectir sobre a sua acção. O que não lhe parece muito lógico é que esse portefólio seja usado para avaliação:

> É fazer o portefólio foi... eu não vi tanto como uma reflexão minha, que tive que a fazer, é lógico, não é? Mas vi-o mais como fazer qualquer coisa para ser avaliada. Percebe? Eu acho que era mais importante a outra parte. E, portanto, isso eu acho que pode vir a acontecer quando estivermos mais habituadas a este tipo de coisas e o façamos naturalmente. (E3, 10/07/2007)

Porém, houve uma circunstância associada à elaboração do portefólio nesse primeiro ano de que Ana gostou muito. É que, uma vez que existiam as gravações vídeo das aulas observadas, estas foram-lhe facultadas para facilitar a lembrança de alguns pormenores das aulas que pudessem vir a ser úteis. E a professora ficou agradavelmente surpreendida "Foi a primeira vez que vi umas aulas gravadas minhas!" e defende que o visionamento do vídeo lhe facilitou enormemente a reflexão:

> Porque é assim, eu se tivesse que fazer a aula tinha ali... eu encontrei falhas, grandes falhas. Inclusive numa do [...] Quando foi do Tangram, há lá um miúdo que se enganou e teve dificuldade e, pela pressão do tempo, eu não lhe dei a atenção que devia. E, portanto, ficou-me assim um bocado... Que é uma das coisas que eu vou repetir, por causa daquele miúdo. Porque eu não... até fiquei eu magoada, porque pronto. Eu disse-lhe é assim e tal... Mas quase que o despachei um bocadinho para não estar a perder tempo e... perdia a turma toda. É importante reflectir. Nunca tinha... e achei muito interessante, porque a pessoa está ali e consegue-se aperceber daquilo que está errado... e do que é que está certo. E ali... havia ali coisas que eu ia mudar seguramente se repetisse a aula. (E3, 10/07/2007)

No segundo ano de formação a perspectiva de Ana em relação à elaboração do portefólio não varia muito, já que na ordenação que lhe foi pedida das diferentes vertentes da formação coloca o portefólio em último lugar. Afirma rindo: "Mas também acho que é o menos importante nisto, sinceramente" (E6, 11/07/2008). Reconhecendo que é importante para fazer uma reflexão final, acha que essa reflexão foi sendo feita ao longo do ano e que tem de ser feito numa altura de muito trabalho para a escola, sobretudo para ela que é coordenadora. Concede no entanto que compreende que é necessário ficar um registo escrito do trabalho por causa da avaliação.

Cabe aqui notar, no entanto, que em ambos os anos o portefólio foi apresentado com boa qualidade e reflectindo o trabalho realizado com os alunos.

A reflexão com os alunos. Um aspecto interessante já surgido numa citação anterior é o facto de Ana levar os seus alunos, em determinados momentos, a reflectir sobre as aulas de matemática e sobre o seu comportamento e empenho. Um dos exemplos prende-se com uma reflexão escrita sobre as aulas de matemática feita no fim do primeiro ano de formação, com a qual a professora ficou particularmente satisfeita devido ao conteúdo das frases construídas pelos alunos.

Outra situação ocorreu quando, de posse do filme da aula de trabalho autónomo, resolveu mostrá-lo aos alunos para eles se pronunciarem sobre o seu comportamento e o seu empenho no trabalho. Os alunos ficaram delirantes por se verem a actuar e souberam ter espírito crítico sobre a sua própria actuação.

Outro episódio referido pela professora foi no final do segundo ano, em que questionou os alunos sobre o que era para eles um bom aluno, partindo daí para a exploração e reflexão sobre o tema. Nas suas palavras:

> [...] levei-os a reflectirem comigo o que é que seria um bom aluno, fomos escrevendo. E depois havia coisas que não nos surgiam, não é? E eu ia dizendo e se... e se... Íamos escrevendo. Depois então, pronto: «Isto realmente é aquilo que poderá ser considerado um bom aluno. Não é só ter bons resultados. Toda a outra envolvência». E no fim perguntei-lhes: «Agora perante isto digam-me o que é que eu penso de vós.» [Rindo] E o [nome do aluno}, ... aquele que é muito bom aluno a matemática, ele disse-me: «Um aluno razoável.» Mas muito triste. E eu disse: «Porquê razoável?» «Porque eu tenho boas notas, mas sou bastante preguiçoso.» [gargalhadas.] (E6, 11/07/2008)

A partilha de experiências

Como foi referido, Ana valoriza a partilha de experiências que decorria sempre no início de cada sessão conjunta, em que os professores contavam aspectos das suas aulas, no início apenas das assistidas mas mais tarde mesmo de outras aulas. Estes momentos, para além de constituírem mais um espaço de reflexão sobre as aulas, levavam aos outros e traziam dos outros as suas experiências, possibilitando a troca de ideias e sobretudo o ganhar incentivo e estímulo para as pôr em prática, já que outros já tentaram e com bons resultados.

Mas há outro aspecto fundamental que aparentemente foi potenciado por esta formação, que é a partilha de experiências e materiais entre os colegas da própria escola:

> E felizmente este ano na escola, que temos um óptimo ambiente, tem sido muito enriquecedor. Não só por estar nesta formação, mas porque... e na minha parte individual, não é, na experiência que eu estou a ter. Mas porque tenho a possibilidade de ter pessoas que realmente partilham, assim como eu, todos os materiais, todas as experiências. Aliás, em conjunto vamos... a pessoa que vai ter a aula diz-me: «Olha! O que é que me sugeres? O que é que achas? O que é que?...» Eu acho isto óptimo. Acho que é, se mais não fosse, isto já era muito importante. Porque acho que os professores do 1.º ciclo, não sei se os outros também é assim, mas fechavam-se um bocadinho na sua sala. (E2, 07/03/2007)

Ana considera que por vezes os professores escondem o seu trabalho uns dos outros por quererem ser os melhores mas defende que o importante "não é brilhar o professor mas brilhar o aluno". Refere que, no âmbito desta formação[12], foi criada na escola uma pasta com materiais e trabalhos dos alunos e os professores, mesmo de anos diferentes, trocavam entre si

[12] De notar que, durante o primeiro ano de formação de Ana, período em que é feita esta referência, estavam a frequentar o programa cinco professores da sua escola, dois dos quais no segundo ano de formação.

impressões sobre as aulas. Adianta ainda a existência de partilha e troca de materiais entre professores de escolas diferentes que frequentam a formação, o que era anteriormente impensável:

> Aliás, nós o facto de criarmos uma pasta onde estão metidos todos os trabalhinhos de todos os anos e depois haver o 2.º ano e haver o 1.º ano e trocarmos impressões e... Mesmo noutras escolas, sei lá, às vezes poderia ser impensável, mas pessoas que... Por exemplo, nós demos [Escola A e Escola B] (...) ao 1.º ano os dominós e eu não tive problemas nenhuns. Passei uma *pen* com todo o trabalho que eu tinha à [nome da colega] e ela mostrou-me o trabalho dela. (E2, 07/03/2007)

Reflexos do Programa de formação

Nesta secção reúnem-se e sintetizam-se alguns aspectos do impacto do programa de formação nesta professora em relação ao conhecimento matemático e didáctico e à prática de sala de aula, às perspectivas da professora acerca da matemática e do seu ensino e às atitudes e aprendizagens dos alunos, focando-se por fim os aspectos menos conseguidos e as perspectivas para o futuro.

No conhecimento matemático e didáctico e na prática de sala de aula

Neste ponto procura-se fazer uma síntese das evidências do aprofundamento do conhecimento matemático e didáctico desta professora que ocorreu ao longo dos dois anos de formação. Entremeiam-se as afirmações da professora no decurso das entrevistas com as observações da investigadora e os dados obtidos por registo vídeo das aulas já apresentados anteriormente. Esta opção de analisar o conhecimento do professor essencialmente em situação de sala de aula está de acordo com a visão de Ball et al. (2001) quando afirmam que a prática tem de ser o centro da investigação de modo a poder desvendar o uso do conhecimento que não é visível quer através dos cursos frequentados quer mesmo através do estudo do que o professor sabe. É necessária uma visão do conhecimento matemático e didáctico no contexto de ensino.

Ana defende que houve efectivamente um aprofundamento do conhecimento matemático no sentido do conhecimento da matemática para ensinar. Reconhece que esse aprofundamento alterou a sua postura na sala de aula pois, ao sentir-se mais confiante, quer em termos de conteúdos matemáticos quer em termos das melhores estratégias de abordagem dos conceitos, melhor se sente na aula. E este facto tem, quanto a si, duas consequências: por um lado, esse à-vontade é captado pelos alunos e influencia-os positivamente no seu trabalho, e, por outro, dá ao professor maior abertura para acolher intervenções dos alunos e explorar questões que anteriormente receava abordar ou em que nem tinha pensado:

> Porque quanto mais se sabe mais confiança se tem e melhor se transmite e melhor se está. Acho eu! O professor melhor se sente na sala, mais à-vontade se sente com as matérias. E isso também se transmite, não é? [A forma de trabalho] é mais aberta e mais... Porque, geralmente, quando não se tem tanta certeza também se tenta cortar... E, portanto, se se consegue estar à-vontade ... também se dá esse à-vontade aos alunos e pronto. [...] Não quer dizer que não haja muito ainda a fazer. Sinto que tenho ainda muito para percorrer. (E6, 11/07/2008)

Estas afirmações de Ana são consistentes com a sua atitude de abertura e vontade de superação quando, nas sessões conjuntas de formação, procura discutir com os colegas de grupo os conceitos matemáticos envolvidos nas tarefas que exploram e a melhor forma de as adaptar aos seus alunos, e quando, sobretudo no 2.º ano de formação, mostra outra descontracção e flexibilidade nas suas aulas de matemática, sabendo explorar as intervenções dos alunos e questioná-los de modo a promover raciocínios sólidos, conjecturas e justificações. É evidência do seu progressivo à-vontade com os tópicos matemáticos a forma como aborda, por exemplo, a tarefa das contagens, com um dado a marcar o número de partida e outro a marcar o salto, em que a professora não tem ideia daquilo que vai sair e tem de estar preparada para uma grande diversidade de situações. Como pode ver-se pelo relatório da aula:

> A tarefa dos dados não é muito confortável para o professor porque não sabe o que vai sair e tem de estar preparado para tudo. Não é daquelas tarefas que se controla perfeitamente ou então exige muita preparação anterior para prever todas as hipóteses. Mas é muito interessante! E aqui se nota que Ana se sente muito mais à-vontade neste 2.º ano pela maneira como geriu a tarefa. (Rel A2-1, 19/11/2007)

Na tarefa "Descobre o meu segredo" a professora propôs aos alunos a descoberta de uma grande diversidade de relações funcionais entre conjuntos de números. Reconheceu a importância de esta descoberta ser feita com números não consecutivos para evitar o preenchimento em coluna, o que impediria o raciocínio funcional, de modo consistente com

Schliemann et al., 2007). Mas esta tarefa tornou-se ainda mais rica pois de seguida os alunos tiveram oportunidade de inventar os seus próprios segredos e colocá-los aos colegas, aprofundando a compreensão e desenvolvendo a autonomia. Ana ainda realçou a importância do relacionamento de uma operação com a sua inversa ao incentivar os alunos a descobrirem o segredo na passagem do conjunto da direita para o da esquerda.

O uso da recta numérica também se revelou eficaz pois proporcionou um sentido da ordenação dos números e um sistema prévio de referências – os sucessivos múltiplos de dez – que ajudou os alunos a localizar e relacionar outros números. Por outro lado permitiu a exploração de problemas de subtracção que tradicionalmente não poderiam ser resolvidos sem o conhecimento do algoritmo. A consciência deste facto e o interesse em fazer uma experiência nova, trabalhando a subtracção deste modo que nunca havia feito, valorizando o desenvolvimento de processos alternativos ao algoritmo tradicional que desenvolvem nos alunos uma maior flexibilidade ao lidar com os números e as operações, constituem também evidência do desenvolvimento do conhecimento didáctico de Ana. Usando de espírito crítico, a professora questionou o valor da recta numérica para *todos* os alunos, observando que os que já tinham um cálculo mental mais desenvolvido não souberam ou não quiseram usar esta representação. Concluiu-se que é natural que isto tenha acontecido, posto que esses alunos, dispondo de um caminho mais simples – o cálculo mental – não sentiram a necessidade de um apoio suplementar.

Em relação às dinâmicas criadas Ana caracteriza a sua aula de matemática típica antes da formação como bastante tradicional, em que a professora expunha a matéria e depois os alunos faziam exercícios de aplicação: "Eu não fazia tanto assim. Não. Era muito mais expositiva" (E2, 07/03/2007). Socorria-se para isso do manual escolar e de outros livros onde pesquisava tarefas e compunha em fichas para dar aos alunos. Não usava grandemente materiais manipuláveis e o trabalho era essencialmente individual. Durante a frequência do programa a professora faz um esforço de mudança de acordo com "aquilo que vai aprendendo", nas suas próprias palavras, e há mesmo uma mudança que vai ocorrendo gradualmente, nos aspectos que neste segundo ano valoriza nas suas aulas:

> Eu tenho tido a preocupação de os pôr a falar, de os pôr a raciocinar, de que me digam porque é que fizeram assim, de darem uma explicação... Tenho tido a preocupação de me calar mais e ouvir mais. (E4, 03/12/2007)

E no balanço final da formação realça três pontos em que houve uma maior influência da formação nas suas práticas de sala de aula: (1) quebrar a lógica da sequência tradicional "dar a matéria – exercícios de aplicação"; (2) evitar apresentar logo qualquer conclusão para dar tempo aos alunos para reflectirem e se exprimirem; e (3) passar a valorizar o processo:

> Deixar de transmitir a matemática como saber acabado. De ir para o quadro e explicar a matemática... e eles aprenderem a executar. Depois ter a preocupação de dar tempo aos alunos. Portanto, eu acho... E faço um esforço. Às vezes ainda... Sabe, isto não se muda assim... Mas faço um esforço de dar tempo para eles reflectirem, para pensarem, para comunicarem antes que eu me precipite a dar a conclusão. E eu acho que isso é um passo muito importante. E depois o próprio resultado. Portanto, eu acho que passei a dar tanto valor e atenção ao percurso que o aluno faz, não é, até ao resultado (...) como ao próprio resultado da matemática. (E6, 11/07/2008)

Esta professora foi muito sensível à importância duma cultura de sala de aula que dá espaço aos alunos, permitindo-lhes descobrir por si, desde que devidamente orientados, aquilo que tradicionalmente era o professor a "dar". Escolhe como a tarefa que mais gostou de realizar com os alunos ao longo da formação a construção do tangram por dobragens, não tanto pela tarefa em si mas essencialmente pelo envolvimento e descobertas matemáticas que proporcionou de forma natural e autónoma:

> Eu gostei muito de fazer aquela tarefa do tangram. Não é pela... sim, pela tarefa em si. Mas mais pela envolvência dos alunos, porque foi uma descoberta contínua. Eles chegaram àquilo que se pretendia, eles chegaram às noções, eles... sem se ter que dizer. Portanto, eles foram cortando, foram descobrindo e foram comunicando naturalmente as suas descobertas. E chegou-se ao fim e tinha-se o tangram e tinham-se as noções todas, pronto, a aprendizagem que se pretendia e acho que foi feita de uma forma muito natural, porque eles chegaram lá muito naturalmente. Porque, pronto, o facto de estarem ali a dobrar e a... foram eles próprios que foram... construindo. Portanto... aí o papel do professor foi aquilo que se pretende mesmo. Foi só assim mesmo a orientar, a organizar. (E6, 11/07/2008)

Nesta aula Ana começou por ler um texto intitulado "A casa dos meus sonhos" que conduziu a uma primeira tarefa de memória visual: tinham de olhar para o desenho de uma casinha com alguns pormenores durante um minuto. O desenho depois era escondido e os alunos tinham de o reproduzir de memória. No desenho havia vários elementos geométricos e a professora aproveitou para fazer a exploração e o reconhecimento de figuras geométricas. De seguida deu uma folha A4 a cada aluno e foram fazendo, com as instruções da professora, as dobragens e recortes necessários para obter as figuras do tangram. No relatório da investigadora há um comentário elucidativo sobre o papel dos alunos:

> Os alunos estavam atentos a seguir as instruções da professora. Embora houvesse um ou outro engano ou desentendimento, de modo geral conseguiram seguir com correcção as instruções, o que não é fácil num 1.º ano. Aderiram com entusiasmo aos desafios. É notável como é que crianças tão pequenas conseguem tanto tempo de concentração. (Rel4-1, 05/06/2007)

Foram entretanto fazendo a exploração das várias figuras que iam obtendo. Ana potencia e estimula os diálogos entre os alunos e entre ela e os alunos e coloca questões que levam à reflexão, como se pode ver no diálogo seguinte:

Prof.	Então temos aqui dois triângulos. Estes são grandes ou pequenos [Referindo-se aos dois triângulos maiores obtidos pela dobra de uma das diagonais do quadrado]?
$A_{\text{[vários]}}$	Grandes.
Prof.	E estes [Apontando para os quatro triângulos obtidos pelas dobras das diagonais do quadrado]?
$A_{\text{[vários]}}$	Pequenos.
Prof.	Estes dois pequenos será o mesmo que quê?
$A_{\text{[vários]}}$	Do que este.
Aluno 1:	[Em simultâneo com os anteriores] Do que o maior.
Prof.	Do que o grande, não é? 2 pequeninos valem tanto...
$A_{\text{[vários]}}$	como um grande.
Prof.	... como um grande.
Aluno 1:	Mas 4 pequenos acho que vale como 2 grandes. (A4-1, 04/06/2007)

Coloca em seguida um desafio que se revelou demasiado difícil para um 1.º ano. Queria que os alunos concluíssem que, se o triângulo grande pode ser coberto pelo quadrado e dois triângulos pequenos, como tinham visto e é ilustrado na Figura 39, e também pelo paralelogramo e dois triângulos pequenos, então o quadrado e o paralelogramo ocupam o mesmo espaço.

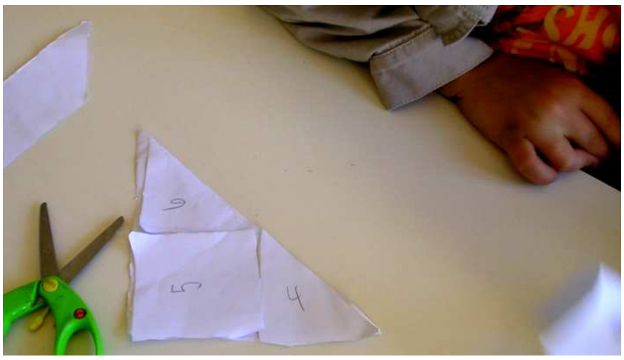


Figura 39. Cobertura do triângulo grande pelo quadrado e dois triângulos pequenos

Quando se apercebeu da dificuldade da questão mudou de estratégia e pediu para cobrirem quer o quadrado quer o paralelogramo com triângulos. Aí os alunos chegaram mais facilmente à conclusão. Esta questão foi discutida na reflexão.

A numeração das peças à medida que iam sendo obtidas revelou-se muito útil.

No fim da aula a professora confessou-se surpreendida com o desempenho e a compreensão dos alunos:

> Mas, por acaso, também me surpreendeu. Até me surpreendeu, porque... Aliás, quando cheguei de manhã disse isso ao [nome do colega]: «Hoje estou um bocado nervosa para a aula, que não tem acontecido nas outras aulas. E acho que é por causa de os pôr... ter que fazer a dobragem e cortar pelas...» [com medo que eles] não consigam e se perca muito tempo. Mas acho que até conseguiram. (RA4-1, 04/06/2007)

E continua a reflexão dizendo o que vai fazer de seguida, como continuar o trabalho numa próxima aula aproveitando a exploração do tangram. Mostra um tangram a cores que já fez para cada aluno e diz que vai tentar que reproduzam o quadrado inicial sem ver, só lembrando-se das dobragens e recortes. Lembrou-se, ainda, que os alunos poderiam construir os *puzzles* para obter a figura dos vários numerais.

O desenvolvimento do pensamento algébrico. Procurar-se-á neste ponto apresentar evidência do desenvolvimento do pensamento algébrico à luz do percurso de *algebrização* da experiência matemática dos alunos recomendado por Blanton & Kaput (2003), descrito pormenorizadamente no Capítulo 3, e concretizado pela categorização de formas de pensamento algébrico de Blanton & Kaput (2005). Escolheu-se em particular para esta síntese o trabalho autónomo, sem prejuízo do restante trabalho de Ana ao longo destes dois anos, pois julga-se que aquele, pelas suas características, aproxima-se do seu estilo de ensino, dos seus gostos e interesses, daquilo que reputa de fundamental na sua prática lectiva. Por outro lado, foi um trabalho sujeito a uma reflexão e apresentação mais cuidada. Por estas características tornou-se assim um trabalho de referência da professora, que se pensa poder exprimir de forma significativa o seu sentir na profissão, em particular no ensino da matemática, através das abordagens, tarefas e recursos escolhidos e implementados. Deste modo, pode iluminar melhor a evolução do seu conhecimento matemático e didáctico, pela interpretação do conteúdo das sessões conjuntas de formação e a sua implementação na sala de aula, com as adaptações pessoais que entendeu fazer.

O trabalho autónomo de Ana foi mais centrado no desenvolvimento do sentido do número. A professora usou o modelo físico da recta numérica desenhada no chão para apoiar a actividade matemática dos seus alunos do 2.º ano. Trabalhou inicialmente, através de um jogo de dados, contagens por saltos variados a partir de números obtidos nos dados. Utilizaram também a tabela dos cem para fazer o registo respectivo. Incentivou a tradução entre a representação na recta numérica, em linguagem corrente e em linguagem matemática. Foram trabalhadas estratégias de cálculo mental. Ana propôs e os alunos resolveram um problema de adição e subtracção com recurso à recta numérica.

Foi claro que os alunos de Ana tiveram muitas oportunidades de desenvolver o sentido do número pois denotam o seguinte conjunto de compreensões que, segundo o modelo proposto por McIntosh et al. (1992), o aluno deve possuir e utilizar: (a) A contagem por diferentes saltos e o registo subsequente numa tabela dos cem levou os alunos a reconhecer muitos padrões relacionados com a repetição do algarismo das unidades dos sucessivos números obtidos e com a soma de pares, ímpares, pares e ímpares; (b) O uso da recta numérica proporcionou um sentido da ordenação dos números e um sistema prévio de referências – os sucessivos múltiplos de dez – que os ajudou a localizar e relacionar outros números; (c) O modelo da recta numérica também desenvolveu a compreensão de propriedades das operações e das suas relações. O exemplo dado das diferentes representações da soma 25 + 47 = (25 + 50) – 3 levou a uma consciencialização das relações entre adição e subtracção e ao uso intuitivo da propriedade associativa para facilitar o cálculo mental; e (d) O problema do autocarro escolar mostra que os alunos têm consciência de que existem várias estratégias para resolver um problema dado e a sua capacidade para descobrir mais do que uma. Também mostra que os alunos procuram progressivamente utilizar uma representação e/ou método eficiente: estes alunos do segundo ano de escolaridade já não contam um por um para adicionar ou subtrair números pequenos e também não usam algoritmos para números maiores. De resto, na altura não conheciam ainda o algoritmo de subtracção com empréstimo. Muitos deles fazem já a decomposição e recomposição de números inventando ou adaptando estratégias úteis de cálculo mental.

Toda a exploração que foi feita tem ligações evidentes com o pensamento algébrico. Assinalam-se na Tabela 6 as ocorrências de cada uma dessas categorias:

Tabela 6: *Ocorrências de formas de pensamento algébrico na aula de trabalho autónomo de Ana*

Categoria	
A	Generalização sobre a soma de pares, ímpares, pares e ímpares.
B	Uso intuitivo da propriedade associativa para facilitar o cálculo mental.
C	Estabelecimento da paridade da soma sem a calcular. Descoberta de modos de adicionar 47 a um número.
G	Formulação de conjecturas sobre o algarismo das unidades de sequências numéricas.
H	Identificação de padrões na sequência dos algarismos das unidades em contagens de 2 em 2, 4 em 4, etc.
J	Apresentação oral do seu raciocínio. Discussão e debate com a professora e entre colegas.

Foram ainda usadas várias ferramentas que apoiam o pensamento algébrico, como a recta numérica e a tabela dos cem, e que desempenharam um papel muito importante na compreensão e motivação dos alunos, bem como no desenvolvimento da comunicação matemática, quer oral quer escrita. Foi incentivada a tradução entre essas várias representações. A tradução em linguagem matemática da dramatização que consistiu em marcar posição no 45, saltar para o 55 e depois para o 65 e depois dar um passo atrás para o 64, assim como a soma de 47 a um número, permitiu não só a identificação e tradução entre diferentes representações, mas também a descoberta de estratégias úteis de cálculo mental. Embora a aula tivesse decorrido num local diferente que não permitia um registo fácil das descobertas, este foi feito posteriormente, já na sala de aula, tendo os alunos registado as conclusões a que chegaram tanto em linguagem corrente como em linguagem matemática.

Nas perspectivas da professora sobre a matemática e o seu ensino

A meio do primeiro ano de formação, Ana reconhece que, como os alunos são do 1.º ano, tem dado mais importância à Língua Portuguesa já que sem lerem e escreverem também é difícil abordarem outros temas, e que como professora se sente sempre um pouco ansiosa com os progressos das crianças do 1.º ano na leitura e na escrita. No entanto, afirma que tem trabalhado bastante a matemática, mais do que outras vezes que teve 1.º ano, e que tem recorrido a materiais existentes na escola, que são em número suficiente. Acha que o facto de ter aulas assistidas "não deixa o professor adormecer". (E2, 10/03/07).

No fim do primeiro ano, mantendo a mesma perspectiva, é contudo muito mais peremptória:

> E eu senti e ao fim de 23 anos de serviço, eu tenho que dizer isto porque é verdade, senti que foi o ano que melhor trabalhei a Matemática, que mais gozo... Não é melhor. Que mais importância lhe dei. Porque tenho uma tendência de ir para a Língua Portuguesa. E tive a preocupação de pôr em prática aquilo que ouvi das sessões. Embora tenha consciência que esteja muito longe ainda da perfeição. Agora que foi diferente, que as minhas aulas de Matemática foram diferentes, foram. (E3, 10/07/2007)

Garante nessa ocasião que se sente motivada e que investiu mais na matemática. Em conversa sobre o tempo de preparação das aulas observadas reconhece que tinha uma preocupação acrescida por saber que ia ser observada, mas encara esse aspecto como positivo, achando que esse facto de ser "obrigada" a dedicar-se mais é que fez a diferença e aumentou o investimento e a motivação.

> Sim. Sim. Embora depois nas outras, pronto, também tivesse essa preocupação, mas quando era [observada] tinha forçosamente... eu acho que era quase natural, não era? Uma pessoa tinha a preocupação. Sim. Isso... E é essa a parte importante. É esta... é essa a diferença nesta acção de formação. (E3, 10/07/2007)

Ana verifica uma grande evolução na imagem que tem da matemática enquanto disciplina escolar, que era a que possuía da sua própria experiência de estudante:

> A matemática não era a minha disciplina preferida. [...] Porque acho que era aquilo, era aquilo. E afinal não é aquilo. Era o tal saber acabado. Pronto. Às vezes é a ideia que a gente forma, porque afinal pode saber porque é que é aquilo. E, às tantas, nós não sabíamos porque é que era aquilo. E talvez não gostasse tanto da matemática por isso e gostasse de outras disciplinas, pronto, que talvez me levassem mais à descoberta e... não sei! Quer dizer, nunca fui má aluna a matemática, não é? Não fui uma aluna de negativa, nem assim muito... mas realmente não era... Eu até digo, portanto, se fosse uma disciplina opcional, eu nunca a escolheria. No entanto, agora eu acho [...] que tenho uma imagem diferente. Gostei de explorar a matemática com os alunos no sentido de novas estratégias, de novos materiais. E muitos deles foram novos para mim sem dúvida. Acho que essa perspectiva da matemática realmente que deve ser... deu mais gozo. (E6, 11/07/2008)

No princípio do segundo ano a professora reflecte algumas mudanças operadas pela formação: "Eu acho que esta matemática dá muito mais espaço aos alunos, ao pensamento, à comunicação ..." (E4, 03/12/2007)

No final da formação, e referindo-se à reflexão que fez para a elaboração do portefólio, caracteriza um bom professor como

> [...] aquele que com trabalho e criatividade cria as melhores condições para que as aprendizagens se concretizem, tendo sempre presente que são os alunos que aprendem e a ele

> cabe o papel de propor e organizar as tarefas e realizar de acordo com... e coordenar o desenvolvimento dos alunos. É uma perspectiva diferente. Com o complemento de formação e desta formação é uma perspectiva diferente. [...] É verdade. Eu senti mesmo que ao longo da formação a professora foi falando nesses pontos e foi alertando e que realmente fazem a diferença na sala de aula. Eu acho que sim. (E6, 11/07/2008)

Considera assim que evoluiu na sua perspectiva da importância da criação desta cultura de sala de aula baseada naquilo para que foi sendo alertada nas sessões conjuntas e na sua própria vivência ao longo destes dois anos.

Ao caracterizar um bom aluno a matemática, admite também que o próprio conceito evoluiu no seu ponto de vista, pois anteriormente tinha tendência a valorizar essencialmente os resultados dos testes e agora há outros aspectos que considera fundamentais:

> Agora penso que realmente um bom aluno tem que se ter em conta todo o percurso do aluno. Um bom aluno será aquele que sabe questionar, que sabe raciocinar, que sabe reflectir e que sabe comunicar com auto-confiança, porque acho que é importante. Acho que realmente um bom aluno já tem que abranger esses parâmetros todos e não ficar só por dizer assim: «Olhe, nos testes tem realmente excelente». (E6, 11/07/2008)

Ana mantém sempre uma postura de grande humildade no reconhecimento de algumas limitações, declarando-se por diversas vezes "muito longe da perfeição".

> Não quer dizer que não haja muito ainda a fazer. Sinto que tenho ainda muito para percorrer. Acho que é importante, porque as pessoas têm consciência do que são capazes, não é? Portanto, nunca tive problemas em dizer que não era capaz. [...) Gosto que me ajudem e gosto de ajudar e gosto... E quando realmente não sei não vou dizer que sei, se não sei. (E6, 11/07/2008)

Simultaneamente, e em conformidade, declara-se sempre disposta a aprender mais, a aperfeiçoar-se, a superar aquilo que considera serem as suas insuficiências: "Portanto, se não sei estou ali para aprender. Estou sempre disponível para aprender. É verdade". (E6, 11/07/2008)

Nas atitudes e aprendizagens dos alunos

No fim do primeiro ano de formação, o que Ana refere à primeira vista em termos de impacto nos alunos é a motivação. Só questionada se refere a outras dimensões, como se pode ver pelo extracto do diálogo com a investigadora:

Inv. [...] atribui algum valor especial a essas tarefas diferentes?

Prof: Ai, sim. Muito. São muito mais motivadoras para os miúdos. São. Eles... São tarefas que os levam a ter uma atitude diferente. Eu acho que os motiva muito mais. É como nós...

Inv. Pois, por um lado motiva. Mas também em termos de desenvolvimento?

Prof: E a nível... Isso. Exactamente. E a nível de desenvolvimento de raciocínio e da comunicação... Portanto, eles terem que explicar e terem que explicar o seu raciocínio e ter... Não é assim. Não é... O resultado não sai logo. (E3, 10/07/2007)

Paralelamente, Ana sente-se no início do segundo ano muito motivada para o trabalho porque reconhece que está a dar frutos. Os alunos gostam das aulas e estão entusiasmados com a matemática:

> Eu estou motivada! Estou ainda com mais vontade do que o ano passado porque acho que está a dar resultado. Os miúdos estão a gostar. É mais bonita a matemática. Até eu ... até eu me sinto bem, e é importante a pessoa gostar. Eu hoje gostei muito da aula[13], e acho que brincámos, e que aprendemos... Eu estou a gostar muito desta formação, porque eu tinha uma imagem muito negativa, não era muito negativa, mas não era a minha preferida, talvez por ignorância... (E4, 03/12/2007)

E no fim do segundo ano, considera que foi uma coincidência feliz o facto de o início da formação ser o início da escolaridade básica da turma, facto que contribuiu para que no fim do 2.º ano haja um gosto e uma adesão generalizada à disciplina, o que a professora confessa não ser habitual:

> Eu acho que eles tiveram a sorte de começarem com a formação. [...]. Acho que foi importante, porque eles realmente entraram no 1.º ano com isto e depois no 2.º ano deram continuidade e realmente eu que não... Mas a maior parte da turma pergunta-se que disciplina gosta, é a matemática. Eu digo: Vamos para matemática.» Eles todos: «Eh! Eh! Eh!» É engraçado! (E6, 11/07/2008)

Ana realça também a importância de dar tempo aos alunos para eles pensarem, para se envolverem na tarefa, serem capazes de se exprimir, comunicarem entre eles e com o professor. A professora não tinha essa preocupação e considera que foi um dos aspectos em que mais mudou as suas práticas, pois reconhece as vantagens desse procedimento no gosto pela disciplina e consequentemente nas aprendizagens dos alunos:

> Mas esse esforço eu tenho feito e vou continuar a fazê-lo de realmente dar esse tempo aos alunos...para eles reflectirem, para eles comunicarem, entre eles, com o professor... porque acho que essa parte é muito importante. Cria-lhes muita autonomia. Cria-lhes muito mais autonomia e segurança, penso eu. Eles ao princípio fogem, mas depois gostam e é talvez por esse mesmo

[13] A aula a que Ana se refere não foi observada pela formadora.

> gosto por comunicarem… que se calhar eles gostam de trabalhar a matemática, não é? (E6, 11/07/2008)

Defende que esta oportunidade que se dá aos alunos provoca um maior envolvimento deles nas actividades da aula e aumenta a sua auto-estima, pois vão gradualmente confirmando que são capazes. Refere a propósito uma fotografia que pôs no portefólio que mostra um aluno todo sorridente, com expressão de grande satisfação, que tinha acabado de explicar aos colegas o seu raciocínio.

Continuando a reflectir sobre o desenvolvimento da capacidade de comunicação dos alunos, Ana afirma que para si foi uma novidade mas que pôde confirmar na prática que é fundamental:

> Portanto, essa parte da comunicação eu nunca a vi com esta ênfase. Nunca a vi. Nunca ouvi falar dela assim. Que era tão importante. E é mesmo, porque nós vemos pelas expressões dos miúdos, pelo gozo que lhes dá comunicarem aquilo que são capazes. Isso para mim é realmente… foi uma aprendizagem. Porque olhar para a cara dos miúdos e ver que ali… estarem todos a querer dizer o que é que… Pronto. Mesmo quando foi "Descobre o segredo" eles estavam todos entusiasmados pela actividade. E queriam dizer e o outro queria dizer, queriam «Posso ir ao quadro?» e queriam explicar. E isso, quer dizer, leva-os a pensar: «Eu sou capaz. Afinal isto é fácil. Eu consegui.» Não é? (E6, 11/07/2008)

Considera, além disso, que se os alunos iniciarem esta prática desde muito novos, como acontece com os seus alunos desde o 1.º ano, a atitude de participação e comunicação do seu raciocínio e das suas descobertas é interiorizada de uma forma natural com vantagem para estudos posteriores.

Outra das iniciativas que promoveu foi dar aos alunos um problema de processo por semana para eles tentarem resolver em casa, eventualmente com o apoio dos pais, e que depois era discutido e resolvido ao nível da turma. Esta actividade, para além de desenvolver a capacidade de resolução de problemas, também proporcionava momentos fortes de comunicação. Ana verifica que os alunos tiveram experiências matemáticas muito marcantes e descreveu, entusiasmadamente, um episódio em que um deles manifesta o seu sentir:

> Nós estávamos a fazer o problema de processo e, pronto, eles estavam muito entusiasmados com as estratégias. […] e todos queriam vir dizer como fizeram. E ele virou-se para mim e disse assim: «Ó professora!» Assim com aqueles olhos dele grandes, estou mesmo a ver: «Afinal a Matemática é fixe!» Ele é um miúdo com dificuldades. […] E, portanto, acho que valeu a pena. (E3, 10/07/2007)

Mas as coisas não se ficam pela motivação. Ana refere que os resultados dos alunos nos testes que foi fazendo ao longo do ano foram muito positivos. Considera que os alunos estão bem desenvolvidos no cálculo mental e de modo geral no tema dos números e operações, e os problemas de processo têm sido uma constante semanal. No fim do segundo ano, Ana sente-se satisfeita com o seu trabalho.

Aspectos menos conseguidos

Quando foi questionada sobre aspectos negativos ou aquilo que o programa deveria ter facultado e não o fez, Ana refere apenas a questão do apetrechamento das escolas com mais materiais, porque os que foram facultados são ainda insuficientes, por forma que não haja "desculpas" para a sua não utilização:

> Eu sinceramente, eu fartei-me de pensar, mas não vi o que é que faltou. Eu a única coisa... nem sei se é da competência do programa, não é. Mas a única coisa que eu gostaria de ver agora era as escolas apetrechadas com material a que nós tivemos acesso. Porque sei que foram dados alguns kits ao agrupamento, mas isso não chega, não é, para as escolas. Se realmente houvesse um investimento no sentido de apetrechar as escolas com esse tipo de material era mais um incentivo para que realmente a formação não fosse posta de parte, porque estavam ali os materiais. Não tivéssemos desculpa. Não é? Porque às vezes a gente também arranja as desculpas. [Rindo] Mas, de qualquer das formas, também tê-los ali e não os utilizar pesa muito mais na consciência. (E6, 11/07/2008)

Perspectivas para o futuro

A questão que se coloca no fim da formação é se se abrem portas para uma prática diferente a médio prazo, ou as coisas tendem insensivelmente a voltar ao que eram. Essa foi sempre uma preocupação fundamental da formadora.

Em relação a esta questão, Ana pronunciou-se já a meio do primeiro ano afirmando que o facto de experimentar na sala de aula, de a formadora lá ir e haver reflexão, e de se verem resultados, contribui para que a pessoa vá mudando naturalmente, embora reconheça a exigência especial desta formação em relação a outras:

> É porque depois acaba mesmo por até se ir naturalmente e... porque a pessoa começa a aperceber-se que assim dá resultado E a preocupação, e põe o professor a pensar, e em estratégias também. Há ali um alerta sempre. Portanto, é. Eu acho que é importante. Embora para os formandos seja sempre... [Rindo] não é? depois possa parecer mais difícil... Mas, acho que no fim da formação, acho que toda a gente vai dizer que valeu a pena o esforço. (E2, 07/03/2007)

No fim desse primeiro ano lectivo, Ana afirma que o que aprendeu foi considerado válido e interiorizado e, mesmo sem a formadora lá estar, ela vai continuar, pois neste momento já teve essa vontade e implementa fora das aulas observadas, no dia-a-dia, coisas com que não trabalhava antes, as tarefas e os materiais a elas associados.

No fim do segundo ano, fazendo o balanço final da formação, quando se refere à sua nova visão da matemática como disciplina escolar, coloca a tónica na vontade de cada um:

> Não quer dizer que me sinta já como o peixe na água para trabalhar a matemática assim desta forma. Mas acho que abriu grandes horizontes. E agora também depende da vontade de cada um... de continuar ou não, não é? Portanto, vontade eu tenho. (E6, 11/07/2008)

E, de uma forma ainda mais veemente, faz a ponte para o futuro, estabelecendo o contraste com outras formações:

> Com o outro tipo de formação acabava mesmo no dia em que acabava a formação. Eu acho que não havia uma continuidade. Eu acho que esta não nos permite isso. A partir do momento que a gente experimenta na sala eu acho que não há um retrocesso. Eu acho que... quer dizer, eu acho que a pessoa sente o prazer e o gosto... Porque [noutra formação] nós ouvimos mas não experimentamos, até pôr em prática, perde-se. Aqui já experimentámos e já vimos como é que é. E já vimos o resultado. E, portanto, é difícil abandonar, não é? Se o resultado é positivo, se as coisas correm bem assim, porque é que se há-se pôr para trás? Eu acho que isso não vai ser reversível. (E6, 11/07/2008)

Como se verifica, Ana considera no fim da formação que o processo de mudança em que se viu envolvida e que obviamente também se esforçou por construir ao longo destes dois anos é, pelos frutos que tem dado, irreversível.

Síntese

Ana é uma professora com larga experiência de ensino e um percurso profissional empenhado, positivo e optimista. Reconhece sérias limitações na sua formação inicial em matemática o que a leva a sentir a necessidade de frequentar um programa de formação contínua. Por outro lado, a frequência duma disciplina de matemática no curso de complemento de formação "abre-lhe os olhos" para uma nova visão da matemática como disciplina mais enraizada nos interesses e vivências dos alunos e nas necessidades do quotidiano, o que contraria a sua imagem enquanto estudante de uma disciplina baseada em procedimentos repetitivos e mecanizados, que não fazia qualquer sentido nem tinha utilidade no dia-a-dia. Assim, sente necessidade de tomar contacto com novos métodos, estratégias e recursos para o ensino desta disciplina.

Ana é uma formanda interessada nos conteúdos da formação, em que inicialmente valoriza o contacto com materiais manipuláveis como forma de concretizar os conceitos matemáticos que estão em jogo no programa do 1.º ciclo.

Acha muito enriquecedora a reflexão sobre as aulas e a partilha de experiências com os colegas pois permite dar e receber sugestões de propostas para a sala de aula previamente utilizadas e testadas. Relata trocas de trabalhos mesmo com colegas de outras escolas o que anteriormente à formação considerava impensável. Reconhece assim que o programa de formação abriu portas para o desbloquear do tradicional isolamento do professor na sua sala, pela partilha de experiências e mesmo pela possibilidade de trabalho conjunto entre colegas da mesma escola ou até de escolas diferentes, possibilitando a disseminação de um trabalho de características inovadoras.

Vê o portefólio como o aspecto menos interessante da formação, admitindo que é um mal necessário mas acabando por conceder que suscitou a reflexão.

Quanto ao acompanhamento em sala de aula, refere-o como a vertente mais importante da formação, aquela que marca a diferença para as outras formações que frequentou anteriormente. Admite que sentia uma preocupação acrescida por saber que ia ser observada, mas encara esse aspecto como positivo, achando que o facto de ser "obrigada" a dedicar-se mais é que provocou um maior investimento e motivação. Verifica-se assim aqui uma relação dialéctica entre uma certa pressão exterior incómoda pois obriga a pessoa a fazer um esforço suplementar mas que por isso mesmo acaba por ter efeitos positivos no desempenho. No final da formação caracteriza o papel da formadora como o de uma colaboradora.

O trabalho autónomo foi feito em equipa de forma mais aprofundada do que o habitual pois dava-se a circunstância de a colega com quem trabalhou ser professora de apoio da sua turma o que possibilitou o trabalho conjunto na mesma turma e a reflexão sobre a actuação comum.

Ana revela-se fascinada com as potencialidades da comunicação na sala de aula entre o professor e os alunos e entre alunos, a que nunca tinha dado grande importância por ter previamente uma forma tradicional de trabalhar nas aulas de matemática. Esforça-se por dar mais tempo aos alunos quer para pensarem nos desafios propostos por tarefas inovadoras quer para se exprimirem oralmente e mesmo por escrito.

Na prática de sala de aula verifica-se uma evolução no questionamento e na chamada de atenção dos alunos para determinados factos e relações numéricas que é extremamente importante para que se vão familiarizando com os números e as suas relações e propriedades, e só pode ser feita se o professor estiver alertado para a sua importância e, essencialmente, se tiver adquirido ele próprio um forte sentido do número. Ana foi também ganhando experiência e gosto em confrontar os alunos, perante uma dada situação, com a questão “E se…?”, que é muito rica pois permite analisar a situação de outros pontos de vista ou mesmo reflectir sobre situações diversas da original. Verificou-se assim que o aprofundamento do conhecimento matemático e didáctico desta professora produziu efeitos nas suas práticas. Em particular em relação ao pensamento algébrico, que foi o tema escolhido para basear o trabalho autónomo durante o segundo ano de formação, Ana proporcionou aos alunos diversas experiências, começando por contagens visuais baseadas na descoberta de padrões na disposição dos objectos de modo a facilitar a contagem, a descoberta de padrões nas contagens numéricas por saltos de diferentes unidades e a utilização intuitiva das propriedades das operações de modo a promover o cálculo mental, a resolução de problemas em que a descoberta e generalização de padrões é a estratégia fundamental, e uma introdução ao raciocínio funcional, conduzindo os alunos a considerar as operações aritméticas como transformadores, ou seja, agentes de mudança. Em todo este trabalho foram utilizados como recurso fundamental a tabela dos cem e essencialmente a recta numérica, designadamente no seu trabalho autónomo, que se dirigiu de modo especial ao desenvolvimento do sentido do número com forte apoio no cálculo mental.

Os alunos, de modo geral, mostram-se muito motivados para o trabalho elegendo a matemática como a sua área preferida. Foi também notória a evolução do seu desempenho ao longo dos dois anos a nível dos temas tratados, nomeadamente o sentido do número e o pensamento algébrico, bem como de capacidades transversais de resolução de problemas, raciocínio e comunicação.

Ana reconhece que no curso de complemento de formação aprendeu coisas sobre a prática, designadamente uma nova visão da disciplina mais contextualizada, bem como o novo papel do professor e dos alunos, o que foi um primeiro passo. Contudo, foi neste programa de formação contínua, com todas as suas vertentes mas devido essencialmente ao acompanhamento em sala de aula, que se redescobriu como professora, embora já com 24 anos de docência, e mudou a sua prática.

Assim, Ana defende com convicção que esta formação teve as características necessárias para promover a mudança nas suas práticas e, além disso, para que a nova forma entretanto adquirida de viver o ensino da matemática não seja abandonada, realçando como factores dessa manutenção a experimentação, a vivência na sala de aula, e os frutos que essa experiência deu ao nível do trabalho da professora bem como do empenhamento e das aprendizagens dos alunos.

Capítulo 8

GUILHERME

Este capítulo centra-se no professor a quem neste estudo foi atribuído o nome de Guilherme. Inicia-se com uma breve apresentação da pessoa no seu percurso pessoal e profissional, seguida da caracterização da sua relação com a matemática enquanto estudante e do seu retrato profissional prévio ao programa de formação. Passa-se depois à análise do seu percurso durante a frequência do programa, nas suas várias vertentes, e às suas impressões pessoais ao longo do tempo, bem como aos reflexos deste programa no seu conhecimento matemático e didáctico, na sua prática de sala de aula e nas aprendizagens dos seus alunos.

Apresentação

Guilherme tem trinta anos no início da formação. Tem estatura média, veste desportivamente e tem um aspecto muito jovem e simpático. É um carácter sereno, não muito falador, mas optimista, bem disposto e prestável. Tem seis anos de serviço, mas muito pouca experiência como professor do 1.º ciclo. No primeiro ano de formação está colocado com funções de apoio socioeducativo, numa escola rural nas proximidades da cidade, e no segundo ano de formação fica, também como professor de apoio, colocado em duas escolas, também de características rurais, do mesmo agrupamento.

Percurso académico e profissional

Guilherme frequentou o ensino secundário na área científico-natural na opção de desporto, embora tenha colocado no boletim de inscrição a opção de saúde. Assim, foram as circunstâncias, o facto de gostar muito de desporto, e também a influência marcante de um professor de educação física no ensino secundário, que o levaram a optar por um curso ligado ao desporto.

> 12.º ano... Saídas? Eu como estava na área de desporto [...} estava tudo já encaminhado para escolher Educação Física. E, por outro lado, acho que pelo facto de eu ter tido o professor [nome do professor] [...} foi uma achegazinha para eu me decidir a ir por esse caminho. (E1, 27/11/2006)

Como não teve na altura condições para sair de casa, optou pelo curso de professores do ensino básico – variante de educação física, que frequentou na cidade onde nasceu e vive. Deste modo, a sua chegada ao ensino não foi feita por uma preferência muito marcada pela profissão de professor.

Depois da frequência de quatro anos do curso escolhido foi colocado, no primeiro ano de serviço, em três escolas diferentes do 1.º ciclo do distrito. Decidiu então concorrer para as Ilhas, onde durante três anos desempenhou funções como professor de educação física no 2.º ciclo. Teve então a oportunidade de vincular no 1.º ciclo e optou por essa via por uma questão de segurança de emprego, tendo ficado também nas Ilhas colocado no 1.º ciclo, mas nas actividades extracurriculares, onde trabalhou durante dois anos na área da informática.

A escola do primeiro ciclo onde leccionou no primeiro ano de formação é de plano centenário e tem características rurais pois está situada numa aldeia da periferia da cidade. No entanto a população estudantil que a frequenta é bastante heterogénea em termos socioeconómicos e culturais pois engloba os habitantes tradicionais da aldeia e outros, por vezes de profissões liberais, que entretanto aí estabeleceram a sua residência embora trabalhem na cidade. Na escola há quatro turmas e estão colocados seis professores, entre titulares de turma e de apoio socioeducativo. Guilherme é muito requerido pelos colegas, pois apoia-os bastante em trabalhos que necessitam de utilização informática, já que tem experiência e à-vontade nesta área e é naturalmente prestável. No segundo ano passou a desempenhar funções de apoio em duas escolas do mesmo agrupamento, de características rurais embora também próximas da cidade, tendo no seu horário dias de permanência numa e noutra. No entanto, o seu trabalho ligado à formação foi efectuado numa delas, da sua escolha, onde apoiava uma turma mista do 2.º e 3.º ano. Nesta escola, para além do Jardim de Infância há apenas duas turmas do 1.º ciclo. O professor titular da turma apoiada por Guilherme é um profissional com larga experiência e um percurso académico altamente diferenciado. A professora da outra turma, de 1.º e 4.º ano, frequenta também este programa de formação.

Relação com a matemática enquanto estudante

Guilherme considera que até ao 9.º ano andou sempre bem, sem qualquer problema com a matemática. No 10.º ano as coisas complicaram-se devido a vários factores, tais como a matéria, a turma e a professora:

> O 10.º ano para mim foi um bocado complicado. Até ao 9.º ano andei sempre bem, não tinha... Depois o 10.º [ano] acho que foi a Trigonometria, as tangentes, as secantes, já não... e depois a turma que tinha e... acabamos por ter – não é acusar ninguém – mas acabamos por ter uma professora estagiária. Foi complicadíssimo! (E1, 27/11/2006)

Foi forçado a repetir o 12.º ano porque à primeira vez os exames correram mal. Guilherme confessa que também não se aplicou como deveria.

No entanto, apesar destes reveses, afirma o seu gosto pela matemática desde pequeno:

> Sempre... sempre gostei da Matemática. Eu gosto da Matemática. Só tive... só tive foi aquele problemazinho, pronto, a Trigonometria [Rindo]. Não, eu sempre gostei. Adoro os problemas... Tudo o que seja ligado à Matemática sempre gostei. A Matemática nunca tive, é assim, nunca tive dificuldade mas também nunca fui um aluno de me aplicar assim muito. (E1, 27/11/2006)

Considera que não tem trauma nenhum em relação à disciplina e que o facto de ter de rever alguma matéria pela frequência da formação até o deixa bastante contente.

Formação matemática na formação inicial

No que diz respeito à formação inicial como professor do 1.º ciclo, Guilherme considera-a muito deficiente, já que o curso estava mais virado para a preparação de professores de educação física no 2.º ciclo. Só teve uma disciplina anual de matemática no 1.º ano do curso, de tronco comum, e mesmo nessa disciplina reconhece que não aprendeu muita coisa que lhe servisse para um dia ensinar matemática, porque a turma era muito grande, as aulas eram dadas de forma expositiva e abordando assuntos que não tinham muita relação com os conteúdos do 1.º ciclo:

> a matemática que eu tive foi... deixou-me muito... Era os exercícios e a matéria dada de acetato, de acetato em acetato e a explicação... as explicações eram vagas. E foi a matemática que eu tive no meu 1.º ano. Se calhar nós deveríamos ter era ou aprendido a ensinar a matemática ou trabalhar com a matemática. (E1, 27/11/2006)

Refere que as formas de avaliação eram semelhantes às do ensino secundário e não havia incidência em aspectos didácticos:

> Acabámos por ter uma avaliação como tivemos no liceu. Enquanto que, se calhar, deveríamos ter tido era uma preparação para abordar a própria disciplina. (E1, 27/11/2006)

Afirma que teve bastantes dificuldades para organizar a sua intervenção quando fez a prática pedagógica no 1.º ciclo, tendo pedido ajuda a diversas pessoas:

> Senti imensas dificuldades em falar. Na altura pedi... pedi ajuda a colegas que já estavam a leccionar, à própria cooperante e à orientadora para abordar a matéria. Em termos de abordagem, não tínhamos muita... em termos de estratégias e actividades que a gente pudesse pôr em prática. (E1, 27/11/2006)

Para realçar o seu sentimento sobre as deficiências na formação inicial em matemática, compara-a com as duas sessões conjuntas que já frequentou entretanto neste programa de formação contínua:

> Até em brincadeira mas a falar a sério, já disse que nestas duas... duas formações... dois dias de formação, apercebi-me ou deram noções que se calhar não me deram durante aquele ano todo de... de 1.º ano. (E1, 27/11/2006)

Como a sua experiência como professor regular do 1.º ciclo é ao momento muito restrita, ainda não produziu até aqui grande trabalho de pesquisa pessoal e consolidação de conceitos. Nunca frequentou qualquer outra formação em matemática para além da descrita.

Retrato profissional prévio

Nesta secção procura-se dar uma imagem profissional de Guilherme antes de ingressar no Programa de formação. Uma vez que o início da recolha de dados coincide com o início da frequência da formação, a descrição que aqui se faz baseia-se mais nas entrevistas do que na observação directa.

Perspectivas sobre o ensino e a aprendizagem da matemática

Guilherme é um professor com uma experiência muito limitada ao nível da matemática e assim, como é natural, não tem ideias muito firmes sobre o ensino e a aprendizagem desta disciplina. Considera que a principal finalidade da aprendizagem da matemática é o cálculo, pelo seu valor prático na vida do dia-a-dia:

> Para que é que serve [a matemática]? Ora bem. O operar em si, o facto de eles aprenderem a operar. [...] Bem. Porque é algo essencial para a vida deles. (E2, 05/03/2007)

Quanto às tarefas, quando é questionado não revela uma visão clara sobre o papel e a importância dos vários tipos diferentes que podem ser utilizados, mas, depois de terem sido referidos exercícios, problemas e investigações como exemplos, considera que todos têm o seu valor e que todas devem ser trabalhadas na sala de aula.

Na sua actividade como professor de apoio gosta de organizar os alunos em pares depois de uma primeira fase de trabalho individual pois acha que podem beneficiar com o trabalho do colega, havendo mais partilha de ideias:

> ... procuro... organizar ou dar-lhes tarefas em que primeiro individualmente e depois podem juntar-se dois a dois. Porque o facto de eles trocarem... Porque individualmente eles acabam sempre por falar com o vizinho e trocar e saber como é que ele fez, como é que não faz. E, se calhar, eu dois... Eu gosto de que trabalhem a pares. (E2, 05/03/2007)

Quanto ao trabalho de grupos maiores, considera que, se por exemplo estiverem quatro alunos no grupo, têm a tendência para se subdividir em dois pares para além de se produzir mais barulho.

Referindo-se aos recursos para a sala de aula, afirma que não se restringe ao manual adoptado e consulta outros manuais seleccionando o que lhe interessa para depois construir as tarefas que dá aos alunos. Confessa que gosta de utilizar sempre um boneco ou um desenho relacionado com a questão como incentivo e motivação para o trabalho, que depois pode ser pintado, o que os alunos apreciam. Faz também pesquisas na Internet e em programas de matemática em formato electrónico e conversa com colegas:

> Ai, mas pesquiso bastante. Internet... Mesmo programas que tenho de Matemática e depois, pronto, outros colegas também me arranjam alguma coisa e vamos trocando alguma... (E2, 05/03/2007)

Como materiais manipuláveis utiliza sobretudo materiais não estruturados arranjados no momento, como palhinhas ou recortes em folhas, para facilitar a compreensão dos alunos com mais dificuldades, que são aqueles de quem normalmente se ocupa:

> Por exemplo, quando foi da centena, até fiz na hora com a folhinha de linhas recortar as 10 linhas. Deixei-as todas penduradas, parecia um folhinho. [...] Ela estava com umas dificuldades e eu peguei na folha, recortei, fiz lá as duas... fiz duas centenas separadas e ela a partir dali... Para a decomposição, foi bastante bom. (E2, 05/03/2007)

Já tem utilizado com os alunos jogos que encontra na Internet para a tabuada e apresentações em *powerpoint* que ele próprio constrói.

Refere como factor condicionante do sucesso dos alunos a matemática a falta de hábitos de trabalho e de método de estudo provocada pelas muitas solicitações que hoje em dia as crianças têm e a pouca importância que atribuem à escola, considerando no entanto que não reflectiu ainda profundamente sobre esse assunto:

> Não olham para a escola como se calhar há um tempo se olhava, mas... de ir andando e fazendo e... Eu noto... eu noto isso. Não valorizam tanto aquilo que lhes é dado ou que lhes é ensinado ao nível da Matemática. Bem, como a minha prática não é muita torna-se um bocado complicado responder assim em termos mais... mais objectivos. [...] Mas...Eles hoje em dia têm distracções que a gente não tinha na altura... O computador, a Internet... (E1, 27/11/2006)

Reflecte ainda sobre o estilo do professor e, fazendo a ponte com a sua própria experiência como aluno, defende que os alunos são muito críticos em relação ao professor e que um bom professor é aquele que consegue cativar os alunos pela sua forma de trabalhar:

> E desde que... que passei para o lado do professor, noto bem isso, que os miúdos... Eles... eles tiram... fazem-nos logo um raio-x ao entrar [...] Mas a presença do professor, a forma de... a forma de trabalhar e as estratégias que possa utilizar... Acho que sim. O cativar os alunos hoje em dia é fundamental. (E1, 27/11/2006)

Dificuldades/Necessidades de formação

Guilherme preocupa-se com a sua formação a nível da matemática uma vez que considera que a formação inicial que teve não o preparou para ser professor do 1.° ciclo.

> A bagagem que a gente traz do curso é... é vaga. Para não dizer que é nula nesta área. (E1, 27/11/2006)

> Embora a gente saiba que a nossa formação no 1.° ciclo é... pelo menos o nosso currículo do curso é o que é! Se a gente não se aplica um bocadinho em conhecer e em fazer umas formações [...] também é complicado. (E1, 27/11/2006)

Afirma que está na sua mão desenvolver as competências matemáticas dos alunos mas para isso precisa de tomar contacto com diferentes estratégias de ensino que cativem os alunos para a disciplina e que os levem a compreender os conceitos. Embora também reconheça uma formação insuficiente noutras áreas considera que a matemática tem uma especificidade própria que a torna mais difícil de ensinar: "E viu-se que há diferentes e imensas formas de abordar o Estudo do Meio. A Matemática, acho que já... já é mais complicado." (E1, 27/11/2006).

Guilherme apresenta como motivo principal para a sua inscrição no programa de formação a sua pouca experiência com o ensino da matemática e o reconhecimento de necessidades de formação nessa área. Defende que um aumento de formação poderá contribuir para que venha também a possibilitar uma melhor aprendizagem, por colocar o professor mais à-vontade com os conteúdos e por lhe fornecer estratégias motivadoras e facilitadoras da compreensão dos alunos:

> Até estar mais à-vontade para abordar determinados assuntos. E a nível de estratégias também, para os cativar e, pelo menos, para abordar a matéria. Fazer com que eles também a entendam. (E1, 27/11/2006)

É assim a consciência da sua fraca preparação e a necessidade e vontade de aprender mais, muito particularmente no âmbito do conhecimento didáctico, que o motivam a frequentar uma acção de formação contínua em matemática.

O percurso profissional ao longo do Programa

Pretende-se aqui descrever o percurso de Guilherme durante a frequência do programa de formação. Por uma questão de organização, apresentam-se inicialmente e em separado as vertentes do programa que proporcionam uma descrição mais concreta e extensiva, e cujos dados foram recolhidos por observação directa e/ou registo vídeo, como sejam, as sessões de formação, a prática de sala de aula, incluindo particularmente a produção matemática dos alunos, e o trabalho autónomo. Outros aspectos mais gerais de impressões e atitudes do professor, cujos dados foram recolhidos essencialmente através de entrevista, e que estão ligados às vertentes do programa de acompanhamento em sala de aula, particularmente na relação com a formadora, de reflexão e de partilha de experiências, são apresentados logo de seguida na parte final da secção e integram por vezes vários aspectos em simultâneo, já que nas entrevistas o professor faz a sua gestão conjunta.

É de notar que este professor esteve, durante os dois anos da frequência do programa de formação, com funções de apoio socioeducativo. No primeiro ano trabalhou numa turma do 2.º ano com uma professora que também frequentava a formação, e no segundo ano escolheu uma das escolas em que estava colocado e trabalhou numa turma mista de 2.º/3.º ano com um professor que não estava em formação. Em ambos os casos competia-lhe dar apoio essencialmente às crianças da turma que o necessitavam. No entanto, para o efeito do acompanhamento em sala de aula como vertente da formação e com a concordância e apoio dos titulares das turmas respectivas, Guilherme trabalhou em ambos os casos com a turma toda.

As sessões de formação

Guilherme frequentou assiduamente a formação durante os dois anos com muito gosto e entusiasmo. Participava empenhadamente nas actividades propostas e trabalhava em grupo com os colegas de forma natural. Era o formando mais novo do grupo e o menos experiente, o que lhe dava, sobretudo no primeiro ano, o estatuto de "miúdo", mais acarinhado pelos colegas.

Desde o início que definiu as sessões conjuntas de formação como "óptimas", confessando que este "regresso ao passado", como ele caracteriza as sessões, provavelmente por encontrar pontos de contacto com aulas do seu tempo de estudante, é muito agradável e até divertido. Para este professor a resolução de problemas é um prazer. Contudo, tem consciência de que tem muito a aprender e, reconhecendo valor e interesse nos temas tratados, aproveita avidamente a oportunidade da formação, tirando muitos apontamentos, registando tudo:

> O interesse que eu tenho em continuar! [...] E estou a procurar absorver e ficar com tudo... com tudo o que possa. (E2, 07/03/2007)

E ainda:

> Eu, por acaso, tomo muitos apontamentos. [...] Porque está lá tudo... está lá tudo... Espero não perder aquela capa! Até já pensei em passar aquilo tudo para o computador. (E2, 07/03/2007)

No fim do primeiro ano continua a ter a mesma opinião, revelando a mesma necessidade de recolher, e simultaneamente organizar, tudo o que foi aprendendo e aprofundando, de modo a que lhe possa vir a ser útil no futuro:

> Agora para mim foi óptimo a formação, trabalhar a matemática e tendo eu o pouco tempo de serviço que tenho. E a nível do 1.º ciclo acho que me deu... Tenho lá tudo direitinho a nível da formação para passar a computador para me organizar. (E3, 12/07/2007)

Reflecte além disso na utilidade das sugestões de tarefas que eram feitas para aplicação na aula, pois era nessa escolha que sentia mais dificuldades por não ter um domínio dos programas. Utiliza também como fonte de recursos a brochura elaborada pela equipa de formadores do distrito, que considera também de grande utilidade para esclarecimento de dúvidas.

A prática de sala de aula

Ambiente. Guilherme trabalha, durante o primeiro ano, numa turma do 2.º ano com 23 alunos. A escola é antiga mas a sala tem boas condições. É um professor empenhado e envolvido na vida da escola. Um dos exemplos é a procura de materiais para os alunos. Ao considerar necessário que os alunos tivessem um tangram próprio lembrou-se que até poderia ser a prenda de Natal da escola.

No seu segundo ano de formação, o ano de 2007/08, Guilherme trabalha numa turma mista com 22 alunos, sendo 10 do 2.º ano e 12 do 3.º ano. A arquitectura da escola é de plano centenário mas está muito colorida e alegre, tanto por dentro como por fora, e tem boas condições de trabalho. O professor colabora activamente com os colegas nos projectos da escola e envolve-se em todas as actividades.

No primeiro ano de formação, na turma do 2.º ano, as mesas duplas estão normalmente na disposição tradicional, todas em fila, voltadas para o quadro. É uma turma muito participativa. Embora sejam muito vivos e façam algum barulho, não há problemas de disciplina. Os alunos mostram-se, na maioria, interessados e envolvidos no trabalho.

No segundo ano de formação, na turma mista de 2.º e 3.º ano, a disposição habitual das mesas é em grupos de aproximadamente seis alunos, separados por anos de escolaridade. Os alunos são incentivados a trabalhar em conjunto. É uma turma bastante difícil, tanto em termos de aproveitamento como de comportamento. É a primeira vez que o professor titular da turma trabalha com eles e está a tentar fazê-los adquirir algumas regras, que manifestamente não possuíam, em termos de trabalho, de respeito pelos outros, de participação democrática. A grande heterogeneidade de desempenho escolar, tanto de um nível para o outro como dentro do mesmo nível, dificulta o trabalho e exige do professor um esforço constante para motivar os alunos e mantê-los interessados e envolvidos nas tarefas propostas.

As tarefas e os recursos. Nas aulas observadas Guilherme tinha sempre a preocupação de apresentar uma aula bem preparada e com materiais motivadores. Embora as tarefas apresentadas fossem baseadas nas propostas feitas nas sessões conjuntas de formação, Guilherme fazia sempre uma pesquisa sobre o tema e adicionava a sua criatividade, de modo a dar um aspecto diferente e enriquecer as propostas iniciais. Do diário de campo:

> Interessante que o Guilherme aproveita as sugestões da formação mas mistura-as e usa-as conforme lhe dá mais jeito e não da forma como foram apresentadas na sessão. (DC, 28/11/2007)

E também:

> Mais uma vez se constata que o Guilherme dá a volta às sugestões da formação com criatividade. (DC, 10/03/2008)

De realçar que, como Guilherme não é o titular da turma e não costuma trabalhar regularmente com a turma toda, tem a tarefa mais dificultada e mais exigente, pois surge também a questão da adaptação ao professor e aos alunos. No entanto, esta situação vai-se esbatendo com o decorrer do ano lectivo, já que em ambos os anos Guilherme continua noutras aulas não observadas a trabalhar com a turma na matemática, designadamente para completar algumas tarefas que não teve tempo de explorar completamente de acordo com a planificação. Estas eram de natureza diversificada, com predomínio das explorações e problemas. Introduzia normalmente o tema com materiais construídos por si, seguindo-se a exploração pelos alunos, geralmente apoiada por uma ficha de trabalho e registo com a sequência da tarefa e questões orientadoras. Na segunda parte da aula era por vezes utilizada nova ficha de trabalho de modo a confirmar as aprendizagens desejadas. Houve várias oportunidades de resolução de problemas, alguns deles de carácter mais aberto e investigativo, em que eram possíveis várias abordagens e pontos de chegada diversos. As rotinas de cálculo foram exploradas nas aulas observadas no contexto de tarefas e realizar e não duma forma isolada.

Das tarefas referidas neste trabalho, as que foram apresentadas por Guilherme em suporte de papel constam do Anexo F.

Durante o primeiro ano, (1) Fez o "Jogo do banqueiro", que lhe permitiu trabalhar os agrupamentos e o valor posicional com números até 100. Utilizam-se palhinhas e dados. Os alunos, em cada grupo, vão recebendo o número de palhinhas correspondente à soma das pintas de dois dados lançados que depois devem trocar, ao banqueiro, por um agrupamento de 10, de cada vez que o perfazem, com a finalidade de atingir a centena. Cada aluno deve ir fazendo um registo dos valores saídos e trocados; (2) Explorou sequências e descoberta de padrões de repetição tendo criado para o efeito figurinhas da história infantil do Noddy. Com as personagens do Noddy construídas em cartolina, o professor constrói o início de uma sequência de repetição que os alunos devem continuar por descoberta do padrão, ou constrói uma sequência em que uma peça está tapada com um cartão liso e os alunos têm de adivinhar que peça se encontra escondida. É-lhes pedido que expliquem as suas opções. Na segunda parte da aula, os próprios alunos constroem sequências do mesmo género para os colegas; (3) Trabalhou conceitos geométricos propondo a tarefa de construção de um "foguetão". O professor mostra uma imagem de um "foguetão" feito de peças de papel coladas em cartolina e pede aos alunos para, a partir de uma folha quadrada que também aprendem a construir a partir de uma folha A4, darem os cortes necessários para construírem um foguetão idêntico sem desaproveitar papel, isto é, utilizando toda a folha quadrada. Na parte final da aula, é feita uma síntese em que o professor explora com os alunos as formas construídas (rectângulo e triângulos), designações, a relação entre as peças quanto ao espaço ocupado, etc.; (4) Na última aula optou por insistir na exploração de conceitos geométricos através da construção do tangram por dobragens, uma vez que notou grandes dificuldades dos alunos neste tema, começando pela própria manipulação, dobragem e recorte de papel. Partindo de uma folha rectangular, os alunos foram fazendo dobragens e recortes conforme as indicações do professor, que iasimultaneamente fazendo a exploração informal de conceitos geométricos como por exemplo congruência e equivalência. Na segunda parte, fez o aproveitamento das formas resultantes para a construção de outras figuras geométricas.

No segundo ano dedicou três das cinco aulas observadas à iniciação ao pensamento algébrico, passando pelo desenvolvimento do sentido do número: (5) apresentou aos alunos a tabela dos cem que aproveitou para a descoberta de padrões e exercício do cálculo mental. Pediu aos alunos para fazerem cada um a sua descoberta e fomentou a partilha das descobertas. Na segunda parte o lançamento de um dado dá o número de saída e o de outro dá o salto. Os alunos registam na sua tabela os números saídos e tentam descobrir novos padrões; (6) Explorou conceitos geométricos na construção do tangram por dobragens (note-se que esta turma não é a mesma do ano anterior); (7) A tabela dos cem é retomada, desta vez incidindo sobre outro tipo de padrões e no cálculo mental. Na segunda parte foram usadas umas estruturas retiradas da tabela com um número preenchido, para que os alunos as completassem com os números adequados. Pôde assim testar-se a compreensão da sequência e das relações entre os números; (8) Fez uma iniciação ao raciocínio funcional recorrendo ao Jogo da "caixa mágica". Utilizou fichas com números numa caixinha, e outras de cor com regras. Um aluno esconde-se atrás da caixa e, de acordo com o número e a regra que o professor lhe dá, faz sair o resultado correspondente. Cada aluno tinha uma ficha de registo, para cada jogo, dos números entrados e dos saídos e depois da regra respectiva que eles deviam descobrir. Na segunda parte da aula deviam ser os próprios alunos a construir a regra atrás da caixa; e (9) Trabalhou o dinheiro, explorando situações problemáticas que exigiam o desenvolvimento de processos de cálculo, quer escrito quer mental. Apresentou o euro, como e quando surgiu, quais os países que aderiram, e qual o valor da moeda antiga, o escudo, face ao euro. Foram coladas no quadro com *post it* as notas e ampliações das moedas, e os alunos destacaram das últimas páginas do livro esse material para cada um. Foram colocados desafios numéricos, por exemplo: Quantas moedas de 20 cêntimos são necessárias para perfazer um euro; como perfazer uma determinada quantia (que ia variando) com moedas de 1 ou 2 euros e/ou notas de 5 euros.

Papel do professor. Procura sempre uma boa motivação para a aula. Constrói materiais esteticamente atractivos, com bonecos, para cativar os alunos. Por vezes utiliza um texto sobre o tópico a trabalhar para contextualizar a tarefa. Não dá muitas indicações no início da tarefa. Se vê que os alunos estão atrapalhados dá pistas para poderem progredir no trabalho. Tem um discurso agradável e bem humorado. O facto de não ser o titular da turma exige dele um esforço suplementar, mas não parece ter consequências negativas, sobretudo com o passar do tempo, mais para o final do ano lectivo. Embora seja mais conhecido de alguns dos alunos pois está diariamente com eles, vai ganhando progressivamente uma maior familiaridade com a turma. Conhece os alunos pelos nomes e dirige-se-lhes de uma forma carinhosa. Num relatório da investigadora durante o primeiro ano pode ler-se: "O professor mantém uma boa relação e um bom diálogo com os alunos embora não seja titular da turma". (Rel4-1, 08/06/2007), em relação ao seguinte excerto da aula:

> Prof. Pronto. O aluno A está ali com um problema. A tesoura dele fugiu e ele diz que os triângulos dele... Olha, anda aqui mostrar os teus 2 triângulos que não são iguais. Anda lá mostrar aqui. Pois é. A tesoura fugiu. Mostra! Anda aqui mostrar aos colegas. Vá.
> [O aluno A caminha até ao professor e mostra os triângulos 4 e 6.]
>
> Prof. Pois é. Os triângulos mais pequeninos do aluno A ... Vejam a diferença! Há aqui um que...Pois. O barbeiro fugiu-lhe a tesoura e cortou aqui um cantinho! Pronto. Vá, aluno A. (A4-1, 08/06/2007)

No segundo ano trabalha com uma turma difícil em termos de comportamento o que em uma ou duas aulas lhe provoca alguma decepção. Dada a sua pouca experiência, tem por vezes alguma dificuldade em gerir situações de barulho ou mesmo de conflito, embora estas também não sejam fáceis para o próprio professor titular da turma, pois esta tem problemas de várias ordens. Além disso, vicissitudes do concurso não garantiam a Guilherme a permanência no agrupamento até ao fim do ano, o que provocou um início do segundo ano um pouco mais atribulado. Este professor aponta, no fim do primeiro período: Eu sinto-me um bocado desmotivado porque tive um mau princípio, ainda não sei onde vou ficar, foi muito difícil. (E4, 03/12/2007)

E, referindo-se aos alunos:

> Não se pode dizer nada, uma brincadeira, porque eles não sabem até onde podem ir, não sabem qual é a fronteira, basta dizer uma piadinha qualquer que eles explodem. (E4, 03/12/2007)

No entanto, para o final do ano já havia melhorias notórias, conforme se pode verificar pelo relatório:

> Os alunos estavam quase irreconhecíveis de tão sossegados. Ficaram logo interessadíssimos na tarefa. [...] Tem-se visto uma grande evolução; o trabalho do professor [titular da turma] tem dado frutos. (Rel4-2, 23/05/2008)

No domínio das aprendizagens, Guilherme esforça-se por fazer um bom questionamento que facilite a compreensão. Por vezes vai fazendo sínteses. Interpela frequentemente os alunos para justificarem as suas afirmações e para mostrarem aos outros o seu trabalho.

Papel dos alunos. No primeiro ano a turma era algo barulhenta mas os alunos mostravam-se muito interessados e empenhados nas tarefas propostas. No princípio recorrem muito ao professor para lhes confirmar os procedimentos; aos poucos vão ganhando maior autonomia. Gostavam muito de participar e apresentar os seus pontos de vista. No segundo ano os alunos mostravam curiosidade e interesse mas havia vários com um défice de atenção que tornava difícil cativá-los por um período alargado de tempo. Não conseguiam concentrar-se por mais de dois ou três minutos seguidos. Guilherme esforçava-se por motivá-los, fazê-los intervir, dar-lhes um papel de realce. Tinham também muitas dificuldades ao nível da matemática por não estarem convenientemente trabalhados nesta área em anos anteriores. Contudo a turma globalmente participava com entusiasmo nas tarefas propostas.

Produção matemática dos alunos. Ao longo destes dois anos verificou-se que foram focados e abordados muitos tópicos matemáticos do programa. Esta análise não pretende apresentá-los exaustivamente nem tal seria possível. Procurar-se-á apresentar alguns episódios com o objectivo de ilustrar o desenvolvimento de capacidades transversais constantes nesse mesmo programa ligadas sobretudo ao desenvolvimento do sentido do número e à emergência do pensamento algébrico, pois foi esse o tópico privilegiado na segunda parte deste estudo, e que se mostraram mais relevantes através da observação de aulas.

O pensamento algébrico era um tema novo para Guilherme, pelo menos a designação, e no início do segundo ano a curiosidade logo o fez começar a pesquisar na Internet sobre o tópico, tendo-se valido das suas pesquisas para construir algumas tarefas interessantes. No entanto há algum receio na sua implementação. Por esta altura confessa:

> O trabalho que fiz o ano passado sobre padrões já foi... Eu também andei a pesquisar e já encontrei muita coisa mas de 2.° e 3.° ciclo. Eu estive para fazer nesta aula assistida [a primeira do segundo ano] mas a turma é nova para mim, é uma turma difícil, não me atrevi... (E4, 03/12/2007)

Padrões de repetição em sequências. Na segunda aula do primeiro ano, numa turma do 2.° ano, Guilherme optou por explorar padrões de repetição em sequências de figuras construídas por si com base numa tarefa com os mesmos objectivos realizada na sessão conjunta. Para motivar o trabalho apresentou previamente à turma um texto que inventou e que foi lido e trabalhado com os alunos em tempo anterior, cujos personagens eram o *senhor repetição*, a *senhora sequência* e a *senhora regularidade*.

Apresentam-se dois excertos:

> No planeta Terra habitava um senhor muito conhecido, a quem chamavam Sr. Repetição. Diziam que estava ligado à ciência dos padrões, a matemática, e que adorava ver-se repetidamente em qualquer situação, obedecendo sempre a uma ordem e apresentando uma organização.
> - Olha! Olha! Lá está ele novamente! Não tem remédio! Está sempre presente e nem se preocupa com o que os outros possam pensar. – exclamou a Senhora Sequência.
> [...]
> A Senhora Sequência pensa alto:
> - Mas! Por que razão nos cruzamos em todo o sítio a que vamos? É nos papéis de embrulho, nos pavimentos, nas tapeçarias, nos dias da semana, nas estações do ano, nos azulejos, na matemática... e em muitos mais. (Planificação da A2-1, 26/02/2007)

Recordou com toda a turma a história já lida anteriormente e com base nesse texto explorou o significado dos termos utilizados. Discutiu com os alunos onde poderiam encontrar-se padrões no dia-a-dia. À medida que os alunos intervinham o professor ia orientando e reforçando. Mostrou a preocupação de que os alunos se exprimissem explicando como tinham pensado para tirar uma dada conclusão.

Utilizou figuras do Noddy que construiu em cartolina começando por colocar na calha do quadro 4 imagens: Noddy, Senhor Lei, Macaca Marta, Noddy. Pretendia-se que continuassem o padrão. Ajudou nalguns momentos a tirar conclusões produtivas, utilizando questões adequadas:

Prof.	E agora vejam aqui. Nós... Do três para o seis, o que é que acontece aqui? Quer dizer, quantas casas é que a gente salta para aqui?
$A_{[vários]}$	Três.
$A_{[vários]}$	Um.
$A_{[vários]}$	Três.
Prof.	Três.
Prof.	Chiu! De três em três casas...
A6	Aparece a Macaca Marta.
Prof.	[Continuando] ... aparece-nos a?...
A6	A Macaca Marta.
Prof.	[Repetindo] A Macaca Marta. E agora para o Senhor Lei. E se a gente pensasse agora para o Senhor Lei. Em que casa é que ele aparece no início? (A2-1, 26/02/2007)

Nesta primeira parte da aula dialogou muito com os alunos. Estes, entusiasmados, participam na discussão colectiva. De seguida pediu para substituírem as imagens por letras. Deste modo puderam dar um passo na abstracção, reconhecendo a estrutura do padrão independentemente do uso de imagens, letras, números, figuras geométricas, gestos e sons. Formaram sequências tais como a,b,c,a,b,c,..., 100,200,300,100,200,300,..., etc.. Na tradução dos padrões por gestos, essencialmente, todos queriam apresentar a sua maneira. Depois questionou qual figurinha estaria na casa 20.

Isto gerou uma conjectura, ajudada pelo professor, que teve muito interesse:

Prof.	Sim. Mas... Não. Ai, tu pensas que a Macaca Marta está na casa vinte? Porquê?
A5:	[Em voz baixa] Porque a Macaca Marta está... é a última.
Prof.	É a última? Pois. Mas ela pode... pode não ser. Ao ser a última aqui... Estás-te a referir nesta série de três ela ser a última? Mas agora imagina... Ela está na casa?
A5:	Vinte.
A6	Três.
Prof.	Três. A Macaca Marta está na casa três. E depois em que casa é que estava?
$A_{[vários]}$	Seis. Nove.
A6	Professor! E de dois em dois chega-se a vinte.
Prof.	Chiu! Nove. E depois vai estar na casa?
A6	Doze.
Prof.	E depois vai estar na casa?
A6	Quinze.
Prof.	E depois vai estar na casa?
A6	Dezassete.
Prof.	Quinze.
$A_{[vários]}$	Dezassete.
$A_{[vários]}$	[Em simultâneo] Dezoito.
Prof.	Dezassete ou dezoito?
$A_{[vários]}$	Dezassete.

$A_{[\text{vários}]}$	[Em simultâneo] Dezoito.
Prof.	E depois então vai estar em que casa?
Marta:	Vinte e um.
Prof.	Ah! Quem é que respondeu?
$A_{[\text{vários}]}$	A Marta.
Prof.	Na casa vinte e um [Ficando o registo no quadro: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21...]. Então não poderá estar na casa?...
Prof. e A1	... vinte.
A1	É o Senhor Lei. (A2-1, 26/02/2007)

Ao mesmo tempo que descobrem o padrão os alunos vão fazendo contagens de 3 em 3, o que ainda não é rotineiro. Depois exploram o padrão 12231223... com as mesmas variantes. Na continuação pede a um aluno para criar uma sequência com as figuras disponíveis.

Na tarefa seguinte, o professor construía uma sequência e tapava um dos termos com um cartão branco para que os alunos "adivinhassem" qual a personagem tapada; como alguns alunos não estavam a conseguir descobrir, o professor pediu para um colega dar uma pista. Esse aluno disse: tem laço. E então a tarefa desembocou numa espécie de adivinhas em que a lógica da sequência não contava. Um aluno espreitava por baixo do cartão que tapa a figura e "dava uma pista". O raciocínio lógico que conduziria à descoberta de um padrão de repetição deixou de ser utilizado para se lhe sobrepor o lúdico. Esta situação ocorreu depois de uma exploração exigente e cansativa para os alunos. Por outro lado, são crianças no início do 2.º ano, com uma lógica diferente da dos adultos; o raciocínio lógico precisa de ser trabalhado com persistência para não ser preterido por outro tipo de actividade.

Contudo, foi feito um trabalho de exploração muito interessante e produtivo. Tiveram particular importância a descoberta da personagem que deveria estar numa casa de determinada ordem, o que mobilizou e desenvolveu o sentido do número para além das capacidades de descoberta do padrão e generalização, e ainda a representação do mesmo padrão através de vários processos. Do portefólio:

> O facto de representarem os padrões de diferentes modos levou a que salientassem a sua estrutura, que é importante para generalizarem. (Por1, 05/07/2007)

Padrões de crescimento em sequências. Guilherme apresenta no fim da mesma aula uma ficha de trabalho onde propõe aos alunos novos desafios, desta vez a descoberta de padrões de crescimento em várias sequências numéricas. De seguida os alunos tinham de explicar por escrito o que descobriram. Algumas das sequências são: 40, 45, ... ; 80, 75;... ; 1, 4, 7,... ; 1, 4, 9, 16, ... As primeiras são mais simples e não causam muitas dificuldades. Na última as descobertas são individuais entremeadas com sugestões do professor:

Prof. Aluno 1! Eu vou ver o que andas a fazer! [Referindo-se à sequência do segundo exercício da ficha de trabalho: 1, 4, 9, 16...] Ele na primeira casinha saltou?...
A[vários] 3.
Prof. 3. Aluno 1! [Á medida que o Aluno 1 vai dizendo os números, o professor vai registando no quadro] Na primeira saltou?...
Aluno 1: 3.
Prof. 3. Na segunda saltou?...
Aluno 1: 5.
Prof. 5. Na terceira saltou?...
Aluno 1: 7.
Prof. Estes números não vos dizem nada [3, 5, 7...]?
A[vários] Sim.
Aluno 1: São números ímpares.
Prof. Números?...
Aluno 1: Ímpares.
Prof. Ímpares. E então? Quanto é que ele irá saltar na próxima? Aluno 1! Quanto é que ele irá saltar na próxima?
Aluno 1: 9.
Prof. E na seguinte? Chiu! E na seguinte?
A[vários] 11.
Aluno 1: 11.
Prof. 11. E na seguinte?
Aluno 1: E o outro, 13.
A[vários] 13.
Prof. 13. Chiu! Pronto. E agora a resposta?
Aluno 1: É: 25, 36, 49 [Referindo-se à continuação da sequência: 1, 4, 9, 16...].
Prof. Aluno 1! E a resposta agora? Ele então soma sempre o quê?
Aluno 1: Números ímpares.
Prof. Mas é sempre o mesmo número ímpar?
A[vários] Não.
Prof. No lugar. Não respondo nada aqui. [Virando-se para os alunos que estavam de pé perto dele] Para o lugar. No lugar. Então? Ele soma sempre o quê? O número par... [corrigindo-se imediatamente] o número ímpar seguinte. Somou o 3, depois somou o...
Aluno 1: 5.
Prof. ... 5. Então, somar o número quê?
Aluno 1: Ímpar seguinte. (A2-1, 26/02/2007)

Nesta parte da aula cada aluno vai resolvendo a ficha ao seu ritmo e o professor vai circulando pelas mesas, dialogando com os alunos, esclarecendo e dando pistas, incentivando o trabalho. Não houve já tempo para uma síntese final do trabalho realizado e particularmente o registo escrito das descobertas foi feito por poucos alunos. O trabalho foi continuado em tempo posterior. Guilherme considera que a exploração feita nesta aula contribuiu de forma positiva para o desenvolvimento de capacidades matemáticas dos alunos. Do portefólio:

> A identificação e explicitação de regularidades num conjunto de números e a descrição do seu processo de descoberta implicam a adopção de uma atitude metódica e sistemática, proporcionando simultaneamente o desenvolvimento de competências de comunicação. (Por1, 05/07/2007)

Padrões no cálculo mental - a tabela dos cem. Guilherme apresentou aos alunos no início do segundo ano uma tabela de 10x10 com os cem primeiros números naturais com o objectivo de fazerem a exploração de padrões, alguns deles incentivando a descoberta de estratégias de cálculo mental. Quando os alunos chegaram já tinha colado no quadro uma tabela dos cem plastificada para ser possível escrever nela com marcadores de tinta de água. A turma estava dividida, como habitualmente, em quatro grupos de trabalho, dois do 2.º ano e dois do 3.º ano.

Falou na leitura horizontal, vertical e diagonal e procurou cativar a atenção dos alunos dando-lhes um tempo para pensarem e pedindo-lhes para fazerem cada um a sua descoberta. O primeiro aluno a expressar a sua descoberta falou na leitura diagonal:

Aluno 1: Na diagonal, de 1 até ao 100, parece... aquele 1 vai aumentando, 1, 2, 3... Só que nas dezenas também vai aumentando.
Prof. Uma coisa de cada vez! Falaste na diagonal.
Aluno 1: Sim. De 1 até 10.
Prof. Do 1?...
Aluno 1: Até 100.
[...]
Prof. Por exemplo, do 1 para o 12? É isso? Estás a fazer esta leitura [Fazendo o gesto na diagonal]. Por exemplo, do 1 para o 12 o que é que acontece?
Aluno 1: O 1 entra uma dezena e...
Prof. E?...
Aluno 1: ... e há uma nova unidade.
Prof. Uma dezena e uma unidade. Muito bem. Ora bem. Eu vou assinalar aqui então. Nós do 1... deixa-me assinalar aqui... para o 12 [Fazendo o registo no quadro: 1→ 12]... É essa a leitura que estas a fazer, não é?
Aluno 1: Sim.
[...]
Prof. E o que é que acontecerá daqui se dermos um novo saltinho então [Assinalando na tabela uma seta entre 12 e 23]?
[Ouve-se várias respostas em simultâneo, só se percebendo: «Dá mais uma dezena e uma unidade.»; «Dá mais uma unidade.»]
Prof. Mais uma unidade?...
Aluna 2: E mais uma dezena.
Prof. E quanto é que é uma unidade e uma dezena?
Aluno 3: Uma dezena? 10.
Prof. Não!
[Ouve-se a disputa de duas respostas: «13.» e «9.».]
Prof. Dedo no ar. Aluna 4! Dedo no ar!
Aluna 4: 13.

Prof. Não. Aluno 5! Se juntarmos uma unidade... uma dezena a uma unidade então que valor é que a gente tem aqui? Uma dezena, que é 10, mais uma unidade.
Aluno 5: 11. (A1-2, 28/11/2007)

Nota-se por estes diálogos que estes alunos, do 2.º e 3.º ano, têm bastantes dificuldades no reconhecimento das relações entre os números e mesmo nos factos mais básicos. O tempo gasto é maior porque o professor tem a preocupação de questionar os mais fracos para que possam desenvolver as suas competências. Com esta primeira exploração afloraram um processo de adicionar 11 a um dado número, embora sem grande profundidade. No seguimento o professor conduziu naturalmente para a descoberta de padrões na leitura vertical e também na horizontal. Mais tarde entregou uma ficha de registo com várias tabelas e retomou a leitura diagonal esclarecendo melhor os alunos sobre os movimentos que levam a acrescentar 11 ou 10+1 unidades:

Prof. Nós vimos há pouco na leitura diagonal, por exemplo, saltamos daqui para aqui, nós vimos... O que é que acontecia? Acrescentávamos uma?...
$A_{[vários]}$ Dezena.
Prof. ... dezena. E depois uma?...
$A_{[vários]}$ Unidade.
Prof. ... unidade. Como é que a gente pode fazer isso aqui na tabela? Imaginemos do 11. Nós passamos para o...
$A_{[vários]}$ ...22.
[O professor assinala na tabela.]
Prof. E estamos a acrescentar... Nós estamos a acrescentar ali 11 unidades que será a nossa dezena e a nossa unidade. Nós podemos fazer o quê? Fazer o quê? Descemos uma linha [Fazendo o trajecto na tabela]. Quanto é que nós estamos a acrescentar aqui nesta descida?
$A_{[vários]}$ 10.
Prof. Ao passarmos de uma linha para a outra?...
$A_{[vários]}$ Uma dezena.
Prof. ... estamos a adicionar a nossa de[zena]?...
$A_{[vários]}$ [De]zena.
Prof. Dezena. E o que é que nos falta adicionar, Aluno 6? Nós vimos que em cada saltinho do 11 para o 22 nós acrescentamos 11, que é uma dezena e uma?...
Aluno 6: Unidade.
Prof. ... unidade. Se nós descermos à linha... à linha seguinte nós adicionamos?...
Aluno 6: Mais uma dezena.
Prof. Do 11 para o 21 adicionamos a nossa de[zena]?...
$A_{[vários]}$ [De]zena.
Prof. E o que é que falta adicionar?
$A_{[vários]}$ Uma unidade.
Prof. Então uma unidade. A gente desce uma dezena e anda um quadradinho?...
Aluno 7 Para o lado.
Prof. ... para o lado. Lembram-se da leitura que a gente fez, esta leitura que aqui está? Nós daqui andamos quê [Referindo-se à horizontal]? De unidade em unidade. Acrescentamos uma?...
Aluno 8 [Muito baixinho] Horizontal.
$A_{[vários]}$ Unidade.

Prof. Uma unidade. Exacto. Na leitura horizontal. Então nós aqui adicionamos uma dezena e uma?...

$A_{[vários]}$ Unidade. (A1-2, 28/11/2007)

Fizeram depois o salto de 13 para 26 e seguintes (adicionar 13 unidades, o que significa uma dezena e três unidades, ou seja, um salto na vertical e três na horizontal) e em seguida um aluno veio à tabela propor o seu salto, de 14 para 46, usando a caneta para mostrar o caminho. Desce 3 linhas e avança duas casas na horizontal O professor resumiu no fim utilizando implicitamente a interpretação aditiva da subtracção: "Do 14 para chegarmos ao nosso 46 tivemos de acrescentar o quê?"

Na parte final da aula propôs o jogo do lançamento do dado para estabelecer o ponto de partida e um segundo dado para o salto. Saiu (em 2 grupos) 5 no primeiro dado e 4 no segundo. Face a estes dados os alunos deviam preencher a tabela pintando os números obtidos e tentar descobrir padrões.

A primeira parte da aula foi demorada mas é necessário com estes alunos gastar o tempo suficiente para permitir a compreensão e assimilação. Guilherme escreve no portefólio:

> Apercebi-me que havia cometido um erro ao entregar a ficha para o jogo, quer dizer, quando a entreguei pensei em iniciá-lo, mas resolvi aferir se os alunos tinham compreendido a questão de "descer em linha", que é igual a adicionarmos 1D, e que um "salto" para a direita é igual a acrescentar 1U e um "salto" para a esquerda é igual a retirarmos 1U. Como senti alguma dificuldade por parte de alguns alunos, prolonguei o exercício, o que fez com que o [nome do aluno] me questionasse acerca da utilização da ficha do jogo. (Por2, 03/07/2008)

Guilherme preparou ainda outra tarefa, sobre múltiplos, que não teve tempo de trabalhar. Esta foi uma primeira abordagem á tabela dos cem. Na reflexão a formadora propôs que este trabalho fosse continuado, nomeadamente com uma maior insistência na descoberta e utilização de estratégias de cálculo mental e testes orais rápidos para confirmar a sua apropriação. O professor concordou e afirmou a sua opinião sobre as vantagens deste recurso para o desenvolvimento do sentido do número, que é ainda nesta turma incipiente, e para os primeiros passos no pensamento algébrico pela formulação de generalizações baseadas nas descobertas realizadas.

O raciocínio funcional. Na quarta aula do segundo ano Guilherme inspirou-se na ideia apresentada por duas colegas no respectivo trabalho autónomo, a caixa mágica, para trabalhar o raciocínio funcional. A caixa, muito bonita, foi previamente construída pelos alunos – Figura 40.

Figura 40. Caixa mágica

Toda a escola participou, já que este material foi também usado pela colega da outra turma, e até funcionários colaboraram:

> Eles adoraram ter trabalhado, preparado as coisas. Todo o trabalho... [Construíram. Colaram.]. A auxiliar é que a pintou. A D. [nome] prontificou-se a pintar e estragou lá uma bata e tudo. (E6, 15/07/2008)

Por esse facto, os alunos estavam suspensos do que iria sair dali, e reagiram muito bem, com muito entusiasmo e vontade de participar. Guilherme tinha umas fichas muito bem feitas com números, numa caixinha também arranjada para o efeito, e outras de cor com regras.

Cada aluno tinha uma ficha de registo, para cada jogo, dos números entrados e dos saídos e depois da regra respectiva que eles deviam descobrir. O primeiro aluno entra na caixa e recebe uma regra. Pela ranhura entra o primeiro número e um papel em branco que o aluno deve preencher segundo a regra e fazer sair pela ranhura de saída. Isto acontece para três números. Entretanto o professor vai registando no quadro e os alunos no papel as entradas e saídas. O seguinte excerto revela a dinâmica da aula no início da actividade:

Prof. O primeiro número será o 10. Vai então esta folhinha branca para a máquina de calcular nos devolver. Ora com licença [Colocando o número 10 e a folha em branco na máquina]. Muito bem. Pronto. Receba o número, faça aí as suas contas e depois sai ali por baixo. Ora entrou o 10. Já escreveram aí na vossa?...
Aluno 1: Sim.
Prof. Esta máquina está a pensar. Sabem que a máquina...
Aluno 2: É a Aluna 3.
Prof. Sim. Estamos à espera!
[A Aluna 3 devolve o número 15.]
Prof. Ora bem. Entrou o 10 e saiu o número?...
$A_{[\text{vários}]}$ 15.
Prof. ... 15 [Registando no quadro].
$A_{[\text{vários}]}$ É mais 5.
Prof. Qual era uma das regras?
$A_{[\text{vários}]}$ Mais 2 [referida anteriormente como exemplo].
Prof. Não. As regras do jogo, não esta regra aqui.
Aluno 4: Não falar.
Prof. Não falar. Não falar. Não se esqueçam que podem estar enganados! São 3 números. Ora, irá entrar o número...
$A_{[\text{vários}]}$ 20.
Prof. Ó senhor computador!
Aluna 3: Ah?
Prof. Está preparada?
Aluna 3: Estou.
Prof. Está a entrar aí mais um número e um papel em branco [Colocando o número 20 e a folha em branco na máquina]. É o mesmo. (A4-2, 23/05/2008)

No fim um aluno vai ao quadro registar a regra. O registo era feito da forma indicada na Figura 41:

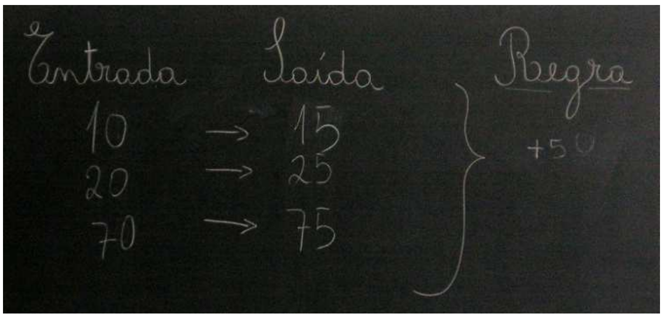


Figura 41. Registo de dados e conclusões na tarefa da caixa mágica

Faz-se a confirmação e outro aluno entra na máquina para nova experiência.

À terceira regra os alunos já estavam "orientados" para regras aditivas e foi uma surpresa. Entrou o 21 e saiu o 42. Então:

Prof. 73. Olha! Olha o número [Colocando o número 73 e a folha em branco na máquina]. Se puderes desenhar os números maiores... Exacto. Tens aí o lápis faz aí a...
Aluno 5: Qual o que entrou?

Prof. Entrou o 73.
Aluno 6: Já sei qual é a regra. Já sei qual é a regra.
Aluno 6: Tenho a certeza que a regra é mais 21. (A4-2, 23/05/2008)

E saiu 146... Mas os alunos tinham dificuldade em atender às várias experiências em simultâneo e agarravam-se á soma de 21 que identificaram para a primeira. Um diálogo em que se mostrava que 73+21 não dava 146 procurava convencê-los, mas foi difícil e o professor teve de dar uma pista:

Prof. Chiu! Olhem! Só uma pista. Por que é que tem que ser mais?
$A_{[vários]}$ Duas vezes.
Aluno 7: Já sei. Já sei.
Prof. Diz, Aluno 7.
Aluno 7: Duas vezes.
Prof. Duas vezes. Então é o?...
$A_{[vários]}$ Dobro.
Prof. Aluno 8 [que estava na caixa]! Mostra então aqui a prova. Olhem! A prova de que afinal o computador ontem descansou, mas fez tudo aqui com canetas e lápis, aqui um bocado trapalhão, 2 sem sinal... Mas está aqui a regra. O?...
$A_{[vários]}$ Dobro. (A4-2, 23/05/2008)

Seguiu-se a metade que também causou dificuldades. Alguns continuavam a fixar-se apenas no primeiro, $64 \rightarrow 32$, e a afirmar que era menos 32 sem querer olhar para os resultados seguintes. A certa altura o professor teve necessidade de distinguir as propostas para o 2.º ano das do 3.º. Apenas para o 3.º ano: $15 \rightarrow 150$; $45 \rightarrow 450$; $200 \rightarrow 2000$. Colocou em simultâneo "mais 100" para o 2.º ano. Mesmo assim usou números grandes para o 2.º ano. Depois de várias respostas, o professor sintetizou e pediu a um aluno para registar no quadro. Explorou em seguida a multiplicação por 100 identificando-a com o acrescentar de dois zeros.

De seguida optou por dar os três números todos de uma vez e saíram os três resultados. Isto funcionou para não se prenderem ao primeiro. Entraram 10, 30 e 320 e saíram 50, 150 e 1600.

Na segunda parte da aula deviam ser os próprios alunos, em pares, a inventar a regra atrás da caixa. O primeiro par recebeu 10, 22 e 192 tendo devolvido 90, 198 e 1728.

Nesta aula, com um forte carácter lúdico, os alunos exercitaram o cálculo mental. Aprofundaram o conhecimento da estrutura numérica desenvolvendo assim o sentido do número. Na descoberta de padrões com base no raciocínio funcional formularam generalizações dando assim passos no pensamento algébrico. Aparecerem os números salteados é mais exigente e importante do que preencher uma tabela com números em sequência pois aí há a tendência de preencher na vertical sem sequer descobrir a relação objecto-imagem. Guilherme confessou na reflexão que o tempo lhe tinha faltado e não tinha assim podido explorar outras situações mais complicadas, como as regras envolvendo duas operações. Mas como a caixa ficou na escola, o professor relatou mais tarde que muitas vezes os alunos "brincaram" com ela trabalhando outras propostas mais desafiantes.

O trabalho autónomo

Como formando a frequentar o segundo ano, Guilherme deveria realizar um trabalho autónomo como componente da formação. Como já foi referido anteriormente, foi-lhe proposto que o trabalho autónomo se realizasse com base no desenvolvimento do pensamento algébrico. O professor gostou da representação numérica em tabela dos cem utilizada nas sessões conjuntas para exploração de padrões, e utilizou-a numa das aulas como já foi referido. Decidiu desta vez revisitá-la, fazendo uma pesquisa para enriquecer as tarefas a propor aos alunos usando o mesmo recurso. Organizou assim, individualmente, um trabalho de intervenção que consistiu na planificação, realização e apresentação de uma aula na turma do 2.º/3.º ano onde dava apoio socioeducativo. Inicialmente pensou em trabalhar em conjunto com a colega da escola que estava também na formação, mas como esta tinha uma turma de 1.º/4.º ano acharam melhor fazer o trabalho separadamente para poderem dedicar-se com maior especificidade aos alunos dos respectivos níveis. Guilherme decidiu trabalhar o tema Números e Operações do programa em vigor com os seguintes objectivos: (1) Descobrir, explorar e continuar regularidades numéricas; (2) Descrever a lei de formação de sequências de números; (3) Descobrir relações entre números; (4) Elaborar estratégias de cálculo mental; (5) Compreender a lei de construção da tabela de números e utilizá-la em casos semelhantes; (6) Fazer e testar conjecturas; (7) Generalizar; (8) Comunicar matematicamente, oralmente e por escrito, as conclusões obtidas; (9) Desenvolver a capacidade de abstracção e o pensamento algébrico.

A reflexão da aula foi feita algum tempo depois, após visionamento do vídeo quer pelo professor quer pela formadora.

No início da aula Guilherme já tinha a tabela dos cem plastificada colada no quadro. Os alunos estavam dispostos, como habitualmente, em quatro grupos, dois do 2.º ano e dois do 3.º ano.

O professor começou por trabalhar com a turma toda e recordar o que acontece quando se anda para a direita, explorando depois o que acontece se, na mesma coluna, descermos uma linha:

Prof. Nós ao saltarmos, por exemplo, imaginemos que estamos aqui no 17, nós ao saltarmos para a coluna [linha] de baixo... Aluna 1! Ao saltarmos para a... Desculpa! Para a linha de baixo o que é que nós verificamos em termos do número? Imagina, estás aqui na casa 17 e eu digo para tu saltares uma linha, o que é que acontece ao número? Há alguma alteração?
Aluna 1: Do 17 para o 27?
Prof. Sim. Se estamos aqui na casa 17, saltar para o 27.
Aluno 2: Acrescenta-se.
Prof. Sim. Mas nós do 17 para o 27 acrescentamos o quê?
$A_{\text{[vários]}}$ Uma dezena.
Prof. Chiu! Aluno 2! Deixa a Aluna 1 pensar. Uma?...
Aluna 1: Dezena.
Prof. Uma dezena. O algarismo das unidades mantém-se, que é o 7. Não é? Nós acrescentamos uma?...
Aluna 1: Dezena. (A3-2, 10/03/2008)

De seguida propôs um desafio à turma. Que relação existirá entre a soma da primeira linha da tabela e a soma da segunda? Um aluno, ao fim de algum tempo, deu a resposta 55. O professor registou no quadro e, em jeito de síntese, apresentou aos alunos um método de obter mais rapidamente a soma, ilustrado na Figura 42, sugerindo a associação:

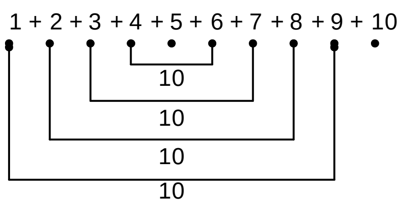


Figura 42. Estratégia de cálculo da soma da 1.ª linha da tabela

Todo este cálculo demora o seu tempo já que alguns alunos ainda têm bastantes dificuldades ao nível da descoberta e utilização de estratégias de cálculo mental. Foi um bom exercício de aprofundamento do sentido do número pela utilização da propriedade associativa (Macintosh et al., 1992). Passando depois à 2.ª linha, e usando o mesmo procedimento, o professor e os alunos chegaram em conjunto à conclusão de que a sua soma é 155. Aqui o cálculo foi ainda mais exigente já que se tratava de números maiores. Mas deu a oportunidade de adicionarem 10+20, 11+19, 12+18, 13+17,... e reforçarem, tal como no primeiro caso, a percepção do padrão do invariante da soma justificado pelo equilíbrio obtido quando se tira numa parcela e se acrescenta na outra. Depois de obterem o valor da segunda linha, houve logo alunos que descobriram o padrão fazendo uma conjectura para a 3.ª linha e seguintes:

Prof. Vá. Com calma! Vamos lá ver então. O que é que acontece?
Aluna 1: Acrescenta-se sempre...
Aluno 2: Depois é 255.
Prof. Aluno 2! Espera um bocadinho. Aluna 1! O que é que acontece então?
Aluna 1: Acrescenta-se sempre mais um...
Prof. Da primeira linha para a segunda... Mas quando fazemos a soma...
Aluna 1: Acrescenta-se sempre mais um... ao número...
Aluno 2: Depois é 255, 355, 455...
Prof. Aluna 1! Olha! Um de cada vez. Para falarem já sabem que esperam pela vossa vez. Espera aí! Quero ouvir a Aluna 1. Aluno 2! Aluna 1! O que é que acontece então? Na primeira linha... Nós fizemos a soma de todos os números da primeira linha, fizemos da segunda. O que é que acontece da primeira para a segunda linha?
Aluna 1: Como era mais uma dezena a mais, deu uma centena.
Prof. Ah! Então nós acrescentamos uma?... Aluno 3! Uma?... Da primeira para a segunda linha.
Aluno 3: Uma centena.
Aluno 2: Mais 100, que dá 255.
Prof. Então quanto é que dará?... Vão pensar. Quanto é que dará a terceira linha, a soma de todos os números?
$A_{[\text{vários}]}$ 255.
Aluno 2: Depois é 455, depois é 555 e depois é 655...
Prof. Estão a pensar? Não, eu não queria que respondessem. Eu quero que pensem. (A3-2, 10/03/2008)

Percebe-se pela intervenção da Aluna 1 que ela intuiu a explicação para este padrão, mas não conseguiu argumentar claramente. O professor também não explorou esta situação, o que depois foi referido na reflexão. Contudo, Guilherme pediu de seguida para adicionarem as colunas e estabelecerem a relação entre essas somas, tendo os alunos verificado que diferiam de 10 e aqui, sim, foi dada a justificação, embora ajudada pelo professor.

Aluno 4: 460, 470, 480...
Aluno 5: 480, 490...
[Entretanto ouve-se um barulho generalizado.]
Prof. Ei!... Toda a gente calada de uma vez. Eu estava a ouvir o Aluno 4.
Aluno 4: 470.
Prof. Porquê?
Aluno 4: Porque é só adicionar uma dezena.
Prof. Porquê? O que é que acontece daqui para aqui [Referindo-se da primeira coluna para a segunda]? É adicionar uma?...

Aluno 4: Unidade.
Aluno 5: Dezena.
Prof. ... uma unidade. Mas como acontece em...
Aluno 4: 10.
Prof. ... nos dez somamos uma?...
Aluno 4: Unidade.
Prof. Sim. Uma unidade. Mas como adicionamos uma aqui, uma aqui, uma aqui... uma em cada quadrado...
$A_{[vários]}$ Uma dezena.
Prof. ... equivale a adicionarmos uma?...
Aluno 4: Dezena. (A3-2, 10/03/2008)

Pediu em seguida aos alunos responsáveis para entregarem uma ficha com outras tarefas. A primeira consistiu em identificar o padrão que surge quando se realçam três números em diagonal, quer numa direcção quer noutra, como se mostra na Figura 43.

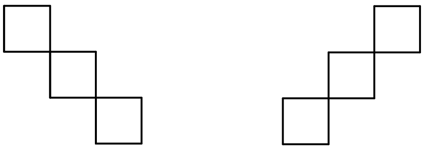


Figura 43. Identificação do padrão nos dois saltos em diagonal

Guilherme pediu aos alunos para sobreporem a grelha num local qualquer da sua tabela e registarem os números abrangidos, fazendo o mesmo no quadro com os números 46, 57 e 68. Vários alunos descobriram o padrão:

Prof. No número 1... O que acontece então do primeiro número para o segundo? Eu aqui coloquei do 46...
Aluno 1: Eu já sei. Acrescenta-se uma dezena e uma unidade.
Prof. Alto, atenção! O Aluno 1 respondeu aqui agora. O que é que acontece, Aluno 1?
Aluno 1: Acrescenta-se uma dezena e uma unidade.
Prof. Acrescentamos uma?...
Aluno 2: Dezena
Prof. ... dezena...
Aluno 2: E uma unidade.
Prof. ... e uma unidade. Ou seja...
Aluno 2: 11. (A3-2, 10/03/2008)

Os alunos foram então incentivados a dar a resposta por escrito na folha. No segundo caso pediu à aluna que explicasse no quadro aos colegas:

Prof. Vamos iniciar aqui no 5 [Pintando na tabela do quadro os números 5, 14 e 23]. Vamos lá estar atentos. Vá. No primeiro nós acrescentávamos uma dezena e uma unidade. Não é? E agora?
Aluna 4: Agora tiramos.

Prof. Aluna 4! Explica lá.
Aluna 4: Agora tiramos uma dezena e uma unidade.
Prof. Então vamos lá. Vens aqui explicar aos teus colegas. Anda lá. Rápido. Chiu! Toda a gente a pensar na segunda.
[A Aluna 4 caminha até ao quadro.]
[...]
Aluna 4: Na primeira nós acrescentávamos uma dezena e uma unidade.
Prof. Agora vamos a este.
Aluna 4: Agora tiramos.
Prof. Sim. E agora como é que fazemos?
Aluna 4: Estávamos no 23...
Prof. Não, não. Nós começamos aqui do 5. Do 5 para o 14 o que é que acontece? 5 para chegarmos a 14?...
Aluno 5: 9.
Prof. ... 9. Como é que nós podemos verificar aqui na nossa tabela? 5, se nós descermos uma linha vamos adicionar quanto? Se descermos uma linha adicionamos uma?...
A[vários] Dezena.
Prof. Uma?...
Aluna 4: Dezena que equivale a 10 unidades.
Prof. ... dezena. Mas depois o que é que nos fazemos? Uma dezena, depois para o 14 vamos adicionar ou vamos tirar uma unidade?
A[vários] Tirar. (A3-2, 10/03/2008)

Testaram depois o padrão em mais dados, pegando em números que os alunos tinham escolhido. Na terceira tarefa o esquema era o representado na Figura 44:

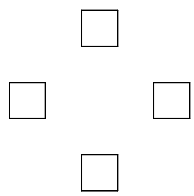


Figura 44. Identificação do padrão das relações entre os representantes - 1

Descobriram que, ao começar pelo de cima, avançava 22, depois mais 18, depois subtraía 22 e finalmente subtraia 18. Não foi fácil. Foram feitas experiências com outros números para confirmação. Guilherme optou por um trabalho em grande grupo mas aqui podia ter sido feito, com vantagem, um trabalho prévio. Do diário de campo em relação a esta tarefa:

> Guilherme podia ter posto os alunos a trabalhar individualmente ou a pares para terem mais tempo para pensar e descobrir por si fazendo só a síntese no fim. Falta pô-los a explicar mas só um de cada vez, dar-lhes mais autonomia, talvez marcar tempo, por exemplo 3 minutos para realizarem uma tarefa e deixá-los. (DC, 10/03/2008)

Esta questão foi debatida na reflexão e Guilherme concordou mas considerou que ainda tinha muitos outros desafios que queria explorar e queria ganhar tempo. De facto o tempo não chegou para fazerem todas as tarefas planificadas.

A quarta tarefa era semelhante e por isso os alunos, depois das anteriores, já tiveram maior facilidade em descobrir o padrão para o esquema da Figura 45:

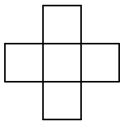


Figura 45. Identificação do padrão das relações entre os representantes - 2

Um aluno do 2.º ano foi à tabela no quadro explicar:

Prof. Explica lá, Aluno 6. Do 4 para o 13. [tinha assinalado na tabela do quadro os números 4, 13, 15 e 24.]
Aluno 6: 4 para o 13... Primeiro ao 4 somamos 10, mas depois tiramos 1 [Simulando ao mesmo tempo na tabela].
Prof. Exactamente. Ao descermos, aqui na nossa tabela, ao descermos, ao mudarmos de linha, ao descermos, nós aqui adicionamos quanto daqui [4] para aqui [14]?
Aluno 6: 10.
Prof. 10. Ou seja, uma?...
Aluno 6: Dezena.
Prof. ... dezena. E depois tiramos?...
Aluno 6: 1.
Prof. ... 1. Então do 4 para o 3 são mais?...
Aluno 6: E depois é a mesma coisa, só que se acrescenta 1 [Referindo-se à passagem do 13 para o 24].
Prof. Muito bem. Mais?...
Aluno 6: Aqui acrescentamos mais 1. É na mesma 10 mas acrescentamos mais 1.
Prof. Não. Daqui [13] para aqui [15].
Aluno 6: 2. Mais 2. Daqui [15] para aqui [25] vai 10, para o 25. Mas depois menos 1 e já está.
Prof. 2. Sim. (A3-2, 10/03/2008)

O último padrão, ilustrado na Figura 46, era o mais simples:

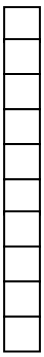


Figura 46. Identificação do padrão das relações entre os representantes - 3

Neste ponto a formadora, que já estava familiarizada com a turma, pediu ao professor para intervir e fez um pequeno teste oral a todos os alunos, um de cada vez, para ver se eles tinham assimilado este padrão útil para o cálculo mental: "Quanto é ___ + 10?" Confirmou-se pelas respostas rápidas de todos e na quase totalidade dos casos sem olhar para a tabela – como foi pedido – que os alunos se tinham apropriado da estratégia. Guilherme refere na reflexão da aula:

> Depois a professora tirou-me aqui estes 5 minutinhos ...[risos] Mas eles até acharam piada a professora ter participado na aula. [...] somar 20 é pior mas 10 já sabem todos. (RA3-2, 07/04/2008)

A última tarefa requeria que preenchessem os espaços em branco em vários excertos de tabela atendendo às relações entre os seus elementos, como se mostra como exemplo na Figura 47.

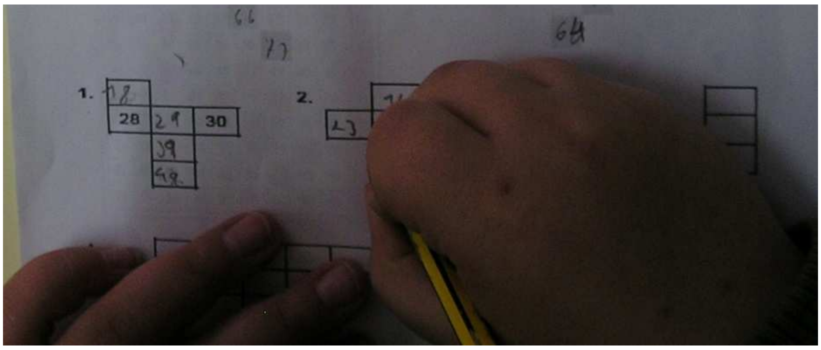


Figura 47. Excertos de tabela para preenchimento dos espaços em branco

Para a realização desta tarefa o professor retirou a tabela que estava afixada no quadro já que o objectivo era fazerem sem olhar para a tabela. Os alunos realizaram com entusiasmo este último desafio, que constava de várias figuras, que proporcionou, num contexto lúdico, a consolidação da compreensão dos padrões explorados. Tal como Guilherme refere no portefólio:

> A sessão estava a terminar, optei por saltar a actividade 2, realizando a actividade 3, por um lado, por se tratar de uma brincadeira com números e pelo facto de a grande maioria destes alunos adorar desafios, por outro, por ter sido um teste à compreensão dos alunos. Deste modo, os alunos vão-se envolvendo gradualmente na construção de partes de grelhas de números que, através de desafios intelectuais semelhantes aos de um jogo, finaliza num raciocínio que apela à generalização. (Por2, 03/07/2008)

A aula foi produtiva e os alunos estiveram muito empenhados no trabalho. Guilherme afirma na reflexão:

> Eles a brincar a brincar ainda acabaram por estar dez a treze minutos do intervalo e sem reclamar, sinal de que estiveram interessados. (RA3-2, 07/04/2008)

Quanto à planificação efectuada, reconhece que "peca sempre por excesso de actividades". (RA3-2, 07/04/2008). Mas defende que não é tempo perdido, já que o colega está suficientemente aberto às suas propostas para permitir a continuação do trabalho. Do portefólio:

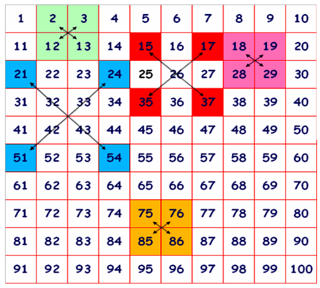
> Como referi na reflexão anterior, tenho por hábito idealizar diversas tarefas, mesmo quando o tempo não me parece ser suficiente para as realizar. Não o considero tempo perdido, muito pelo contrário. É que existe um óptimo entendimento com o colega titular da turma, na medida em que tenho total liberdade para aplicar as actividades que achar pertinentes fora do contexto da formação. (Por2, 03/07/2008)

Guilherme produziu tarefas muito interessantes para esta aula que trabalhou de forma muito satisfatória com os alunos, por forma a encaminhá-los num progressivo desenvolvimento do sentido do número e no despertar do pensamento algébrico. É um professor reflexivo e autocrítico, como se pode ver por mais este excerto:

> O objectivo principal destas actividades foi fazer com que os alunos sentissem algo mais, sentissem que o professor não deve em hipótese alguma dizer-lhes o que eles devem fazer, mas encaminhá-los na actividade por meio de questionamentos que os ajude a perceber a regra de formação da sequência. Confesso que, por vezes, não agi desta forma, pois fui longe demais e dei a resposta...
> A aposta numa diversidade de tarefas a propor aos alunos revelou-se importante. Nas tarefas de cunho investigativo/exploratório e nos problemas envolvendo generalizações, os alunos tiveram oportunidade de desenvolver gradualmente o seu pensamento algébrico.
> Estas actividades proporcionaram-me a experiência de perceber a profundidade e a responsabilidade do trabalho do professor face às mudanças que se julgam necessárias na sua forma de trabalhar. Estas pesquisas apontam a generalização como sendo um caminho para o pensamento algébrico. (Por2, 03/07/2008)

O trabalho realizado foi apresentado aos colegas do 1.º ano e 2.º ano na sessão conjunta de formação. A apresentação em *powerpoint* revelava grande qualidade técnica a nível gráfico e estético, e explicitava objectivos, processos matemáticos a desenvolver, temas trabalhados, recursos, formas de trabalho, as fases principais da aula com as tarefas propostas, ilustrando o trabalho dos alunos com fotografias e apresentando as principais conclusões.

Apresentam-se como exemplo duas tarefas, a primeira de descoberta de padrões – Figura 48 - e a segunda de raciocínio e mobilização do tema da simetria – Figura 49 –, que Guilherme tinha planificado e não chegou a desenvolver na aula descrita por falta de tempo, e que propôs como desafio aos colegas na apresentação.



Qual é a soma dos números diagonalmente opostos? Observas algo de particular nessa soma?

Figura 48. Excerto da apresentação do trabalho autónomo de Guilherme

Um quadrado do cem foi estampado em ambos os lados de uma folha, de tal modo que um quadrado está imediatamente atrás do outro. Qual será o número que está atrás do 100? E do 23? etc.

Figura 49. Novo excerto da apresentação do trabalho autónomo de Guilherme

É importante referir que a apresentação foi muito apreciada pelos colegas.

Guilherme, no que toca às suas impressões sobre o trabalho autónomo, refere na entrevista final que o achou de grande valor, principalmente pela reflexão e troca de experiências. Apresenta-se o seu testemunho escrito no portefólio:

> O trabalho autónomo resultou melhor do que no ano transacto, pois tratou-se de um trabalho mais reflexivo, que contribuiu para uma análise mais detalhada das nossas práticas, para a detecção e correcção de eventuais falhas e para incentivar os colegas, do primeiro ano de formação, presentes no momento da sua apresentação. O facto de propiciar troca de saberes leva a uma maior flexibilidade por parte do professor, da sua forma de pensar e de interagir. Esta estratégia implementada ao nível do trabalho autónomo também facilitou, em muito, a organização e elaboração deste documento. (Por2, 03/07/2008)

Por último, este trabalho foi também apresentado no seminário final da formação que decorreu em Julho desse ano na ESE de modo a permitir que todos os professores em formação do distrito pudessem ver os trabalhos e experiências dos colegas.

O acompanhamento em sala de aula

Guilherme considera também uma grande vantagem desta formação o acompanhamento em sala de aula, já que "obriga" o professor a aplicar realmente na prática o que recebe na formação não se limitando a ouvir:

> Sim. As formações... [noutra formação qualquer] é debitar a.... [a pessoa chega ali] ouve, quer escrever e escreve. [agora nesta] Julgo que influencia. Para mim positivamente. Os outros colegas também temos falado também acham... Para mim está a ser bastante vantajosa. (E2, 07/03/2007)

E mais tarde:

> Este tipo de formação não é daquela formação que a gente vem, fica numa sala e está ali... O facto de andarem em campo acho que é muito importante. Mesmo com a disponibilidade de materiais e tudo acho que é... (E3, 12/07/2007)

Guilherme faz aqui referência aos materiais adquiridos pelo Programa de formação no distrito e que foram disponibilizados aos professores e às escolas.

Quanto às suas impressões e sentimentos sobre a presença de uma pessoa exterior na aula, Guilherme entende que não lhe causou problemas, porque sendo mais jovem, está mais próximo da sua prática pedagógica, e também pelo facto de ter sido professor de apoio, o que o obriga a entrar em várias salas e estar em contacto com vários colegas:

> O acompanhamento das sessões, principalmente depois a reflexão sobre a aula... Eu por acaso fui sempre tomando nota dos pontos... Para mim foi do mais importante, embora muita gente achasse ou começassem a temer pela observação. Eu nesse aspecto estou à-vontade. Claro que há sempre aquele nervoso... [...] E se calhar há muito tempo que não passavam por uma observação directa. E o facto também de andar de sala em... a dar apoio nas duas salas também já estou mais [habituado]. (E3, 07/03/2007)

Relação com a formadora. Guilherme sempre se sentiu à-vontade com a formadora, aceitando-a como pessoa mais velha e experiente com quem podia conversar esclarecendo e problematizando algumas questões e envolvendo-o de forma responsável:

> E a questão da entre aspas fiscalização (risos) [eu estou a dizer a brincar] também é muito importante... não, no sentido de a gente poder até questionar e... Mas responsabiliza um bocado a pessoa, e podermos tirar alguma dúvida e esclarecer. (E4, 03/12/2007)

e também como incentivo e motivação para o trabalho, para si e para os alunos:

> A formadora esteve sempre atenta e disponível [...] A presença da professora, da professora de matemática como eles dizem, foi bastante motivadora para os alunos e para mim também. (E3, 12/07/2007)

E, no fim do segundo ano:

> A formadora [foi importante] pelo conhecimento e as dicas que foi dando, pela dinâmica que foi introduzindo no programa e na formação, na valorização profissional e da disciplina. (E6, 15/07/2008)

Guilherme refere que a presença da formadora era bem acolhida pelos alunos, quer num ano quer noutro, o que foi também notório para a formadora, que se sentiu sempre muito bem recebida nas turmas.

No final dos trabalhos, e referindo-se à sua colaboração com a formadora no seu estudo de doutoramento, Guilherme comentou que essa colaboração foi mais uma oportunidade para troca de ideias e um enriquecimento pessoal e profissional maior.

A reflexão

No fim de cada aula observada era feita uma reflexão individual com a formadora sobre aspectos relevantes da aula. Guilherme valorizava estes momentos pois sentia algumas inseguranças devido à sua pouca experiência e considerava que podia aprender com as indicações da formadora:

> É bastante boa e o facto de depois termos um *feedback* em relação àquilo que a gente fez de bem ou de mal, acho que é óptimo. [...] E eu vou apontando sempre, o que posso eu vou apontando. O que esteve menos bem eu vou apontando. [...] A gente não tendo um *feedback* de alguém que esteja mais dentro do assunto e que nos diga: «Isto podia ter sido assim ou assado» a gente se calhar ia julgar que... bem, estava tudo bem. (E2, 07/03/2007)

Esta reflexão sobre a aula era depois continuada e completada no grupo de formação.

No fim da formação considerou este aspecto da reflexão, sobretudo com a formadora, o mais importante do programa, já que lhe permitia aperceber-se melhor de alguns pormenores da aula, fazer uma avaliação da sua própria actividade docente tomando consciência de certos aspectos que procurava melhorar em momentos seguintes:

> [...] o facto de ter detectado potencialidades e fragilidades, fruto dessa reflexão. (E6, 15/07/2008)

> E depois reflectir sobre as minhas aulas. [...] Mas, quer dizer, uns apontamentos ainda fiz em relação ao questionamento... Por vezes questionar e já com a resposta. (E6, 15/07/2008)

Guilherme refere-se ao facto de por vezes utilizar ou dar demasiadas pistas para a resposta na própria pergunta formulada aos alunos. Estes aspectos do questionamento foram bastante abordados na formação.

Aponta também de modo interessante a reflexão como fonte de conhecimento:

> E depois o professor deverá ser sempre reflexivo. E acho que foi das coisas... [...] em termos de formação o facto de a gente fazer a reflexão, de partilharmos, só assim é que a gente chega ao conhecimento. (E6, 15/07/2008)

Aqui Guilherme faz um pouco a ponte com a sua própria reflexão pessoal em torno dos conteúdos da formação, o que lhe dava pistas para a prática. Por exemplo, como ele afirma: "Aquele texto da comunicação, várias vezes o li." (E6, 15/07/2008)

O portefólio. Este tipo de trabalho era novidade para Guilherme, que confessou que nunca antes tinha feito nenhum. Esse aspecto de novidade, aliado ao facto de ter ouvido referências a esta forma de organização por parte de familiares, deu-lhe incentivo para a sua realização. A elaboração do portefólio foi conduzida por Guilherme com cuidado e empenho, embora tenha tido um percalço técnico no primeiro ano, já que perdeu todo o trabalho entretanto realizado já quase no fim da sua elaboração. Em ambos os anos, apresenta no portefólio, de forma pormenorizada, duas das tarefas desenvolvidas com os alunos, as suas reacções e o trabalho, êxitos e dificuldades dos alunos. Apresenta também uma reflexão pessoal sobre o trabalho por si realizado, pontos fortes e fracos, e uma avaliação geral da formação nas suas várias vertentes. Quando lhe foi pedida uma hierarquização das vertentes da formação em termos de importância atribuída coloca o portefólio no último lugar. Em conversa reconhece depois que o fez porque tinha que colocar algum mas não querendo com isso tirar-lhe valor, até porque gostou de o fazer e reconhece-lhe utilidade:

> Coloquei aqui o portefólio no final, mas fui um bocadinho injusto até comigo próprio. [Até gostei de o fazer]. Não, porque vou recorrer a ele e já o do ano passado... Se bem que o do ano passado

> não foi… Eu tinha um portefólio deste género e depois o tempo que tive para fazer já me fugiu[14]. Este ano não. Já deu para investigar, já deu para procurar um bocadinho. (E6, 15/07/2008)

Refere ainda, em várias ocasiões, que a elaboração do portefólio foi mais uma oportunidade para reflectir sobre as suas práticas.

A partilha de experiências

Guilherme dá bastante realce à partilha de experiências e sobretudo de materiais para a sala de aula. Na escola onde trabalhava no primeiro ano os colegas trabalham em grupo e partilham experiências, por influência da formação, já que a grande maioria frequenta o programa[15]:

> Até porque o grupo lá até funcionamos bem, o facto de estarmos a trocar sempre impressões e fazer isto e aquilo desta forma. Para mim tem sido óptimo. (E2, 07/03/2007)

Propõe a esses colegas, e consegue concretizar, a elaboração de uma base de dados de materiais e recursos para a sala de aula utilizados, em formato electrónico, acessível a todos.

> Na escola temos. Ainda anteontem estive a organizar as coisas todas deste ano, fotografias e tudo e temos lá uma pastinha «Formação Matemática» e depois temos «1.ª aula da ..., 2.ª...» Pronto. As aulas de toda a gente temos lá. E cada um vai lá e recolhe tudo: fotografias se quiserem, ou os materiais… Temos lá as aulas todas. Porque parecendo que não é… dá já uma ajuda. (E3, 12/07/2007)

Chega a fazer a mesma proposta ao grupo de formação o que não foi concretizado por inércia. Este facto foi lamentado no final do ano no portefólio:

> Foi um prazer elaborar e reunir tamanha quantidade de materiais, produzidos pelo grupo da nossa escola. Foi criada uma pasta num computador para que cada uma colocasse o seu trabalho e respectivo material. Ainda colocámos essa hipótese aos restantes colegas participantes na formação, mas… não se chegou a um consenso. Poderá ser algo a pensar no futuro, pois são materiais que, de certa forma, nos vão ajudar para a sua abordagem em sala de aula, mas acima de tudo, vão com certeza motivar os nossos alunos pelo gosto pela matemática. (Por1, 05/07/2007)

---

[14] Refere-se ao problema técnico já mencionado que lhe fez perder o trabalho.

[15] Guilherme e Ana trabalham, neste primeiro ano, na mesma escola.

Há mesmo uma tarefa, a caixa mágica, que Guilherme usou com sucesso nas suas aulas e que foi inspirada por uma apresentação de duas colegas relativamente ao seu trabalho autónomo. O professor realçou este aspecto da partilha de experiências que foi para ele vantajoso e enriquecedor, afirmando:

> Por exemplo, a caixa mágica foi um… [fruto da partilha de experiências]. E acabou por ser um recurso muito interessante e motivador para os alunos. […] A partir dali também uma pessoa tenta criar outro que vá de encontro… que permita o mesmo trabalho. Se calhar com outra forma… (E6, 15/07/2008)

Considera sempre uma mais valia ouvir os colegas no grupo de formação: "E tem colegas com mais experiência… para mim tem sido óptimo." (E2, 07/03/2007)

Reflexos do Programa de formação

Nesta secção reúnem-se e sintetizam-se alguns aspectos do impacto do programa de formação em Guilherme em relação ao conhecimento matemático e didáctico e à prática de sala de aula, às perspectivas do professor acerca da matemática e do seu ensino e às atitudes e aprendizagens dos alunos, focando-se por fim os aspectos menos conseguidos e as perspectivas para o futuro.

No conhecimento matemático e didáctico e na prática de sala de aula

Neste ponto procura-se fazer uma síntese das evidências do aprofundamento do conhecimento matemático e didáctico deste professor que ocorreu ao longo dos dois anos de formação. Entremeiam-se as afirmações do professor no decurso das entrevistas com as observações da investigadora e os dados obtidos por registo vídeo das aulas já apresentados anteriormente. Esta opção de analisar o conhecimento do professor essencialmente em situação de sala de aula está de acordo com a visão de Ball et al. (2001) quando afirmam que a prática tem de ser o centro da investigação de modo a poder desvendar o uso do conhecimento que não é visível quer através dos cursos frequentados quer mesmo através do estudo do que o professor sabe. É necessária uma visão do conhecimento matemático e didáctico no contexto de ensino.

Guilherme considera que a formação lhe deu oportunidade de activar, refrescar, os conteúdos matemáticos de forma a investir na planificação de aulas. No fim do primeiro ano:

> Eu nesse aspecto não sou muito do *copy* e *paste*. Não. Ou a própria fotocópia. Eu... [investi na preparação das aulas]. Sim, sim. Eu passo imenso tempo ao computador a preparar. (E3, 07/03/2007)

E, retomando a mesma ideia, no fim do segundo ano:

> Ai, muito útil porque além de rever e de ir buscar todo esse... algum do conhecimento que tinha... digamos que completou e mesmo ao nível da preparação das aulas, da planificação das aulas, já houve outro cuidado. E o facto de termos falado em tudo isso e termos aqueles textos de apoio também me levou a uma melhor planificação do trabalho. (E6, 15/07/2008)

Estas afirmações de Guilherme estão em conformidade com a sua atitude de empenho durante as sessões de formação, em que procurava apropriar-se de todas as informações e propostas de trabalho, tomando notas e organizando tudo para futura consulta, e do seu trabalho posterior de pesquisa individual, em que procurava tópicos tratados na formação de modo a aprofundar e enriquecer o seu conhecimento e consequentemente as propostas para a sala de aula.

Equaciona a sua evolução através do contacto com várias estratégias de ensino, do seu empenho na recolha de materiais, na própria dinamização da aula, e mais uma vez compara a formação contínua com a formação inicial:

> E acho que a formação... E foi das coisas que eu apontei. A formação, além de me dar várias formas de trabalhar os conteúdos, também me proporcionou foi... A mim não. Aos alunos. Deu uma oportunidade de proporcionar aos alunos várias formas de trabalhar um conteúdo, que a gente por vezes não tem a noção... Por exemplo, no ano passado, para mim, os dominós foi uma novidade. (E6, 15/07/2008)
>
> Ai, eu acho que [evoluí] bastante, embora sinta que ainda tenho muito mas muito que trabalhar ao nível da matemática. Até porque o percurso académico foi o que foi e [...] a matemática acho que poderia ter sido outra... Por exemplo, o que estamos a trabalhar a nível de formação acho que seria óptimo. Aprender a ensinar, ou seja, trabalhar as formas de trabalharmos, de dinamizarmos, de prepararmos as actividades, a planificação. Acho que nunca tive trabalho em termos da matemática em si. (E6, 15/07/2008)

Uma preocupação notória deste professor, que reflecte a sua caminhada num maior domínio do conhecimento matemático, é a de usar terminologia matemática correcta. Na contextualização inicial dos tópicos apresenta e explica o significado e conteúdo dos novos termos, recorrendo por vezes a enredos motivadores. Veja-se o exemplo da introdução dos termos *sequência*, *repetição*, *regularidade*, *padrão*. Depois da nova informação, ajuda os alunos a desenvolver uma compreensão mais alargada dessa nova informação. Por exemplo, na aula sobre o dinheiro, deu algumas informações iniciais no âmbito do tópico e propôs de seguida tarefas com o uso de notas e moedas que procuravam familiarizar os alunos com o tema para prosseguir e apoiar outra tarefa de decomposição numérica em que o dinheiro servia de contexto concreto mas que tinha um alcance muito maior, de composição e decomposição de modo a promover o sentido do número.

Outro aspecto importante é o incentivo à formulação de conjecturas, por exemplo na aula em que explora a tabela dos cem, quando questiona a diferença entre a soma de cada linha e da anterior. No entanto, não pede a justificação para a conjectura formulada, que era acessível aos alunos: a diferença é cem porque há dez números que diferem de dez unidades. Esta falha reflecte provavelmente uma certa inexperiência e a não interiorização da importância do processo matemático de justificação.

Valorizando de modo impressivo o cálculo mental, que os alunos manifestamente não possuíam, Guilherme opta pelo ensino explícito de algumas estratégias, como as que se apoiam nas regularidades descobertas na tabela dos cem e também o método de Gauss de soma de números consecutivos, utilizando implicitamente neste caso a propriedade associativa da adição. Este uso de estratégias facilitou e ajudou os alunos a flexibilizar o seu trabalho com os números.

A reflexão é o aspecto que Guilherme mais salienta, e aliás colocou em primeiro lugar quando lhe foi pedida uma hierarquização da importância das várias componentes da formação no final do segundo ano. Esta reflexão com a formadora, e depois pessoal, é consequência directa do acompanhamento em sala de aula. Justifica essa escolha por considerar que tem implicações directas no seu futuro próximo, por lhe indicar os pontos a trabalhar a seguir. Identifica mesmo a reflexão como uma fonte de conhecimento. Refere ainda o contributo para essa reflexão dado pelo visionamento das suas aulas *a posteriori* no registo vídeo:

> Por ordem ... [o que valorizo mais é] a reflexão. Acho que a reflexão sobre a prática, sobre as aulas foi bastante importante. Aquela folhinha que a professora me facultou... Eu depois ao ver o DVD é que me apercebi. O facto de por vezes estar a fazer o questionamento e já dar ali uma pista ou... Pronto. Fui detectando pequenas coisas que... Claro que são e têm que ser para alterar. [...] Há aqui muita coisa a mudar. (E6, 15/07/2008)

Guilherme concorda que o facto de ter trabalhado teoricamente um tema nas sessões de formação lhe fornece pistas para o trabalho e simultaneamente lhe dá maior à-vontade e flexibilidade para o seu tratamento com os alunos.

> Mas as aulas sim. Os temas que abordámos, aqueles textos de apoio que a gente teve sempre e a partir daí trabalharmos as várias actividades ou termos acesso a actividades para trabalharmos esse conteúdo. [...] E na prática sim. Houve muita coisa que foi mudando, na forma de abordar o assunto, as coisas que me foram transmitidas... (E6, 15/07/2008)

Contudo este professor tem dificuldade em apresentar exemplos concretos que possam evidenciar a sua maior facilidade no tratamento dos temas pois não possui termo de comparação com o passado. De qualquer modo no segundo ano de formação mostra-se contente com o trabalho que realizou considerando que a experiência do ano anterior já lhe foi útil: "Foi mais um aninho de trabalho. Em termos de eficácia..." (E6, 15/07/2008)

Há também uma tendência genérica para ser um pouco directivo, não dando aos alunos por vezes o tempo suficiente para fazerem as suas descobertas. Este facto pode dever-se a não ser o professor titular da turma, tendo assim uma maior dificuldade em fazer os alunos respeitar as regras do trabalho de grupo, acrescido do facto de lidar, durante o segundo ano, com uma turma muito difícil, tanto em termos de comportamento como de aproveitamento.

Apresentam-se de seguida alguns episódios de uma aula no final do segundo ano, em que foram abordados conceitos numéricos, mas numa perspectiva de desenvolvimento e aplicação de estratégias já trabalhadas anteriormente, em que Guilherme trabalhou o dinheiro. Começou por apresentar o euro, explicar ou recordar para os do 3.º ano como e quando surgiu, quais os países que aderiram, qual o valor da moeda antiga, o escudo, face ao euro. Ainda falou de outras moedas como a peseta e o franco. Explicou as características das notas e moedas sumariamente e disse que noutra ocasião iriam trabalhar um texto sobre isso. Apresentou e colou no quadro com *post it* as notas e ampliações das moedas, e os alunos destacaram das últimas páginas do livro esse material para cada um. Mas a tarefa mais interessante foi realizada através de uma ficha onde na primeira coluna era anunciada uma quantia e os alunos teriam que descobrir como perfazer essa quantia com moedas de 1 e 2 euros e notas de 5 euros. Ao pensarem como perfazer a quantia de 3, 7, 11, 14, 15, 18, 20, 25, 26 euros com 1, 2 e 5 euros os alunos tiveram oportunidade, além de conhecer melhor o dinheiro, de fazer decomposições numéricas. Alguns precisavam muito de utilizar as suas próprias notas e moedas que foram destacadas do manual. Guilherme quis trabalhar um dos tópicos do programa, familiarizando os alunos com o dinheiro e o valor das diferentes notas e moedas. Mas não se ficou por aí. Soube aproveitar o recurso ao dinheiro para proporcionar tarefas ricas de âmbito numérico. No entanto, aceitava apenas uma solução. Por sugestão da formadora dentro da própria sala de aula, os alunos, pelo menos os que realizavam as tarefas mais rapidamente, começaram a procurar todas as maneiras de perfazer essa quantia. Do relatório: "O facto de terem de arranjar diferentes decomposições permitiu flexibilizar o raciocínio e desenvolver o cálculo mental" (Rel A5-2, 06/06/2008). Na Figura 50 pode ver-se a aluna a utilizar uma cor diferente para uma segunda hipótese:

Figura 50. Hipóteses de perfazer uma quantia com 1, 2 e 5 euros

Guilherme aceitou a sugestão embora na reflexão se tenha queixado do seu inimigo de sempre, o tempo, que não lhe permite concluir todas as tarefas que planifica, nomeadamente neste caso alguns problemas ligados ao dinheiro, como mostra o seguinte excerto da reflexão:

Inv. E havia muitas hipóteses que no fundo têm a ver com esta decomposição. E por isso é que lhe sugeri para fazer várias, porque acho que é mais rico do que pôr só uma. Para eles se aperceberem que há muitas maneiras de chegar ao mesmo número.

Prof. Não. Mas isso depois... acabava por vir na outra.

Inv. Tinha à frente. Pois.

Prof. Mas realmente o tempo é...

Inv. O tempo é curto.

Prof. Tem piada que quando a gente arranja assim... quando tem que arranjar para uma tarde, acaba... acha sempre que é muito tempo e depois anda a reclamar quando as aulas são de uma hora. Mas eu, por acaso, não me importo que sejam de mais [de uma hora].

Inv. Pois. Foi pouco tempo, foi.

Prof. Mas isto agora eles...

Inv. Agora continua o trabalho. (RA5-2, 06/06/2008)

No entanto, há alunos com muitas dificuldades na tarefa. Para tentar apoiá-los Guilherme faz uma simulação de pagamentos em que os alunos devem utilizar as suas notas e moedas, como se pode verificar pelo seguinte excerto da aula:

Prof. Pronto. Vai fazendo aquele exercício. [Virando-se para o Aluno 1] Tens que me dar 11 euros. Tens que me dar 11 euros. 11 euros. Ora vê lá. Conta. Quantos tem aqui? 5 mais 5?...
Aluno 1: 10.
Prof. ... 10. Tens que me dar 11. 10... Quantos faltam aqui? Aluno 1! Aqui tem 10 euros. Tens que me dar 11. Quantos euros faltam? Pensa. Aluno 1! Tens 10, para chegar ao 11 falta?... Exacto. Pronto. Tens que me dar 11. Já me deste aqui 10. Quanto falta? 1. Então uma de 1 euro. Então assinala ali. Quantas notas dás?
Aluno 1: Duas.
Prof. Duas notas de 5 e uma moeda de 1. Muito bem. Vá. Agora tens que me dar quanto?
Aluno 1: 14.
Prof. Pronto. É favor de me pagar os 14 euros. Aluno 2! Eu quero 14. Conta. 5, 5... Vá. Mais. 10 mais?... Aluno 2! Tu tens que me dar 14. Estás-me a dar 15! Quantos tem aí? Conta. A? Conta tudo. Conta tudo. 10. 10 mais 2?...
Aluno 2: 12.
Prof. 12. E eu quero 14. Quantos faltam?
Aluno 2: 2.
Prof. Ah! Então passa para cá. Então... Muito bem. Então agora assinalas ali no teu quadro. (A5-2, 06/06/2008)

Foi comentado na reflexão que hoje em dia as crianças já não vão às compras pelo que não têm o menor contacto com o dinheiro.

Guilherme escolhe como as tarefas que mais gostou de realizar aquelas que se apoiam na tabela dos cem pois considera esta representação particularmente interessante e eficaz quer para o reconhecimento de padrões e formulação de generalizações quer para o desenvolvimento do cálculo mental. Valorizou também a importância da diversidade de temas matemáticos que puderam ser trabalhados com este recurso: para além do cálculo mental e dos padrões, referiu as estimativas, as operações, os algoritmos. Foi uma representação que revisitou já que achou que da primeira vez o tempo não foi suficiente e sobretudo que a tabela é passível de permitir novas explorações. Ao fazer pesquisas sobre o assunto foi encontrando outras tarefas de que gostou e que quis experimentar.

Em termos de objectivo de aula eu acho que o trabalharmos a capacidade de abstracção, o próprio pensamento algébrico, eu acho que foi das actividades mais engraçadas de trabalhar com eles. Eles também gostaram. [Aquele reconhecimento de padrões que lhes dava] facilidade para o cálculo mental. (E6, 15/07/2008)

Verifica que o facto de ter retomado o trabalho com o mesmo recurso e dentro de moldes semelhantes foi importante e útil por permitir a melhor apropriação e consolidação dos procedimentos e processos matemáticos em jogo. Mesmo mais tarde continua com vontade de pesquisar mais para continuar a usar no futuro:

> E acho que ainda há ali muitas mais coisas que se pode fazer, muito mais trabalho que se pode realizar com o quadrado. Espero conseguir mais umas... (E6, 15/07/2008)

Guilherme reconhece no fim da formação as virtualidades do programa que tiveram reflexos na prática de sala de aula:

> O programa de formação proporcionou um maior conhecimento matemático e didáctico e um aperfeiçoamento de métodos, materiais, destrezas comunicativas e avaliativas. (Por2, 03/07/2008)

O desenvolvimento do pensamento algébrico. Procurar-se-á apresentar evidência do desenvolvimento do pensamento algébrico à luz do percurso de *algebrização* da experiência matemática dos alunos recomendado por Blanton & Kaput (2003), descrito pormenorizadamente no Capítulo 3, e concretizado pela categorização de formas de pensamento algébrico de Blanton & Kaput (2005). Escolheu-se em particular para esta síntese o trabalho autónomo, sem prejuízo do restante trabalho de Guilherme ao longo destes dois anos, pois julga-se que aquele, pelas suas características, aproxima-se do seu estilo de ensino, dos seus gostos e interesses, daquilo que reputa de fundamental na sua prática lectiva. Por outro lado, foi um trabalho sujeito a uma reflexão e apresentação mais cuidada. Por estas características tornou-se assim um trabalho de referência do professor, que se pensa poder exprimir de forma significativa o seu sentir na profissão, em particular no ensino da matemática, através das abordagens, tarefas e recursos escolhidos e implementados. Deste modo, pode iluminar melhor a evolução do seu conhecimento matemático e didáctico, pela interpretação do conteúdo das sessões conjuntas de formação e a sua implementação na sala de aula, com as adaptações pessoais que entendeu fazer.

O trabalho autónomo de Guilherme baseou-se na descoberta e generalização de padrões na tabela dos cem. Para isso recorreu ainda ao uso de estratégias de cálculo, quer mental quer escrito, para o cálculo de somas necessárias à identificação de determinados padrões. Por exemplo, para procurarem uma relação entre as somas das sucessivas linhas da tabela dos cem, havia que previamente calcular essas somas, o que por si só era já um trabalho exigindo esforço e persistência. Para esse cálculo houve um ensino explícito de uma estratégia elegante e eficaz – o método de Gauss, que proporcionou o estabelecimento de relações entre números e de propriedades da adição. Este cálculo das somas das sucessivas linhas permitiu a identificação de um padrão – a soma de cada linha era de mais cem unidades que a soma da linha anterior. Neste caso Guilherme não pediu aos alunos a justificação da regularidade encontrada. Contudo, esta justificação foi pedida para a soma das sucessivas colunas. Para essa justificação, os alunos usaram generalizações já efectuadas para construir novas generalizações, num processo mais sofisticado de pensamento algébrico (Blanton & Kaput, 2005) – o facto de cada célula aumentar uma unidade para a direita faz com que a soma da coluna aumente dez unidades para a coluna da direita, já que cada coluna é formada por dez células. O segundo conjunto de tarefas, com a apresentação de várias grelhas diferentes correspondendo a conjuntos de células da tabela dos cem, envolve um maior grau de abstracção. Exige-se aqui a análise de relações, já não propriamente entre números concretos mas entre células que funcionam como representantes de qualquer número. Esta detecção da estrutura na disposição dos números na tabela permite predizer, generalizar e justificar, processos típicos do pensamento algébrico nos primeiros anos (Kieran, 2004). O trabalho iniciou-se numa base concreta, já que Guilherme sugeriu aos alunos que sobrepusessem a grelha num local qualquer da sua tabela e registassem os números abrangidos, de modo a facilitar a descoberta das relações numéricas respectivas. No entanto, esse procedimento foi sendo progressivamente abandonado, à medida que iam sendo encontrados e interiorizados padrões e relações numéricas e à medida que evoluíam de umas grelhas para outras novas. Por último foi realizado um jogo que consistia no preenchimento de espaços em branco num excerto de tabela com apenas uma célula preenchida, o que exigia o conhecimento das relações entre elementos de células vizinhas. Registam-se na Tabela 7 as várias categorias de pensamento algébrico observadas na aula de trabalho autónomo de Guilherme.

Tabela 7: *Ocorrências de formas de pensamento algébrico na aula de trabalho autónomo de Guilherme*

Categoria	
A	Preenchimento de espaços em branco num excerto de tabela.
B	Uso da propriedade associativa no cálculo das somas de linhas pelo método de Gauss.
C	Relacionamento entre células como representantes de qualquer número na tabela dos cem e descrição das relações encontradas.
F	Descoberta de relações entre elementos da tabela e, particularmente, entre somas de linhas sucessivas e de colunas sucessivas.
G	Conjectura sobre a soma da 5.ª linha por análise das somas das duas primeiras linhas.
H	Descoberta de uma grande variedade de padrões numéricos na tabela dos cem.
I	Descoberta de que o facto de cada célula aumentar uma unidade para a direita faz com que a soma da coluna aumente dez unidades para a coluna da direita, já que cada coluna é formada por dez células.
J	Apresentação oral do seu raciocínio. Discussão e debate com o professor e entre colegas.

Foi usada a tabela dos cem como ferramenta de apoio ao pensamento algébrico. Foram descobertas pelos alunos e também sugeridas pelo professor estratégias úteis de cálculo mental. A grelhas utilizadas foram uma forma de representação eficaz para a descoberta de padrões e relações numéricas. A preocupação de que os alunos fizessem os seus próprios registos e posteriormente o registo feito no quadro ajudou a promover a compreensão dos conceitos matemáticos em jogo.

Nas perspectivas do professor sobre a matemática e o seu ensino

Dada a sua pouca experiência de ensino, Guilherme valoriza essencialmente, no início da formação, a recolha de materiais de vária ordem e fá-lo com grande empenhamento e entusiasmo. Como é uma pessoa muito organizada, gosta de guardar em pastas tudo aquilo que vai recolhendo, quer se trate de propostas feitas nas sessões conjuntas de formação, de textos de apoio sobre conhecimento matemático ou didáctico também fornecidos, de experiências partilhadas por colegas, de pesquisas feitas genericamente na Internet ou no *site* do programa de formação, onde foram sendo colocados os materiais trabalhados nas sessões.

> Porque está ali muita informação. Que a gente fala, não trabalha no momento mas um dia mais tarde quer trabalhar determinada coisa e… tem sempre ali umas referências. Eu vou tomando nota. Até passo sempre o sumariozinho e tudo para saber a quantas ando. (E2, 07/03/2007)

Na escola lança também a ideia de fazerem uma base de dados de materiais que ele próprio gere e organiza de forma que todos os colegas tenham acesso.

No meio do primeiro ano, fazendo um balanço do que tem sido para si o Programa até ao momento, o professor faz o paralelo com a sua formação inicial afirmando:

> Óptimo. Se calhar, aquilo... E falo e até já tenho falado com as colegas. Pelas aulas, pela formação, aquilo que a gente tem falado e as formas, as estratégias que a gente pode utilizar para trabalhar esses conteúdos, possivelmente seria o ideal tê-lo no... tê-lo tido no... na matemática no curso. Mal daquele que termina o curso e julga-se sabedor... (E2, 07/03/2007)

Deste modo reconhece a insuficiência da formação inicial e verifica a importância da formação contínua.

Confessa que tem abdicado de outras actividades pessoais para poder dedicar-se melhor: "Não me convém porque estou na formação." (E2, 07/03/2007)

Valoriza aquilo que aprendeu nas sessões de formação por lhe dar ideias diferentes para trabalhar com os alunos. Considera que uma das suas dificuldades essenciais no dia-a-dia é a selecção de tarefas – o como trabalhar os tópicos do programa – e que aí a formação lhe deu inúmeras pistas que pode utilizar na prática:

> Porque uma das dificuldades que eu senti foi a escolha do tema a trabalhar, o conteúdo a trabalhar na minha aula e as sessões, o facto de ter sugerido alguns deles foi útil. (E3, 12/07/2007)

Guilherme sente-se motivado para ser um bom professor do 1.º ciclo. Dedica muito tempo a pensar nos alunos pessoalmente. Mesmo nas entrevistas realizadas revê-os um a um e vai comentando os seus progressos e o que será possível fazer para os ajudar.

Guilherme considera, no final da formação, que um bom professor de matemática tem de ter em primeiro lugar conhecimento da matéria, mas que esse aspecto, embora necessário, não é suficiente. Tem de ter um bom desempenho didáctico, no aspecto de saber levar os alunos a pensar e a discutir, criando uma dinâmica de sala de aula de indagação e participação, sendo também capaz de reflectir sobre a sua prática:

> Um bom domínio ao nível dos conteúdos da matemática. O que não significa que depois em termos da didáctica no trabalho com os alunos se reflicta. [...] Eu acho que a prática em si ou a forma de trabalhar acho... [...] colocar os miúdos a pensarem, a decidirem dois a dois, seja em grupo, a darem opinião, a reverem [...]. E depois reflectir sobre as minhas aulas. (E6, 15/07/2008)

Valoriza ainda a necessidade da compreensão por parte dos alunos dos algoritmos e procedimentos e a preparação de tarefas interessantes que desenvolvam o raciocínio dos alunos (REE6, 15/07/2008)

Além disso, e aqui novamente por influência do colega com quem trabalhou, reflecte sobre as qualidades humanas de dinamismo, criatividade e tolerância do professor, e sobre a necessidade de levar as crianças a ultrapassar determinados preconceitos culturais contra a disciplina:

> E um bom professor, independentemente de ser de matemática, acho que tem que ter muita tolerância, muita digamos que pachorra para aturar esta malta. Porque é complicado. É complicado. Acho que… E a criatividade, porque se a gente não cativar… e em especial a matemática. Nem toda a gente está disposta, ou pelo menos olham para a matemática como… Quer dizer, não se vê tanto, mas ainda há miúdos a olharem para a matemática como… a matemática! … (E6, 15/07/2008)

E reconhece que evoluiu ao longo da formação, não propriamente no gosto pela matemática uma vez que já o tinha, mas no espírito de pesquisa, na capacidade de reflexão e na familiaridade com os temas:

> Bem, o gosto, eu já gostava da matemática. Não foi… Aumentou, claro, o bichinho da pesquisa, a reflexão em torno das aulas, o à-vontade… Também me trouxe. (E6, 15/07/2008)

Na sua caracterização de um bom aluno a matemática, Guilherme mostra preferir o termo estudante, retratando alguém que desenvolva o treino, mas também a compreensão e aplicação de conceitos:

> Deverá ser um estudante de matemática e não apenas um aluno de matemática, porque a matemática requer muito treino, muita prática. Eu acho que não chega ser um aluno a matemática, mas sim um estudante, um estudioso, pelo menos praticante. [...] Ora, um aluno que compreenda os conceitos. E que saiba utilizá-los. (E6, 15/07/2008)

E ainda, no registo escrito: "É aquele que sabe utilizar a teoria para formular hipóteses, justificá-las e resolver problemas." (REE6, 15/07/2008)

A imagem redutora da matemática enquanto meramente disciplina de cálculo que este professor possuía no início da formação foi assim dando lugar à ideia dum campo muito mais abrangente em que além do cálculo tem de haver compreensão, utilização de ideias e raciocínios noutras situações e resolução de problemas.

Guilherme, como já foi referido, é um professor com pouca experiência e tem a noção de possuir algumas deficiências na sua formação de modo que a sua postura é de receptividade e abertura a contributos à construção da sua identidade profissional como professor do 1.º ciclo. Neste aspecto, além da formação, é notória a influência do professor titular da turma no segundo ano de formação, com quem Guilherme considera ter tido grande sorte em ter podido trabalhar em par pedagógico e com quem confessa ter aprendido muito. Esse professor também manifesta uma boa impressão sobre o programa de formação em matemática:

> Eu tenho a melhor das impressões relativamente ao trabalho que está a ser feito com a formação e particularmente relativamente àquilo que o Guilherme tem estado a fazer. Conversamos sempre, ele é que faz a proposta, e depois logo vemos da oportunidade ou da pertinência daquilo que ele propõe. Nunca houve necessidade de alterar a proposta porque sempre entendi essas propostas como um reforço doutro tipo de actividades que se vão desenvolvendo. A mim pessoalmente aquilo que ele propôs nunca surgiu como uma grande surpresa porque os conteúdos que ele propunha já eram por nós trabalhados no âmbito do movimento da escola moderna. Agora ele propôs foi novas estratégias. Mas foi importante eu estar por dentro do conteúdo para poder apoiar e ajudar e digo isso particularmente porque a turma é difícil. (EPTT, 06/06/2008)

Guilherme é um professor empenhado, curioso e envolvido nos projectos das escolas onde trabalha. Também esse aspecto é realçado pelo professor titular da turma do segundo ano, que faz na sua apreciação um reparo pertinente que tem a ver com uma grande preocupação de Guilherme pelos instrumentos de trabalho e uma necessidade de aprofundamento do uso da palavra para a ultrapassagem de situações com turmas difíceis, o que deverá vir a acontecer como resultado da experiência:

> E ganhou gosto, é verdade [pela matemática] [...] é empenhado, é organizado, é sensível, tem muito boa relação com os miúdos...aliás eu costumo dizer sempre que faço um bocado de avô general e... [risos] É, e vamos equilibrando. Mas isso é assumido, eles acham natural respeitar esta diferença etária [...] O Guilherme preocupa-se muito com os instrumentos e eu tenho procurado passar-lhe que os instrumentos são muito importantes mas o sucesso do nosso trabalho não passa apenas pelos instrumentos, é preciso usar a palavra... [...] há questões que se colocam na sala de aula com estas crianças, de relação, que só podem ser resolvidas pela palavra, ultrapassam a matemática. (EPTT, 06/06/2008)

Outra característica de Guilherme é ser prestável e facilitador nas áreas em que se sente com mais competências, como por exemplo no domínio da informática.

Cabe ainda descrever um episódio de uma conversa com a coordenadora da escola em que Guilherme trabalhava nesse segundo ano. Referindo-se ao trabalho de Guilherme e da colega da outra turma que também frequentava a formação comentou: "Parecem estagiários! Não estou a falar de medos ou de preocupações mas de entusiasmo pelo trabalho na matemática!".

Assim, este professor evidenciou sempre humildade no reconhecimento das suas necessidades e, simultaneamente, uma grande vontade de aprender, progredir e valorizar-se nas suas competências como professor.

Nas atitudes e aprendizagens dos alunos

Guilherme refere a importância do acompanhamento em sala de aula e da presença da formadora na motivação e entusiasmo dos alunos, para além da utilização de estratégias motivadoras e de novas formas de abordar os conteúdos:

No primeiro ano de formação:

> [...] aquilo para trabalhar com os miúdos é fabuloso e eles... A professora de matemática a ir lá também foi um incentivo tremendo trabalhar a matemática. [...] Foi super motivador para eles. Também acabaram por ter lá a professora [...] quase 10 vezes.[16] Para eles foi... aquilo deu quase mais que uma vez por mês. Eles adoraram. (E3, 12/07/2007)

No segundo ano:

> Não, a relação [dos alunos com a matemática] foi engraçado, quer pela presença da Teresa... Eles já o ano passado tinham passado pela formação e tiveram a presença, mas eles este ano ficaram super entusiasmados quando se falava da aula de matemática. Perguntavam sempre: «O que é que é, professor? E é aula diferente?» (E6, 15/07/2008)

E no fim do ano lectivo fizeram um trabalho de recolha de opiniões dos alunos sobre as aulas de matemática do professor Guilherme onde se podem ver, entre outros, os seguintes depoimentos:

---

[16] Este número deve-se ao facto de a professora titular da turma estar também a frequentar a formação.

> Eu gostei muito das aulas de Matemática, de ter aulas com o Prof. Guilherme. Gostei de ter a Prof. Teresa aqui. Aprendemos jogos, padrões, caixa mágica, euros e trabalhamos com muitos números.
> A matemática é bonita para jogar com dinheiro, o tangram, a unidade, dezena, a centena e o milhar. Tivemos a caixa mágica e adorei fazer contas. Para mim a Matemática é genial.
> A Matemática é bonita, trabalhamos o quadrado do cem, caixa mágica, tangram e foguetão que um amigo deu. Aprendemos muito. O que eu gostei mais foi da caixa mágica. (Recolha facultada por Guilherme)

Verifica-se deste modo que a formação, quer como consequência das tarefas propostas nas sessões de formação quer pelo acompanhamento em sala de aula, teve um impacto positivo nos alunos das duas turmas nos dois anos de formação deste professor.

Sentindo-se mais motivados por tarefas inovadoras, os alunos trabalhavam mais e melhor a matemática e melhoravam as suas aprendizagens. Esta constatação é feita em conversa entre Guilherme e a/o professor da turma. No primeiro ano:

> Ainda há pouco estava a falar com a [nome da professora da turma] sobre isso, que nesta turma sentimos. Sentimos bastante, porque há ali... para além daquele grupinho de cinco, havia ali alunos que ao início... Mas também aquela fase em que eles dão aquele salto e digamos que acordam e... Mas notou-se que eles a nível da Matemática... Já havia lá um grupito que adora Matemática. Mas na turma notou-se. [...] Há ali um grupinho que era muito fechado [cita nomes de vários alunos] e com as aulas despertaram e passaram a participar mais e viu-se que estavam mais motivados. (E3, 12/07/2007)

E refere em seguida que essa maior motivação e participação tiveram frutos em termos de resultados escolares no fim do ano: "Não. Por exemplo, nas fichas deu, na avaliação final deu. O próprio... [cita nomes de alunos]" (E3, 12/07/2007).

No segundo ano afirma que, em conjunto com o professor titular da turma, identificaram uma grande evolução nos alunos:

> O problema é o ritmo. Mas notou-se. Naqueles miúdos notei. Notei uma evolução enorme. Eu entrei... Comecei a trabalhar com a turma a 11 de Outubro e foi engraçado ver a evolução daquela malta. Embora a gente tenha dado mais ênfase, principalmente no 1.º período, à língua portuguesa porque estavam... Mas depois na matemática eles foram... E foi engraçado ver o [nome do aluno]. Ele deu a aula do foguetão. (E6, 15/07/2008)

E relata a utilização pelo titular de turma, na avaliação sumativa, de situações trabalhadas na matemática no âmbito da formação e na reacção positiva dos alunos a essas situações, bem como da activação pelos alunos de procedimentos e raciocínios desenvolvidos e trabalhados por Guilherme nas suas aulas em aplicação posterior:

> Eu, por acaso, senti porque com o colega nós introduzimos na avaliação sempre algo relacionado com o que foi trabalhado e a maior parte dos alunos estiveram bem… E mesmo quando estavam a fazer outro tipo de trabalho eles chamavam-me: «Ó Professor! Na altura da tabela do cem a gente…» Mais 10… Eles lembravam-se de alguns cálculos, algum raciocínio que eles tinham feito. […] Eles trabalharam imenso. Eles tiveram uma fichinha bastante complicada com a matéria toda. Umas sete páginas com o trabalho todo do ano e foi engraçado que todos eles se aplicaram. O [nome do aluno], aquele vagaroso, aquele miúdo é vagaroso e depois tem aqueles problemas que ele tem. Ai, mas foi engraçado ver o [nome do mesmo aluno], que o pouco que ele fez ele acertou naquilo. (E6, 15/07/2008)

Também é abordada uma mudança substancial no tipo de propostas feitas que possibilita um desenvolvimento, nos alunos, de capacidades de nível cognitivo elevado:

> Parece-me que foi importante a possibilidade de fazerem raciocínios distintos dos que são promovidos pelos habituais "resolve", "faz" ou "determina". (Por2, 03/07/2008)

Fazendo a súmula, Guilherme defende, em registo escrito fornecido à formadora por ocasião da entrevista final: "Foi mais que evidente o gosto/prazer pelo trabalho matemático. A evolução das aprendizagens foi muita, atendendo ao seu desempenho inicial" (REE6, 15/07/2008)

E ainda no portefólio:

> Considero que fiz algo pelos meus alunos e que fui capaz de fazer com que alguns deles melhorassem o seu desempenho e a sua postura face à matemática, apesar dos erros e dificuldades que fui observando. (Por2, 03/07/2008)

Aspectos menos conseguidos

Neste aspecto, Guilherme refere no fim do primeiro ano que gostava que tivessem sido mais trabalhados os manuais escolares. Na verdade houve uma sessão dedicada à sua análise mas o professor considerou que teria havido vantagem em lhes ter sido dedicado mais tempo ao longo do ano. E insistiu neste particular sobretudo porque o manual adoptado na escola era, segundo os professores, muito fraco. Tinha muitas gralhas e introduzia os temas de forma insatisfatória e desmotivante. Guilherme relatou que, quando pediram no fim do ano aos alunos para escreverem uma frase sobre a matemática, houve um que disse: "A matemática é uma coisa chata se for trabalhada no livro". No segundo ano refere a falta de pontualidade de alguns colegas nas sessões conjuntas e o facto de não ter conseguido concretizar a compilação dos materiais usados nas aulas ao nível do seu grupo de formação por falta de adesão dos colegas.

Perspectivas para o futuro

Referindo-se ao "salto" que é necessário dar para que os efeitos da formação tenham continuidade Guilherme defende a vontade da própria pessoa em querer continuar a esforçar-se e a aprender não descansando no certificado:

> [A gente] fez a formação e não pode pensar: «Bem, está... já está tudo...» Eu acho que vai depender da pessoa. Quer dizer, se chegar: «Pronto. Já tenho aqui o certificado. Já estou apto para...» Eu acho que aí é o maior dos erros. Acho que é o maior dos erros uma pessoa achar que... É como o curso. A gente termina o curso e já... Há pessoas que saem com não direi com o rei na barriga... mas que enfim, [convencidos de que] são conhecedores de tudo e mais alguma coisa. (E6, 15/07/2008)

Mas Guilherme salienta a importância daquilo que tem agora em mãos:

> Isso fica. Fica mesmo. A menos que se tenha feito a formação por fazer e as coisas agora sejam arrumadas. Porque todo o material que eu tenho... Tenho a pasta do ano passado e tenho a deste ano. E tenho lá muita coisa para... e é um socorro para... sempre que necessário. Daí eu [ir recorrer a elas]. Ai, sem dúvida! (E6, 15/07/2008)

No seu caso pessoal, Guilherme tem a forte convicção de que os efeitos da formação vão permanecer, pois não tenciona arrumar os materiais recolhidos, pretendendo pelo contrário continuar a usá-los, a explorá-los e, partindo deles, a modificá-los para novas situações.

Síntese

Guilherme é um professor com pouco tempo de serviço e com uma experiência quase nula ao nível do 1.º ciclo. Reconhece um grave défice na sua formação inicial em matemática o que o leva a sentir a necessidade de frequentar um programa de formação contínua, de modo a poder, por um lado, aprofundar e mesmo aprender conteúdos matemáticos e, por outro, tomar contacto com estratégias e recursos para o ensino desta disciplina. Sobretudo neste campo do conhecimento didáctico Guilherme sente-se bastante inseguro. A sua atitude prevalecente durante a frequência do programa de formação, sobretudo durante o primeiro ano, é a de "absorver" tudo aquilo que possa, e que constitui novidade para ele, organizar essa informação o melhor possível de modo a poder vir a ser-lhe útil no futuro e obter *feedback* da formadora em relação aos pontos positivos e negativos das aulas observadas. Deste modo, nota-se em Guilherme uma vontade de superar as suas deficiências a um nível quase de formação inicial. De facto, e sobretudo no início do programa, este professor não tem ainda ideias muito assentes sobre aspectos específicos do ensino e da aprendizagem da matemática, estando ainda em fase de aprendizagem inicial. Esta situação faz com que aceite com naturalidade a presença da formadora desde o início, identificando esta formação quase como um estágio em que o formando não tem nada a esconder, não sentindo a exposição como um risco na sua carreira e na sua identidade profissional, já que esta é ainda um pouco incipiente.

É uma pessoa ponderada e reflexiva que considera de importância crucial a reflexão que foi sendo feita sobre a sua prática de forma a melhorar alguns aspectos menos bons fruto da inexperiência.

Valoriza também a partilha de experiências com os colegas pois permite recolher sugestões e ideias que pode depois utilizar na sala de aula. Verificou-se isso numa das aulas, em que Guilherme aproveitou e adaptou para a sua aula uma proposta feita por duas colegas na respectiva apresentação de trabalho autónomo. Ao nível da escola em que se insere no primeiro ano, propõe aos colegas a recolha e disponibilização para todos de materiais usados na sala de aula, o que concretiza até porque é ele o professor da escola que tem maior à-vontade a lidar com a informática e toma esse trabalho em mãos. Chega a fazer a mesma proposta ao nível do grupo de formação mas não consegue concretizar nesse grupo a ideia por não ter suficiente adesão dos colegas. No segundo ano de formação trabalha numa turma cujo titular é um professor muito experiente e com formação académica diferenciada que lhe proporciona o contacto com novas formas de trabalhar no 1.º ciclo e se mantém sempre aberto e receptivo às suas propostas para a sala de aula baseadas na formação de matemática.

Vê o portefólio como um instrumento interessante de organização pessoal da actividade docente e que propicia a reflexão. O seu portefólio é nos dois anos pormenorizado, cuidado e reflectido.

O trabalho autónomo foi feito individualmente de forma muito empenhada, cuidada do ponto de vista estético e gráfico, e evidenciando muita pesquisa conducente à selecção de tarefas de sala de aula que, embora tendo como ponto de partida as propostas feitas nas sessões de formação, não se esgotavam nelas, procurando desafios diferentes e inovadores. A apresentação, em formato electrónico, evidenciava grande qualidade técnica e estética. De resto, mesmo para as outras aulas notou-se um grande investimento na planificação, com base na pesquisa pessoal e na produção de materiais cuidados e esteticamente muito agradáveis e motivadores para os alunos. Em particular em relação ao pensamento algébrico, que foi o tema escolhido para basear o trabalho autónomo durante o segundo ano de formação, Guilherme trabalhou padrões de repetição em sequências figurativas e passando depois para outros modos de representação, o que permitiu um maior nível de abstracção na identificação da estrutura do padrão independentemente dos objectos, padrões de crescimento em sequências numéricas, a descoberta de padrões numéricos na tabela dos cem com vista ao desenvolvimento do cálculo mental e o raciocínio funcional, com a caixa mágica, levando os alunos a descobrir a regra por detrás duma transformação numérica e dando assim uma interpretação funcional às operações aritméticas. Na proposta implementada a nível de trabalho autónomo, Guilherme utilizou novamente como recurso a tabela dos cem de modo a que os alunos aprofundassem o trabalho de descoberta de padrões já feito anteriormente e descobrissem outros padrões, quer com vista à promoção de estratégias de cálculo mental quer para a generalização de relações numéricas entre células vizinhas em qualquer ponto da tabela.

Na prática de sala de aula verifica-se uma evolução nos aspectos da comunicação, sobretudo em termos do questionamento feito pelo professor, aspecto que foi sempre objecto de reflexão por parte de Guilherme. Nota-se também um progressivo à-vontade com os temas matemáticos. A nível de atitudes destaca-se o reforço de uma atitude positiva e do prazer em trabalhar a matemática, bem como um aumento da auto-confiança.

Verifica-se nas entrevistas que tem alguma dificuldade na verbalização das suas iniciativas ligadas à prática no que diz respeito ao tratamento de temas e processos matemáticos por falta de traquejo na utilização de terminologia específica, o que não quer dizer, de modo algum, que não tenha interiorizado os aspectos mais importantes da actividade matemática.

Deste modo, Guilherme teve ao longo destes dois anos de formação um grande desenvolvimento profissional pelo contacto com propostas inovadoras para a sala de aula, pela adesão entusiasmada e o esforço de concretização, pela reflexão pessoal que sempre valorizou e pela partilha de trabalho com colegas mais experientes.

Capítulo 9

LEONOR

A professora a quem neste estudo foi atribuído o nome de Leonor dá voz a este capítulo. Começa-se com uma breve apresentação da pessoa no seu percurso pessoal e profissional e continua-se para a caracterização da sua relação com a matemática enquanto estudante e do seu retrato profissional prévio ao programa de formação. De seguida faz-se a análise do seu percurso durante a frequência do programa, nas suas várias vertentes, e das suas impressões pessoais ao longo do tempo, bem como dos reflexos deste programa no seu conhecimento matemático e didáctico, na sua prática de sala de aula e nas aprendizagens dos seus alunos.

Apresentação

Leonor frequenta no início deste estudo o segundo ano de formação. Tem na altura quarenta anos. É loira, com aspecto jovem e elegante e uma apresentação moderna e cuidada. Tem um temperamento sensível e auto-confiante. É uma pessoa organizada, observadora e sincera. É casada e tem dois filhos no ensino básico. Tem dezanove anos de serviço como professora do primeiro ciclo. Pertence ao quadro de zona pedagógica. Neste segundo ano de formação esteve colocada numa escola de meio suburbano com uma turma do 2.º ano de escolaridade e no segundo ano em que participou neste estudo, já fora da formação, foi colocada noutra escola, numa freguesia da cidade, com uma turma do 1.º ano.

Percurso académico e profissional

Leonor fez o ensino secundário na cidade onde nasceu e vive e, embora tenha passado por uma fase de dúvida, achava que o seu caminho era ser professora:

> Na altura, quando acabei o liceu, não sabia bem o que havia de seguir e...mas ao passar muitas vezes ali no Magistério eu achava que tinha jeito para ensinar [Rindo]. (E1, 23/11/2006)

No entanto, ainda chegou a entrar em Fisioterapia mas optou pelo curso do Magistério. Mais tarde, já com este curso tirado, ainda frequentou o curso de Geografia mas as circunstâncias da vida não lhe permitiram concluí-lo. Fez mais tarde um curso de formação complementar ligado à área do Meio Físico e Social.

No início da sua carreira, há cerca de vinte anos, foi colocada em aldeias longínquas onde era muito difícil trabalhar por falta de condições. Leonor relembra com mágoa esse tempo e as condições de vida das populações e das crianças que nelas estavam inseridas:

> Abria a porta da sala e via os ratos a fugir. As empregadas da escola só iam ao sábado limpar a escola e eu tinha a secretária cheia de porcaria dos ratos por cima. Os miúdos comiam ali e era as condições de trabalho que uma pessoa tinha. [...] Uma pessoa habituada aqui a ter tudo, chegava lá não tinha nada. E eu pensava: «Bem, vou dar esta falta, aquela, aquela, aquela, que eu não aguento! Eu não aguento!» Acabava por não dar quase nenhuma. [...] O que é que conseguia aguentar isto tudo? Eram as próprias crianças. [...] Partia-me o coração ver aquelas criancinhas; vinham e comiam arroz com arroz frio. (E1, 23/11/2006)

Esta situação faz com que Leonor tenha uma opinião positiva sobre o fecho de escolas de lugar único, por uma questão de condições físicas e também para evitar o isolamento, tanto dos alunos como dos professores.

A escola do primeiro ciclo onde leccionou no segundo ano de formação é uma construção do início do séc. XX, bonita mas com poucas condições, situada numa freguesia da periferia da cidade. Não possui cantina e o espaço de recreio é extremamente exíguo para as crianças que a frequentam. Tem no seu corpo docente dez professores. No segundo ano de participação neste estudo, já fora da formação, Leonor lecciona numa escola duma das freguesias da cidade. É um edifício novo, espaçoso e arejado, com óptimas condições, e onde trabalham 12 professores.

Relação com a matemática enquanto estudante

Leonor sempre gostou de matemática. No seu percurso académico teve sempre óptimos resultados escolares durante a escolaridade básica, até ao nono ano. Fez a disciplina de matemática do 12.º ano sem dificuldades mas com a noção de que o esforço que fazia não era completamente compensado, atribuindo este facto à falta de apoios:

> Outras, por exemplo, que andavam em explicações... Eu não podia, estava... a minha irmã também estava a estudar. [...] não dava para tudo, não é? [...] mas eu estudava, estudava e, por exemplo, depois de estudar muito eu não conseguia passar do doze, catorze. Não conseguia! Eu estudava para conseguir mais, eu fazia aqueles exercícios todos, o que tinha. Não havia livros! [...] conversava com essas minhas colegas: «Ai! Eu soube fazer porque o explicador chamou-me a atenção disto, aquilo e aqueloutro». (E1, 23/11/2006)

Dá conta que a formação académica dos pais não lhes permitia dar-lhe apoio nos estudos e teve de descobrir por si, à custa do seu esforço e do seu estudo, um modo de ter sucesso. Mais tarde, como irmã mais velha, já pôde apoiar a irmã com a sua experiência. No entanto, considera que a matemática é muito importante como disciplina escolar, mesmo para quem segue outras áreas que não precisam da matemática como ferramenta, pois desenvolve a capacidade de pensar e raciocinar.

Formação matemática na formação inicial e auto-formação

Leonor não assinala com grande intensidade a influência, quer positiva quer negativa, da formação matemática na sua formação inicial. Refere que essa formação foi bastante teórica e que havia pouco apoio:

> Por exemplo, no início do meu curso, aqueles primeiros anos, esta prática resumia-se muito a papéis. [...] Teoria. E, quer dizer, eu tinha estes conceitos todos, mas no papel, escritos. (E6, 30/06/2008)

> Antigamente davam as linhas mestras «Isto é assim, é assim e é assim.» e cada um tentava. «Ora deixa ver como é que eu vou dar isto.» Mas andávamos sozinhos por nós... a explorar e a tentar. (E3, 09/07/2007)

Mas aquilo que esta professora considera ser importante é a sua própria auto-formação, que sempre foi fazendo ao longo do seu percurso. Das entrevistas ressalta com força esta ideia:

> Às vezes nas férias eu via isto... comprava assim. Em vez de comprar livros de... de romance e assim... «Olha que giro, Técnicas de...» Tirava e às vezes tirava uns apontamentos. «Olha que giro este exercício!» Tirava assim uma ideia. «Olha que engraçado!» E, às vezes, tenho assim na minha pastinha do computador, que são as minhas notas. E vou tirando assim, ia tirando. (E1, 23/11/2006)

> Eu... eu estes artigos que saem de investigações, eu gosto de ler, porque são pessoas que investigam e chegam a conclusões. Eu, pronto, algumas concordo, outras não concordo. E às vezes experimento com eles [os alunos]. E ela [Referindo-se ao trabalho de Patrícia Sadovsky] realmente dizia coisas que eu concordo. As pessoas têm muito a ideia que vamos brincar e o jogo é... O jogo é importante para ensinar na Matemática, mas é importante para despertar. (E2, 01/03/2007)

> Eu, por exemplo, eu sempre gostei da matemática. Eu gosto da matemática. Mas, por exemplo, eu desde que me formei, que mesmo não havendo esta formação, fui-me auto-formando. Tudo o que aparecia ligado a estes temas da minha área eu leio. (E6, 30/06/2008)

Assim, Leonor é uma professora que denota curiosidade e espírito de pesquisa, características que contribuem para uma actualização e auto-formação constantes.

Retrato profissional prévio

Nesta secção procura-se dar uma imagem profissional de Leonor antes de participar neste estudo. Embora o início da recolha de dados coincida com o segundo ano de formação, a formadora durante o primeiro ano não era a investigadora, pelo que a descrição que aqui se faz baseia-se mais nas entrevistas do que na observação directa.

Perspectivas sobre o ensino e a aprendizagem da matemática

Leonor é uma professora experiente que já leccionou em vários contextos educativos. Gosta da profissão que escolheu e tem uma postura profissional empenhada e crítica. Protesta contra as condições a que os professores são sujeitos com as quais não concorda mas mantém sempre no relacionamento com os alunos um distanciamento em relação a estas questões:

> E gosto do que faço, gosto de ensinar, gosto de estar com os miúdos. Apesar destas leis todas estarem assim contra nós eu esqueço-as. É um bocado absurdo, mas é... mas é verdade! Porque eu revolto-me, protesto porque eu não subo de escalão, por causa disto, daquilo e daqueloutro, mas entro a porta e separo as coisas. Quer dizer, os miúdos não têm culpa. Nós estamos... Nós somos tão responsáveis na formação da personalidade desses miúdos que são uns inocentes no meio disto tudo e nós... Há colegas que não distinguem as coisas, não estão para trabalhar, que se danem, não trabalham. Eu não penso assim porque eles não têm a culpa. Quem somos nós, não é? (E1, 23/11/2006)

Vive muito os problemas dos seus alunos, quer a nível pessoal e familiar quer a nível de aprendizagens escolares: "Eu vivo estas situações, quer dizer, parece que acabo por ser um bocadinho mãe daqueles filhos todos!" (E1, 23/11/2006).

No que diz respeito à matemática, Leonor defende que antes de iniciar a formação já trabalhava de modo diferente do tradicional; nas suas palavras, "Como eu achava que devia ser trabalhada" (E1, 23/11/2006), numa perspectiva de desafios e resolução de problemas. Este à-vontade deve-se em parte, segundo a professora, às funções que tem desempenhado de cooperante da ESE no âmbito da prática pedagógica. Refere por exemplo um ano em que teve um 1.º ano e em que trabalhou sempre com os alunos a resolução de problemas, envolvendo inclusivamente os pais dos alunos ao dar-lhes tarefas para casa - "Quando dei conta andavam lá pais e tudo a discutir uns com os outros para ver qual era a resposta" (E1, 23/11/2006). E continuando, confessa que no ano seguinte teve um 3.º ano a quem apresentava os mesmos desafios, a que nenhum conseguia dar resposta, para concluir da importância de os alunos explorarem este tipo de situações desde o início da escolaridade. Leonor dá conta da organização de um dossier próprio com tarefas interessantes que vai recolhendo ao longo dos anos e que depois aplica ou adapta conforme as turmas que tem. Queixa-se do acréscimo de tempo de permanência na escola de acordo com as novas directivas do Ministério da Educação, o que lhe rouba muito tempo que lhe faz falta para a planificação, organização e reflexão sobre as suas aulas, que gosta de fazer com todo o cuidado. O seguinte excerto espelha essa angústia:

> Agora o que eu acho é que ao professor, então do 1.º ciclo, estão a exigir coisas... uma perfeição a nível de todas as áreas que é impossível. Olha! Eu até acho que um professor tem que estar muito bem fundamentado na matéria, tem que estar muito seguro. E aí, pronto, há lacunas. Não é? Onde começa? Uns é na formação durante os cursos, não é? Outros na maneira de ser, mas pronto. Começa por aí. Mas depois, mesmo estando bem fundamentado, tem que reflectir muito, tem que ter tempo para essa reflexão, tem que investigar, tem que ouvir e partilhar opiniões com os outros. Eu não sei onde vai buscar o tempo! O dia só tem vinte e quatro horas e ainda por cima temos o prolongamento. Eu tenho dias, por exemplo, quando me calha à quarta-feira estou cinco horas com eles, no fim faço o prolongamento, mais uma hora seguida. Tudo seguido. (E2, 01/03/2007)

Gosta e tem grande facilidade em construir os seus próprios materiais de apoio às aulas e, no trabalho com os alunos, embora use alguns materiais comerciais como o material multibásico, o Cuisenaire, etc., valoriza sobretudo a construção de materiais pelas próprias crianças. Por exemplo, para dar a noção de metade, terça parte, etc., os alunos utilizam tiras de papel que depois guardam numa pasta da matemática para utilização futura. Considera importante o facto de serem os alunos a construir, a criar os seus materiais, para que assim lhes dêem mais valor. E defende que sem materiais, sem concretização, os alunos não vêem qualquer ligação da matemática com a realidade, além de que um ensino teórico dificulta a aprendizagem:

> Eu os de compra valorizo se os souber aplicar no dia-a-dia, senão... Se for assim coisas que não dê, não... Eles têm que entender que aquilo faz falta, tentar ligar...tentar associar sempre, porque senão são crianças que aquilo não lhes diz nada. Não é? [...]Quer dizer, nem consigo pensar não os usar, porque se vou dar a matéria tenho que os usar. Senão como é que?... Lá está! Senão estamos só na teoria. [Concretizar] sempre, sempre. São os sentidos todos a aprender. (E2, 01/03/2007)

Reconhece que para a maioria dos alunos a matemática é muito difícil, procurando a explicação em factores culturais e na falta de hábitos de trabalho:

> A matemática é muito difícil. Quer dizer, isto é assim! Hum... Os pais não têm grandes expectativas em relação à escola. Os das cidades e assim têm, preocupam-se. Querem que os filhos vão para a escola, que tenham uns bons professores, que tenham um bom ensino. Por aí fora não há essa preocupação. [...]Há outra coisa que também acho que é típico dos portugueses: não há hábitos de trabalho. E a matemática exige hábitos de trabalho. Acho que sem trabalho não vai lá. Há a parte do gostar, do compreender, mas depois precisa de trabalho. (E1, 23/11/2006)

Referindo-se em particular à tabuada, considera que é imprescindível que os alunos a saibam pois não podem ficar a vida inteira a contar pelos dedos, e explica que os próprios alunos começam por construí-la com compreensão mas depois precisam de a saber:

> Olhe, por exemplo, a tabuada do 2. Começaram com a tabuada, não é? Concretizaram, uma cereja, duas cerejas... Eu só dei as primeiras – uma vezes o dois, duas vezes o dois. Portanto, dois mais dois, duas vezes o dois. Não dei mais. Eles perceberam o mecanismo e então deixei-os... «E agora? E se tiver estes três? Duas cerejas, mais duas, mais...» E eles fizeram eles a tabuada até ao fim. Muito bem. Contaram. «Agora, anda lá.» Mesmo os mais... «Agora conta, vais tu descobrir!» Até ao dezoito, vinte... «Estás a ver quantas deu? Ora aqui enganaste-te, não dá 17! Ora conta bem.» «Ai dá 18.» Pronto. Depois organizámos, mas não acabei no dez! Onze, doze... «Se eu continuasse dava?...» E eles viram que aquilo continuava. «Amanhã vou perguntar um a um! Agora trabalhar.» Eles têm que a decorar, não é? Sem trabalho não vai lá! (E1, 23/11/2006)

Continuando a expor o seu ponto de vista, defende a utilização de jogos contabilizando o tempo:

> «Ai acabou o tempo» - quando acabou. «Isto dá tempo! Agora é o jogo do tempo então.» Eu acho que se tem que passar por isto. Quer dizer, há aquela parte da brincadeira, aquela parte de... Mas depois não há hipótese. (E1, 23/11/2006)

Defende por isso a necessidade do trabalho de casa, revoltando-se contra as recentes indicações superiores para não o marcar:

> A [colega] do agrupamento avisou-nos: «Atenção, não podem marcar trabalhos de casa.» E eu quero ver o que é isto! Andam a brincar connosco! Por um lado dizem que os professores não sabem ensinar, que é preciso formação, têm que aprender, têm que... A seguir, esse trabalho, esse... esses hábitos de trabalho como é que eles os vão ganhar? (E1, 23/11/2006)

Em consonância com esta questão, Leonor põe a tónica na importância do apoio que a família deve prestar ao trabalho das crianças em complementaridade com a escola, e reconhece com mágoa que este só raramente é prestado.

Mostra uma grande preocupação com as crianças que têm maiores dificuldades e com o modo de compatibilizar a necessidade de maior apoio a esses com a necessidade de andar para a frente com os outros, queixando-se da falta de apoios a nível institucional:

> É difícil ensinar a miúdos assim. Os conceitos. É muito difícil! É... Às vezes uma pessoa chega quase ao desespero, porque eles estão na lua de tal maneira... Variando as actividades... É um desespero completo! [...] Só que lá está! Mesmo ensino especial, apoio e tudo, têm cortado imenso. E como é que nós vamos conseguir resultados com todos os alunos? É que cada um chega com velocidades diferentes. Há aqueles que chegam muito bem. Mas o problema não são esses. São os outros. E é complicado. É os exames, é as metas, é os objectivos... [...] E quando os outros andam com a folha para trás e para a frente e fizemos aquilo tudo e fizemos força delas e foi... e não conseguem fazer? É começar tudo do zero com aqueles. E os outros que já sabem aquilo tudo? E uma pessoa sozinha como eles todos. (E2, 01/03/2007)

Defende que faz o seu melhor mas que mudanças radicais neste aspecto talvez só se possam notar no nosso país daqui a vinte ou trinta anos, quando tivermos pais mais escolarizados e que portanto valorizem mais a escola.

Dificuldades/Necessidades de formação

Leonor ingressa neste estudo já depois dum primeiro ano de formação. Por outro lado, como já foi referido, é uma pessoa que tem a consciência de ter estado sempre preocupada com os problemas do ensino e da aprendizagem e tem procurado manter-se informada sobre as novas tendências do ensino da matemática. Assim, as suas dificuldades ou necessidades de formação não são tão explicitadas como o foram eventualmente no ano anterior, por já ter aproveitado de um ano de formação. Contudo, a sua postura é muito aberta e receptiva em relação à formação contínua, que considera importante e que de resto frequenta durante dois anos.

Leonor procura no programa de formação não propriamente fazer aprendizagens de base mas aprofundar alguns aspectos e ter acesso a algumas novidades para enriquecimento profissional: Ora, quando vi este programa digo assim: «Deixa ver o que é que vou aprofundar». (E1, 23/11/2006)

Esta professora defende que esta formação, como aliás as outras co-existentes, são importantes para avivar noções e reforçar a segurança científica do professor: "Essa segurança na matéria que a gente tem que a ter" (E2, 01/03/2007). E realça também que a formação contínua é ainda mais importante que a formação inicial, referindo que há resultados de estudos que o provam:

> E está mais do que provado que, por exemplo, fazendo a formação principal do curso: tem-se mais resultados fazendo formações periódicas do que fazendo formação [inicial] em grande escala. (E2, 01/03/2007)

No final desse ano lectivo reforça a ideia do valor quer da formação contínua quer da auto-formação:

> Eu acho que em matemática é importante a formação, quer se queira quer não. As pessoas têm que ter formação ao longo da carreira. É impossível uma pessoa fazer formação e não se formar mais. Eu acho que caímos na rotina, nós, automaticamente. E mesmo as ideias, ou se uma pessoa não se formar assim, tem que ler livros, tem que se formar doutra maneira. (E3, 09/07/2007)

Deste modo, Leonor encara a formação contínua como uma oportunidade de aprofundamento do conhecimento profissional, que recebe com expectativa com o objectivo de evitar a rotina e para complementar a sua auto-formação.

O percurso profissional ao longo do Programa

Procura-se aqui descrever o percurso de Leonor durante a frequência do segundo ano do programa de formação. Por uma questão de organização, apresentam-se inicialmente e em separado as vertentes do programa que proporcionam uma descrição mais concreta e extensiva, e cujos dados foram recolhidos por observação directa e/ou registo vídeo, como sejam, as sessões de formação, a prática de sala de aula, incluindo particularmente a produção matemática dos alunos, e o trabalho autónomo. Outros aspectos mais gerais de impressões e atitudes da professora, cujos dados foram recolhidos essencialmente através de entrevista, e que estão ligados às vertentes do programa de acompanhamento em sala de aula, particularmente na relação com a formadora, de reflexão e de partilha de experiências, são apresentados logo de seguida na parte final da secção e integram por vezes vários aspectos em simultâneo, já que nas entrevistas a professora faz a sua gestão conjunta.

Leonor participou neste estudo, durante o segundo ano, como professora já não ligada ao programa de formação, pelo que o seu trabalho foi essencialmente autónomo. No entanto, foram-lhe facultados todos os materiais novos que durante esse ano foram produzidos pela equipa de formadores e apresentados no âmbito das sessões de formação.

As sessões de formação

Leonor frequentou assiduamente o segundo ano de formação. Envolvia-se empenhadamente nas actividades propostas. A sua participação, muito vívida e entusiasta, era uma mais-valia para o grupo. Na verdade, Leonor procurava sempre fazer a ponte entre as tarefas trabalhadas e a sua sala de aula, fazendo sugestões válidas baseadas na sua experiência. Era muitas vezes um incentivo para outros colegas que buscavam nas suas opiniões uma base de trabalho. Era também fortemente crítica do sistema e das emanações recentes do Ministério da Educação quanto às novas tarefas dos professores e à avaliação do desempenho.

A sua opinião sobre as sessões de formação é positiva:

> As sessões de formação eu acho-as muito importantes. Porque há um trazer de novas ideias para trabalharmos as coisas, abrirmos um bocadinho os horizontes, até preparar mesmo… Prepara muito… Aquelas ideias são tudo coisas novas até para os exames, maneiras diferentes de perguntar a mesma coisa muitas vezes. Ai, eu acho que aprende-se. (E3, 09/07/2007)

Comentando a atitude negativa e pessimista de algumas colegas de escola que consideram que não se inscrevem na formação porque não vão aprender nada, defende que o conhecimento básico está adquirido mas é importante a diversificação de estratégias de ensino para abordar uma ideia matemática:

> Porque as pessoas confundem a linha base… portanto, sei lá, sabem a ideia. O básico, não é? Pronto. E não dão valor ao diversificar a mesma ideia. Ao trabalhar, às vezes. Porque as crianças não aprendem de uma vez só, não é? Eu acho que dar… nós sabemos a ideia. A tabuada sabemos dar. Mas sei lá! Maneiras diferentes de trabalhar aquilo. Jogos para trabalhar aquilo. Eu acho que é esse… essas ideias, essa… mau seria nós irmos para a formação para saber: «Ai, é assim que se dá a tabuada?», «Ai, é assim que se dá o algoritmo?» (E3, 09/07/2007)

A prática de sala de aula

Ambiente. Leonor é titular, durante o segundo ano de formação em 2006/07, de uma turma do 2.º ano com 23 alunos. No segundo ano de colaboração neste estudo, já fora da formação, Leonor é titular de uma turma do 1.º ano com 25 alunos. Em qualquer dos anos, a disposição dos alunos na sala vai variando conforme o tipo de actividade previsto. As mesas duplas tanto estão na disposição tradicional voltadas para o quadro, como estão em rectângulo à volta da sala, como estão duas a duas para facilitar o trabalho de grupo, como ainda os alunos sentam-se no chão em redor de um motivo de interesse ou para ouvir contar uma história.

Os alunos estão à-vontade mas a professora exige o cumprimento de determinadas regras estabelecidas. O comportamento é bom. Quando trabalham em conjunto – em pares ou em grupos - há um ruído normal e necessário neste tipo de trabalho.

As tarefas e os recursos. Leonor prepara as aulas com grande cuidado, prevendo tarefas ricas do ponto de vista matemático. Por vezes, mas nem sempre, as tarefas baseiam-se em propostas feitas na formação, mas são adaptadas e enquadradas sempre por situações que a própria professora cria, umas vezes com personagens que acompanham os alunos ao longo do ano nas suas aventuras pelo processo de aprendizagem e que eles já conhecem muito bem, outras com outras personagens que surgem no momento. Esta faceta, aliada à sua grande facilidade de expressão e comunicação, à modulação da voz e à criação de situações de mistério e surpresa, faz com que os alunos estejam suspensos das suas palavras, bebendo avidamente as histórias que a professora tem para contar e as aventuras que lhes vai propor. Os recursos são na maioria das vezes inventados e construídos previamente pela professora ou em conjunto com os alunos. As aulas iniciam-se de forma contextualizada, e a tarefa surge sempre integrada. Normalmente tem um carácter exploratório, em que os alunos começam por manipular materiais. No entanto vão surgindo outras de diferentes naturezas, umas de treino de procedimentos, outras de resolução de problemas, outras ainda de carácter investigativo em que os alunos vão ganhando mais autonomia. Normalmente é distribuída uma folha de trabalho e registo em que por vezes surge a sequência proposta e questões orientadoras.

Das tarefas referidas neste trabalho, as que foram apresentadas por Leonor em suporte de papel constam do Anexo G.

Durante o primeiro ano, (1) Trabalhou conceitos geométricos com utilização do tangram em interdisciplinaridade com a área de Língua Portuguesa através de um texto denominado "A viagem do Gatangram", que contava as aventuras de um gato e das descobertas que ele ia fazendo, ilustradas por figuras construídas com o tangram: barco, casa, chaminé, vela e muitos animais. No fim os alunos colaram em cartolina e recortaram as peças do tangram e construíram algumas dessas figuras. Foram explorados alguns conceitos geométricos como o de quadrado, rectângulo, paralelismo e o facto de as propriedades de uma figura não dependerem da sua posição: "O menino a fazer o pino é o mesmo menino" (A1-1, 06/11/06); (2) Explorou somas de pares e ímpares e também orientação espacial e itinerários. Para isso, colocou ao pescoço de cada criança uma medalha de cartolina com um número presa a um fio e pediu para saírem para o corredor e se organizarem em grupos de três, quatro, etc., de modo a que cada conjunto ao entrar na sala representasse um número par. No regresso à sala foram discutidas as várias hipóteses encontradas. Na segunda tarefa, com os alunos organizados em grupos, a professora colou no quadro um alvo em cartolina com alguns números marcados. A um aluno de cada grupo, à vez, são vendados os olhos e é entregue uma canetinha. Em seguida este aluno deve procurar acertar no alvo com a caneta mediante as indicações dos colegas de grupo, do tipo: "Um passo em frente; para a direita; não piques; etc.". Os pontos de cada grupo foram registados numa ficha e explorados em termos do algarismo da ordem das centenas, dezenas e unidades, número de centenas, dezenas e unidades e feitas as somas para o cálculo do total de cada grupo. Para apoiar o cálculo da soma os alunos recorreram a um material que já tinham construído e que guardam num envelope da matemática para usarem quando necessário: o "ábaco", constituído por uma régua de madeira com a indicação das unidades, dezenas e centenas, e quadradinhos coloridos de cores diferentes para cada uma das ordens; (3) Introduziu a noção de simetria axial começando por contar a história da viagem do Gino a um planeta esquisito, o dos "Caras metades", onde as pessoas são metade transparentes. Deu de seguida algumas meias figuras e um espelho a cada um para descobrirem o que é. Depois distribuiu recortes de revistas com imagens por cada grupo para eles descobrirem, com a ajuda do espelho e do mira, se são simétricas. De seguida dá umas meias figuras já desenhadas num papel dobrado a cada e tesoura e diz aos alunos para recortarem pelo risco. As imagens que surgiram, depois de analisadas, são coladas no caderno. Depois apresentou-lhes frases misteriosas (escritas ao espelho) que tinham de decifrar ... usando os espelhos! De seguida cada criança escreveu o seu nome ao espelho. Por fim realizaram uma tarefa de completamento de imagens de modo a serem simétricas; (4) Abordou a elaboração e interpretação de gráficos, o trabalho com números decimais e a descoberta dos negativos através de experiências de medição de temperaturas. Começou por ser feita, por um aluno e depois pela professora, a síntese do trabalho realizado em várias áreas durante o mês de Fevereiro. Depois a professora pôs água em três taças, uma com gelo, outra à temperatura ambiente e a terceira quente. Mediu as temperaturas. A propósito da taça com gelo falaram duma leitura já feita anteriormente dum texto sobre um iceberg lembrando que a parte à vista é a oitava parte do total, tendo recordado o seu significado. Entregou uma ficha com taças para registarem as observações da temperatura, 6.°C, 14.°C e 50.°C. Falaram no senhor Celsius. Ao fazerem o desenho do gelo deixaram só um oitavo fora de água. Registaram a conclusão por escrito. Depois foram calcular a diferença entre a temperatura mais alta e a mais baixa em cálculo mental. Por fim fizeram um gráfico de barras com os valores da temperatura lidos durante o mês. Já que as leituras do termómetro existente no aquecedor da sala davam valores até às décimas, a professora já tinha explicado o significado desses números e os alunos trabalhavam com eles com naturalidade e desenvoltura; e (5) Explorou a adição e a subtracção em cálculo mental através de tarefas ligadas aos jogos olímpicos. O tema foram os Jogos Olímpicos do cálculo mental. Começou com um problema de vários passos (entrada e saída de passageiros num autocarro observada por um menino que vinha para a aula) cujo objectivo é o desenvolvimento do cálculo mental. A segunda tarefa foi o Jogo Damas matemáticas, inventado pela professora, e cujos tabuleiros, diferentes para cada grupo, estavam ligados às modalidades olímpicas. Este jogo é uma espécie de jogo das damas num tabuleiro de 5x5 mas em que, ao avançar de umas casas para outras, vai-se adicionando os pontos indicados nas casas de saída e de entrada. Ao comer peça adversária também se adicionam 10 pontos. A professora contou depois a história de Sessa, o inventor do jogo de xadrez, pedindo aos alunos para calcularem o número de grãos de arroz correspondentes a duas filas do seu tabuleiro. Por fim fizeram uma tarefa do pódio para receberem as medalhas de participação. A aula continuou depois ao ar livre com o acompanhamento da outra professora, colega de formação, que dava apoio sócio-educativo a alguns alunos da turma.

No segundo ano dedicou as quatro aulas observadas à iniciação ao pensamento algébrico, passando pelo desenvolvimento do sentido do número e cálculo mental: (6) Trabalhou padrões de repetição. A primeira tarefa era de descoberta, continuação e completamento de padrões de repetição. Foram usadas várias imagens em sequência: gelados, joaninhas, formas geométricas com olhinhos, melancias, barcos, carros, grandes médios e pequenos, flores, peixes, ... Na segunda parte da aula cada um no seu lugar resolveu uma ficha com padrões, enquadrada por uma história acerca de uma menina que fez anos e a quem a mãe deu contas e fio para fazer colares. Nesta tarefa os alunos também tinham de inventar os seu próprios padrões; (7) Explorou contagens de dois em dois, três em três, de cinco em cinco e reconhecimento dos padrões com o apoio de várias formas de representação. Contagens com apoio dum dado. A 2.ª tarefa baseou-se num texto de António Torrado acerca de uma história de macacos e das bananas que eles comiam. A certa altura os macacos protestavam que estavam com fome e o tratador começou a dar-lhes mais refeições. A história baseia-se no facto de os macacos ficarem sempre com fome, porque a dose não aumentava, era só distribuída ao longo do dia, e proporcionou decomposições do 10 e depois de outros números em duas, três, quatro e cinco parcelas. Foram depois realizadas outras tarefas de decomposição de números maiores. Alguns alunos trabalhavam com o apoio de uma recta numérica plastificada; (8) Iniciou a aula com alguns exercícios de cálculo mental com a ajuda da tabela dos cem. Descoberta do padrão numérico associado a adicionar 10 a um número. A segunda tarefa baseou-se num "acontecimento". O correio, que chega todas as semanas, (a caixa está na sala) trazia hoje uma encomenda dos amigos da matemática, a Paula e o Simão. Esses meninos contavam que queriam plantar uma oliveira (aproveitou para falar nessa árvore) e o Simão, ao cavar a terra, encontrou um objecto que tiraram: era um cofre! Abriram o cofre e encontraram uma folha lá dentro que dizia: para abrires o baú tens de saber jogar o *aritmógono*. A partir daí desenrolou-se a tarefa de cálculo de somas de números em triângulo. No fim havia um descodificador da mensagem secreta; e (9) Explorou a adição e a subtracção em cálculo mental, com recurso a vários modelos. Na primeira parte da aula foi pedida a intervenção da formadora para colocar questões de cálculo mental aos alunos em que eles poderiam recorrer a uma tabela dos cem plastificada que cada um possuía. A professora distribuiu depois uma pequena tarefa para completarem uns espaços em que intervinham somas e diferenças e finalmente apresentou a história do sr. Joaquim que tinha 50 moedas de euro e queria guardá-las nos seus dois bolsos. Os alunos teriam de descobrir maneiras de o fazer.

Papel da professora. Leonor enquadra sempre as tarefas com uma história com que atrai de imediato a atenção dos alunos. Muito criativa, apresenta situações de magia e mistério, salpicados por comentários divertidos ou intrigantes, mas sempre muito vívidos e emocionantes. Comunica com muita expressividade, possuindo um tom de voz cativante e envolvente. As crianças ficam presas das suas palavras. Põe o máximo cuidado na construção de materiais que traz para a aula ou, em alternativa, pede aos alunos que os construam. A situação inicial dá logo acesso a uma tarefa matemática em que os alunos se envolvem. A professora tem um papel catalisador da actividade dos alunos. Fornece o material, dá as instruções e fomenta a discussão através de um questionamento adequado e eficaz. É directiva a dar as instruções e exige o cumprimento de regras estabelecidas mas deixa-os fazer as suas descobertas.

É muitíssimo eficiente na gestão do tempo, o que faz com que uma hora renda muito e se consigam realizar imensas tarefas e tocar em profundidade vários assuntos. Incita os alunos a trabalhar, a persistir, a nunca cruzar os braços. Aproveita sempre as ocasiões para fazer ligação a outras áreas ou a conteúdos previamente abordados.

Tem tendência para usar certas imagens, analogias ou metáforas que permitem aos alunos fazer associações mentais entre determinados procedimentos matemáticos e situações do dia-a-dia, o que parece facilitar em alto grau a compreensão.

Papel dos alunos. Tanto numa turma como noutra observou-se que os alunos estão sempre entusiasmadíssimos, primeiro com a história contada e depois com as descobertas que são conduzidos a fazer. Todos querem participar. O comportamento é bom em ambas as turmas. Nota-se, sobretudo na turma do 1.º ano de escolaridade, que no início do ano a professora conduz quase completamente a aula e vai havendo uma evolução ao longo do ano para uma maior autonomia no trabalho. Os alunos fazem as suas próprias descobertas, individualmente ou em pares, e são depois solicitados a comunicá-las à turma.

Produção matemática dos alunos. Ao longo destes dois anos verificou-se que foram focados e abordados muitos tópicos matemáticos do programa. Esta análise não pretende apresentá-los exaustivamente nem tal seria possível. Procurar-se-á apresentar alguns episódios com o objectivo de ilustrar o desenvolvimento de capacidades transversais constantes nesse mesmo programa ligadas sobretudo ao desenvolvimento do sentido do número e à emergência do pensamento algébrico, pois foi esse o tópico privilegiado na segunda parte deste estudo, e que se mostraram mais relevantes através da observação de aulas.

O pensamento algébrico foi trabalhado nas sessões conjuntas de formação no ano em que Leonor já não se encontrava a frequentar o programa. Contudo, foram-lhe fornecidos os materiais que foram produzidos pela equipa de formadores e foi-lhe pedido que, se possível e se fosse da sua concordância, trabalhasse autonomamente nas aulas observadas tópicos relacionados com esta temática. Assim aconteceu, tendo Leonor dedicado as aulas do segundo ano de contacto maioritariamente ao desenvolvimento do sentido do número, particularmente à descoberta de padrões numéricos que facilitem o cálculo mental, como condição prévia para a emergência do pensamento algébrico, já que se trata de uma turma do 1.º ano de escolaridade.

Padrões de repetição em sequências. Na primeira aula do segundo ano, na sua turma do 1.º ano, Leonor optou por explorar padrões de repetição em sequências de figuras construídas por si com base numa tarefa com os mesmos objectivos realizada numa sessão conjunta do ano anterior. Para isso dispôs os 25 alunos sentados no chão em semicírculo à volta dum cartaz intitulado "A cidade da matemática" que pretende ser uma referência forte sobre os tópicos de matemática a trabalhar ao longo do ano. O cartaz, feito pela professora, ocupa uma parede inteira, é muito bonito e já tem outros trabalhos feitos anteriormente, está cheio de números com formas humanizadas, prédios e ruas. Começa por recordar alguns trabalhos anteriores presentes no cartaz, como um ligado à dezena. Aqui a professora procurou que associassem o mesmo número, 10, a muitas coisas, meninos, guarda chuvas, escolas, ... de modo a poderem abstrair a noção de número como conceito que se aplica a tudo , dizendo "a dezena é uma palavra mágica, porque se aplica a tudo o que nós quisermos, dez meninos, dez estradas, ...!" Neste dia tem como novidade três tiras grandes em cartolina (três "ruas") cada uma com uma calha na parte inferior onde assentam várias figuras em cartolina. A primeira exploração é feita com três tipos de gelados – de taça, de pau e de copinho – de quatro cores diferentes, em sequência, com algumas imagens viradas ao contrário que os alunos têm de descobrir quais são para manter a lógica da sequência: taça verde, copo verde, pau verde, taça rosa, copo rosa, pau rosa, taça amarela, copo amarelo, pau amarelo.

O trabalho é feito com toda a turma. A professora vai questionando vários alunos sobre a figura escondida e pergunta porquê. Mudou o padrão colocando gelado de cone e outras cores. Depois entrou noutro padrão (outra estrada) de joaninhas de quatro cores, e ainda noutra estrada estavam as quatro principais figuras geométricas de várias cores e com olhinhos - Figura 51.

Figura 51. Padrões de repetição

Começou por recordar os nomes das figuras. Nesta sequência já tinham que ir escolher à caixinha a peça que faltava na sequência, explicando porquê. Depois vieram melancias, barcos, carros, peixes e flores de tamanhos diferentes. Foi variando os padrões para completarem. O extracto seguinte procura dar ideia do trabalho desenvolvido:

Prof. O que será que está ali, Aluno1?
A[vários] É azul.
Prof. Chiu! Chiu!
Aluno1: Azul.
Prof. Será azul? Porquê? Ora explica lá porque é que tu achas que é azul.
Aluno1: Porque... porque a seguir do verde vem o amarelo. Está ali o vermelho. Não é? E a seguir vem o azul.
Prof. Pois, ele seguiu, ele andou à procura para ver quem morava?...
Aluno1: Ao lado.

Prof. ... ao lado direito do?...
$A_{\text{[vários]}}$ Vermelho.
Prof. ... do vermelho. Será que é azul?
$A_{\text{[vários]}}$ Sim.
Prof. Vamos lá ver!
[O Aluno1 vira o cartão confirmando a resposta – Joaninha azul]. (A1-2, 23/11/2007)

Leonor orientou sempre as tarefas. Os alunos são muito pequeninos, onze ainda têm 5 anos. Procurou que todos acompanhassem. Solicitava os que tinham mais dificuldades e controlava os outros para evitar que dessem a resposta e ia acompanhando o raciocínio do aluno e tentando compreender a sua lógica e também levá-lo à lógica geral. Exigia regras de intervenção, fazendo reparos aos alunos que não as seguiam. Pedia sempre a cada um que intervinha para explicar. “Porque é que tu achas que é assim?”

Leonor utiliza um tom de voz cativante e uma maneira de se exprimir que prende a atenção das crianças, parecendo sempre que está a contar histórias.

Apelava à descoberta do padrão: “Ora deixa cá ver. Vamos ver atrás outra vez a ver se aqui está alguma coisa organizada, a ver se há aqui uma sequência, se há aqui uma ordem”. Incentivava os alunos a pensar antes de responder: “Não é... Olha, meu amor! Não é dizer à sorte! Aqui nada é à sorte! Chiu! Olhem! Boca fechada. Vão olhar bem para isto... ”. Aproveitou para consolidar as cores em que alguns ainda têm inseguranças, e a lateralidade. Aproveitou para explorar as formas. Pôde trabalhar atributos como grande, médio, pequeno.

De vez em quando vai introduzindo elementos para manter o interesse, como por exemplo: “Cuidado que aqui há ratoeiras!” – e os alunos: “Ratoeiras? Que bom!” Esta tarefa conduziu à descoberta de termos escondidos em sequências e generalização das leis de cada uma, e em simultâneo desenvolveu a capacidade de comunicação dos alunos através da verbalização e explicação da escolha feita.

Na segunda parte da aula retomaram o seu lugar e resolveram uma ficha com padrões, devidamente enquadrada por uma história acerca da Paula, a irmã do Simão, que fez anos e a quem a mãe deu contas e fio para fazer colares. Os alunos deviam construir colares em representação no papel utilizando dois elementos – círculos e rectângulos, de várias cores, mas de modo a respeitar um padrão. A professora explica isso mesmo:

Agora vamos ver de que cor é que será esta. E depois o que será que se vai repetir aqui para a frente para o colar ficar bonito. Não é de qualquer maneira! Senão fica muito feio! E depois vocês vão ter que fazer o vosso colar com estas peças que aqui estão. Vão desenhar as peças... Vão

> estudar primeiro como é que vai ficar bonito. Vão ter que arranjar ali uma sequência direitinha. E vão tentar criar um colar a ficar mesmo, mesmo bonito. Tentem... Mas só podem utilizar estas peças e estas cores! Certo? Não se ponham aí a inventar outras figuras! São estas peças exactamente. E depois aqui é como nós fizemos ali, só que esta estradinha é dos animaizinhos. Eu não vou dizer nada. Vocês vão ter que descobrir qual é destas peças... (A1-2, 23/11/2007)

O padrão que se pretendia que os alunos descobrissem era "Rectângulo, bola, bola, rectângulo, bola, bola" alternado em seis cores diferentes: roxo, azul, laranja, verde, amarelo, vermelho. Nesta tarefa, para além da descoberta do padrão, estava em causa o contacto com as cores, que ainda nem todos identificam claramente, as formas geométricas, e o próprio grafismo, já que o desenho desta sequência com alguma perfeição é por si só um desafio para crianças de 5-6 anos. De seguida a professora pediu aos alunos que construíssem cada um o seu colar mas também respeitando um padrão de formas e cores. Surgiram soluções diferentes, umas com apenas duas cores, outras com uma profusão delas, e com alternância de formas, já que, como é natural, os alunos actuaram por analogia com o padrão apresentado inicialmente pela professora. Exemplos de módulos construídos: Círculo, rectângulo, duas cores; Círculo, círculo, triângulo, triângulo, quadrado, quadrado, rectângulo, rectângulo, quatro cores; círculo, triângulo, círculo, rectângulo, triângulo, quadrado, seis cores.

As crianças vão aprendendo a organizar e sistematizar o pensamento, a seguir uma lei de formação, uma ordem, uma regra. Construir é mais difícil que descobrir apenas o seguinte. Alguns enganam-se bastante no colar. Não sentem ainda bem a necessidade desta organização ou não conseguem segui-la à risca.

Houve uma menina que pôs as canetas de que ia precisar todas por ordem e disse que assim era mais fácil porque era só pegar – eram seis cores diferentes. A professora aproveitou para comentar para os outros a iniciativa da colega porque talvez lhes pudesse servir de modelo. Na segunda tarefa tinham uma certa liberdade, podiam escolher as peças e as cores, tinham de ser eles a construir o padrão.

Na tarefa seguinte, era dada a sequência figurativa "o esquilo, a galinha, o esquilo, a galinha, o esquilo, a galinha" e pedia-se para escolherem, entre alguns dados, qual era o elemento seguinte. Havia galinhas e esquilos de tamanhos diferentes e voltados para a esquerda e para a direita, de modo que os alunos tinham de descobrir o padrão e, além disso, ter atenção aos pormenores.

Os alunos reagiram muito bem a estas tarefas, tendo interiorizado o conceito global de padrão. Durante a reflexão a professora referiu que brevemente serão os alunos a construírem outros padrões para os colegas continuarem ou completarem:

> Isto agora… qualquer dia, por exemplo à tarde, ponho, por exemplo, dois a preparar a aula assim para quando os outros chegarem para eles inventarem… Até para quebrar um bocadinho e inventar outros. (RA1-2, 23/11/2007)

Referiu também que começou com estas sequências figurativas para que os alunos interiorizem o conceito de padrão, já que foi o primeiro trabalho deste género que realizou – está-se no início do 1.º ano – para em próximas abordagens introduzir sequências numéricas:

> Porque eu já tenho andado aí a saltar os degraus [na representação escolhida e ilustrada na Figura 52], a passar uns para os outros… Andam a saltar os degraus e eu vou ver se eles descobrem que é a mesma coisa. (RA1-2, 23/11/2007)

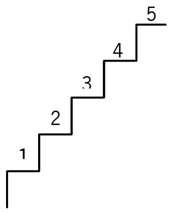


Figura 52. Esquema dos degraus da escada

Como exemplo de sequências numéricas que abordará referiu sequências de repetição do tipo 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 e também sequências de crescimento tais como: 2 4 6 8 10 ou 1 3 5 7 9. Nestes últimos procurará identificar com a subida das escadas de dois em dois degraus.

Padrões no cálculo mental. Na segunda aula do segundo ano Leonor trabalhou o cálculo mental. Os alunos estavam sentados em mesas duplas. Naquele tom de voz irresistível a professora anuncia que tem uma coisa a queimar no bolso e que quer passá-la a alguém. É um dado de uns 7 cm de aresta. Atira-o a um aluno e diz: de 2 em 2. O aluno começa a contar de 2 em 2 até 20 – usando imagens realísticas, a professora explica que a escada só tem 20 degraus e tem de se parar aí senão cai-se da escada abaixo. Faz meia dúzia de lançamentos e, para manter o interesse dos alunos, vai imprimindo muito ritmo à tarefa e dizendo que o dado lhe está a queimar nas mãos e que tem de o passar depressa. De seguida começam a contar a partir do número obtido pelas pintas que estão voltadas para cima quando recebem o dado:

Prof. Muito bem. Ai, que ele queima! Ai, que ele queima! Hm!... Esse vai saltar mais! Nós aqui, Aluno1. De 2 em 2.
[A professora entrega o dado ao Aluno1.]
Aluno1: 2...
Prof. 2.
Aluno1: ... 4, 6, 8...
Prof. 8. 2, 4, 6, 8?...
Aluno1: ... 10, 12, 14, 16, 18, 20.
Prof. Muito bem. Muito bem. Muito bem. Agora vai ser de 2 em 2 a partir do número que sair daqui da bolinha. Que vai sair daqui. Vamos ver as pintinhas que vão calhar aqui à Aluna2. Olha! Já vou?...
Aluna2: 6.
Prof. ... no 6. Estou no 6. Do 6 para cima. De 2 em 2. 6?... (A2-2, 25/01/2008)

Quando surgem números ímpares para iniciar, já a contagem percorre outro conjunto. Ao chegar ao 19 têm de parar porque é o último número antes do 20; esta questão é discutida com a turma. De seguida muda o “salto”:

Prof. Ai, mas eu agora estou com tanta pressa, tanta pressa!... Não vai ser de 2 em 2! Não vai ser de 2 em 2! Agora vai ser de 3 em 3!
$A_{[\text{vários}]}$ Eh!...
Prof. Vai ser de 3 em 3. Vamos cá ver. Eu queimo-me! Eu tenho-o que entregar senão eu começo-me a queimar!
Aluna 4: Ai, a mim.
Prof. Vamos cá ver. De 3 em 3. Chiu! Este já sabem que vale?...
$A_{[\text{vários}]}$ 1.
Prof. De 3 em 3 a partir de?...
[A professora entrega o dado à Aluna 5.]
$A_{[\text{vários}]}$ 3.
Prof. ... de 3. 3 em 3 a partir de 3.
Prof. e $A_{[\text{vários}]}$ 3...
Aluna 5: 5...
Prof. 3?... 3?... 3?...
Aluna 5: 8.
Prof. 3?...
Aluna 5: Ai! 6...
Prof. 6.
Aluna 5: ... 9...
Prof. 9.
Aluna 5: ... 12...
Prof. 12.
Aluna 5: ... 15...
Prof. 15.
Aluna 5: ... 18...
Prof. 18.
Aluna 5: ... parou. (A2-2, 25/01/2008)

O objecto “dado”, que cabe bem numa mão, começa por ser um símbolo do jogo, um testemunho que a professora passa ao aluno para indicar que deve ser ele a realizar a contagem. Só depois passou a ter um papel mais activo na tarefa, indicando o número onde devia começar a contagem. O zero, que os alunos já conhecem, é identificado com o patamar de partida antes de começar a subir a escada.

De seguida a professora desafia uma aluna a descer as escadas. Uma vez que estão no 20, ela vai ter de descer os degraus um a um para não cair. E a aluna, muito rapidamente, conta de 20 até zero. Leonor incentiva os meninos a treinarem, tal como quando fazem educação física para ficarem com os músculos mais soltos, a subir num instante os degraus de 2 em 2, de 3 em 3, de 4 em 4, de 5 em 5, por exemplo quando estão no recreio ou em casa. Valoriza assim o papel do treino e do esforço, mas sem que pareça uma coisa muito custosa; antes parece um jogo com que os alunos estão muito divertidos, cheio de imagens que podem apoiar a tarefa, como saltinhos nas escadas que vão a subir. De facto verifica-se que alguns alunos já as fazem muitíssimo bem e com muita desenvoltura. De notar que as contagens são feitas sem apoio dos dedos e sem apoio visual, apenas mentalmente, o que revela necessariamente um trabalho anterior.

Procurou a participação de todos. Solicitava os que tinham mais dificuldades e controlava os outros para evitar que dessem a resposta. Comentou na reflexão que tenta que todos acompanhem estas primeiras aprendizagens, embora reconheça que meia dúzia têm mais dificuldades por serem mais imaturos, mas tenta equilibrar e compatibilizar os diferentes ritmos "para não começar já a fazer grupos de desempenho". Procura "puxar" por todos na medida das suas capacidades de momento.

A 2.ª tarefa baseou-se num texto de António Torrado acerca de uma história de macacos e das bananas que eles comiam. Leonor colou no quadro algumas imagens de macacos em diferentes posições divertidas, com que as crianças deliraram. Era um texto bastante grande que a professora foi lendo e, nas pausas, os alunos iam registando no papel fornecido a distribuição das bananas pelas refeições ao longo do dia, começando com 10 bananas de uma só vez até 2, 3, 4, 5 refeições com algumas bananas de cada vez. A história baseia-se no facto de os macacos ficarem sempre com fome, porque a dose não aumentava, era só distribuída ao longo do dia!

A transição entre o número de refeições diárias era explicada do seguinte modo pela professora:

Prof. Ora bem. A macacada ficou toda satisfeita. Ai, o tratador é nosso amigo! Em vez de vir uma vez veio duas. Trouxe-nos 5 bananas. Mas eles não estavam a contar muito bem. Porque eles no início ficaram todos contentes, todos contentes. Mas passado algum tempo a barriga começou outra vez... Ai, parece que estamos... Comemos duas vezes e parece que estamos com fome! E começaram outra vez a fazer assim muito barulho a pedir mais bananas. E diz o tratador: – Ai querem mais?! Não vos chega?! Pronto. Está bem. Vão ganhar mais uma refeição. E diz ele: – Vão comer na merenda, à tarde, assim à tardinha. Vão fazer outra na merenda. Então vão passar a comer... Vamos lá ver. Vão passar a comer... Ajudem! Senão depois perco-me! Esqueço-me do que está aí.

A1 Almoço. Almoço.

Prof. Vão passar a comer 4 bananas ao almoço e 2 à merenda.

A2 E ao jantar?

Prof. E 4 ao jantar.

A3 Oh! Fica igual.

Prof. Pois. Isso vês tu, mas os macaquinhos acho que não estavam muito a ver essa situação. Quantos é que deu nesse dia? Vamos lá ver quantos deu nesse dia. Vamos lá fazer. (A2-2, 25/01/2008)

A questão era: "Porque é que a macacada continua com fome?" Os alunos, através do registo, podiam ir verificando que em todas as situações os macacos comiam sempre as mesmas dez bananas.

Esta tarefa trabalhou as decomposições do 10 em duas, três, quatro e cinco parcelas, mas duma forma muito orientada; as decomposições já estavam feitas, tratava-se de descobrir que correspondiam ao mesmo número.

Na última parte puderam ainda explorar situações de números decimais, já que o texto acabava como segue:

Entretanto o tratador enquanto ia para casa e continuava a fazer contas, contas e mais contas. Ele tinha mais soluções para resolver o problema. Segundo parece, consta-se que até foi a uma loja comprar uma faca para cortar as bananas. (A2-2, 25/01/2008)

Então seguiu-se o diálogo:

Aluna 1: Ah! Já sei. Vai cortar ao meio.

Prof. E se contasse ao meio uma banana o que é que podia acontecer?

Aluna 2: Meia banana.

Prof. Dava meia banana. Ainda podia ficar ir lá mais vezes durante o dia. Não é?

Aluna 2: Era 11. 11.

Prof. Se partisse as 10 bananas... se partisse as 10 bananas...

Aluno 3: Ficavam... Eu sei quantas ficavam.

Prof. Chiu! Calou. Não é dizer à sorte, Aluna 2. Estão as 10 bananas. Eu chegava a cada banana e partia com a faca. Eu quantos pedaços é que tinha no fim?

Aluna 4: Eu sei, professora!

$A_{[\text{vários}]}$ Eu sei.

Aluna 2: 10.

Prof. Tenho 10 bananas. 10 bananas.
[À medida que a professora esboça no quadro 10 bananas vão contando.]

Prof. e $A_{[\text{vários}]}$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Prof. Com uma faca eu partia as bananas a meio. Eu não vou partir todas [Dividindo 3 bananas ao meio]. Olhem para lá!

Aluno 4: Partimos só 3? Só 3?

Prof. Chiu! Vejam lá. Quantos pedaços é que eu ficava ali?

Aluno 4: Partimos só 3?
Prof. Só parti 3. Eu queria partir todas. Eu quero que vocês agora vejam isso. Aluna 5!
Aluna 5: 20. (A2-2, 25/01/2008)

A 3.ª tarefa consistiu em decompor o 14 com o pretexto de dar mais bananas aos macacos para eles não terem fome, mas repartidas por várias refeições. Para esta tarefa, os alunos puderam contar, cada um, com o apoio de uma recta numérica plastificada com que já tinham trabalhado anteriormente. Depois de escolher a 1.ª parcela, descobriam qual era a 2.ª ou as seguintes de modo a perfazer 14. A professora apoiava os que tinham mais dificuldades explicando isso mesmo:

> Mas quem está um bocadinho aflito... Por exemplo, vai até ao 14. Ao fazerem 3 saquinhos eu até quase nem preciso de olhar! Eu vejo assim mais ou menos... Olhem! 3 saquinhos: 1, 2, 3. Eu defino mais ou menos onde quero e depois só pomos saltinhos, tum, tum, tum, até dar o 14. Podem ser saltinhos pequeninos, podem ser mais longos, mas desce que conte os saltinhos que dei... Podem ser saltinhos de uma formiga, saltinhos de um coelhinho, saltinhos... Mas tem que dar até 14. (A2-2, 25/01/2008)

Todos os alunos foram fazendo decomposições do 14 sem que houvesse a preocupação de sistematizar. Foram fazendo o respectivo registo. Contudo, verificou-se que vários procuravam já sistematizar: 1+13, 2+12; 3+11; ... (ver Figura 53) e descobriam mesmo o padrão em que uma parcela aumenta uma unidade e a outra diminui uma unidade. A professora a certa altura chamou a atenção para a ordem que podiam seguir para apanhar mais hipóteses, embora tenha dado liberdade para eles escolherem as parcelas que quisessem.

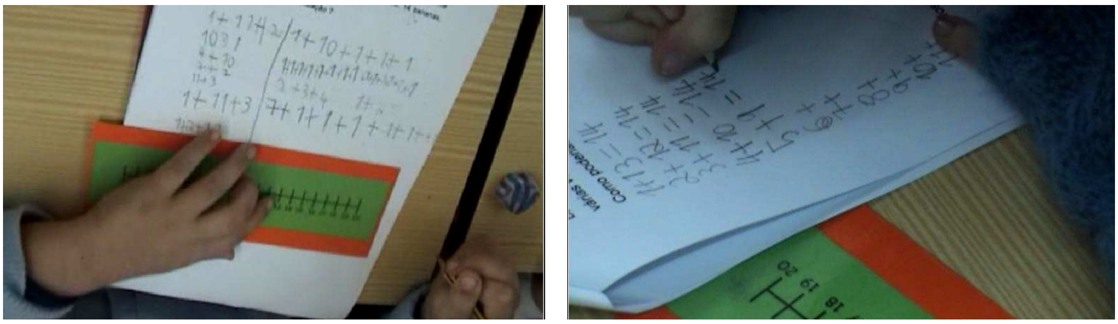


Figura 53. A partição das 14 bananas

Ainda puderam, nesta aula, fazer decomposições do 18 pelo mesmo processo.

Já se sentiu uma grande diferença nestes alunos; têm as regras mais interiorizadas, já começam a ler e a escrever, o que lhes facilita o trabalho, e contam e decompõem números com grande desenvoltura.

Finalmente, na 4.ª e última aula, já no fim desse ano lectivo, Leonor considerou que seria a altura de os alunos serem testados nas suas competências de cálculo mental. Cada aluno estava armado de um "computador" que era uma tabela dos cem de 20cm por 15cm aproximadamente, plastificada, que usariam como apoio para responder às perguntas que a formadora quisesse fazer-lhes. Sem saber até onde podia ir para não os embaraçar, começou por 3+10. Ouviu-se logo um uf! geral de desdém, como quem diz: "Que fácil, isso não tem interesse nenhum!" Aos poucos avançou-se para questões mais complexas, uma a cada um, a eito, e o resultado foi o seguinte: houve pouquíssimos que não responderam à primeira, e ao pedir-lhes para explicar faziam-no perfeitamente, alguns usando a metáfora criada pela professora de que podiam ir pelas escadas de degrau em degrau mas também podiam ir de elevador descendo logo um andar (10 degraus) ou dois (10+10), etc., que era muito mais eficiente.

Inv. [Virando-se para a Aluna 1] 27 mais 11?
Aluna 1: 38.
Inv. Boa. Como é que tu fizeste, explica lá?
Aluna 1: É assim, estava no 28, desci para baixo…
Prof. Não. Estavas no 27.
Inv. Estavas no 27.
Aluna 1: 27. Desci para baixo e dei um passo para aquele número. (A4, 12/06/2008)

Houve até alguns que disseram que já não precisavam do computador, porque o melhor computador era a cabeça, e punham a tabela de lado:

Inv. Boa. [Virando-se para o Aluno 2] Tu. Então vá. Esta é difícil! 29…
Prof. Escondeu o computador ele.
Inv. Ah, escondeu o computador e é difícil!
Prof. Fechou. Ele fechou.
Inv. Vê lá. 29 mais 20?
Aluno 2: 29 mais 20, 49.
Inv. Muito bem. Como é que tu fizeste?
Aluno 2: Fiz 29 mais 10 é 39, mais 10 é 49. (A4, 12/06/2008)

Quando acabou a ronda a todos os 25 alunos, houve um que achou que era a vez de a professora perguntar à visitante! A professora sugeriu então que fossem eles a perguntar, mas teriam de saber a resposta. Entre outras perguntas difíceis, do tipo 600+600, 110+105, surgiu a pior de todas: “Infinito mais cem?”.

Distribuiu depois uma pequena tarefa para completarem uns espaços em que intervinham somas e diferenças, com a recomendação de arrumarem os “computadores” porque estas eram para fazer de cabeça, e finalmente a última tarefa surgiu no contexto da história do Sr. Joaquim que tinha 50 moedas de euro e queria guardá-las nos seus dois bolsos. Os alunos teriam de descobrir modos de o fazer. Esta tarefa possibilitou a decomposição do 50 em duas parcelas de muitas maneiras diferentes. Todos fizeram pelo menos cinco, mas houve vários que encheram a página. Ainda apareceram decomposições do tipo: 20+20+10 que eram logo desmontadas com a pergunta: “O sr. Joaquim tem quantos bolsos?”

A maioria usou a representação habitual, 20+30 ou 49+1=50, mas alguns desenharam o Sr. Joaquim e outros registaram o desenho dos bolsos. Eis na Figura 54 duas das representações usadas:

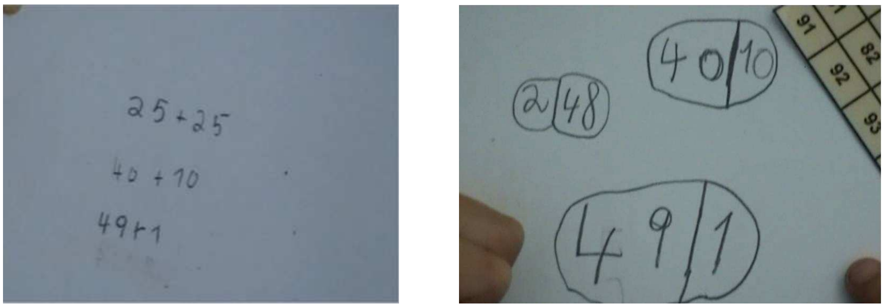


Figura 54. Representações de modos de guardar cinquenta moedas em dois bolsos

Uma menina tinha 50+0=50. Questionada sobre o que aquilo queria dizer, respondeu: «Ele tinha 50 num bolso e o outro tinha “bacio”».

Note-se que as hipóteses escolhidas, embora muitas, eram de modo geral com dezenas certas, e.g. 20+30, ou então partidas no 5, do tipo 25+25, ou ainda um número muito pequeno e outro muito grande e.g. 47+3. Mas surgiram outras situações: um aluno pegou à sorte num número por saber que é menor do que 50, foi o 17. E não conseguia descobrir quanto faltava para 50 para colocar no outro bolso. A professora, sabendo que ainda não tinha trabalhado bem esta questão, correspondente à interpretação da subtracção como “completar”, aproveitou para fornecer um modelo, com base na tabela dos cem, que tinha afixada no quadro. Explicou então ao aluno, e também aos outros, a quem solicitou a atenção, que podia ir de elevador do 17 até perto do 50 (neste caso até ao 47) e depois ir pelos degraus:

Prof.	Ora, eu tenho que contar o que vai do 17 aaa... aaa...
$A_{[vários]}$	Até.
Prof.	... até ao?...
$A_{[vários]}$	50.
Prof.	Eu tenho que contar estes até chegar aqui [ao 50].
$A_{[vários]}$	Eu sei.
Prof.	Olhem! Então eu tenho duas hipóteses. [Chamando à atenção] Aluno 1, mais uma vez... O que é que eu tenho? Eu posso contar um a um, não é? Posso contar as unidades todas. Ou então posso ir de elevador, não é? 17, se eu saltar para aqui [27], quantos é que eu andei? 17...
$A_{[vários]}$	10.
Prof.	10. [Apontando para o 37.]
$A_{[vários]}$	20.
Prof.	20. [Apontando para o 47.]
$A_{[vários]}$	30.
Prof.	30.
$A_{[vários]}$	31, 32, 33. (A4, 12/06/2008)

Depois deste trabalho uma aluna disse logo a seguir: “Já fiz mais três com o truque que a professora ensinou agora”.

Foi realmente muito interessante poder observar e testar o progresso destes alunos tão novos ao longo deste ano lectivo e a facilidade que no final do ano demonstram no cálculo mental. Na reflexão a professora fez questão de sublinhar que esta competência não se atinge da noite para o dia, é preciso valorizar e trabalhar muito, insistir, treinar... Referiu que costuma, em cada dia, escolher um número, por exemplo, hoje é o dia do 10; e então, uns minutinhos de vez em quando ao longo do dia, vai perguntando, insistindo, explicando, pedindo explicações sobre o modo de adicionar ou subtrair 10. Amanhã já é o dia do 11, ou do 15, ou do 9, etc.

Relacionamento entre operações. Na 3.ª aula a professora fez também alguns exercícios de cálculo mental antes de passar à tarefa principal. Os exercícios, propositadamente repetitivos, eram do tipo: 6+2; 16+2; 26+2; 36+2; 46+2. 4+3; 14+3; 24+3; 34+3. 5+4; 15+4; 25+4; 35+4.

E depois, com a ajuda da tabela dos cem parcialmente escrita no quadro – até 50, trabalhou as somas:

12+10; 16+10; 18+10; 24+10; 36+10; 42+10;...

Leonor procurava nos dois casos que se apercebessem dos padrões numéricos da soma com 2, com 3, com 4, e finalmente com 10.

Sobretudo neste último caso, deu relevo ao tipo de movimentos possíveis. Tanto se podia ir pelos degraus de um em um dando 10 saltinhos como passar directamente para a casinha de baixo na tabela. Aproveitou também para relacionar com a operação inversa:

Prof.	Olha, olha! 26, 27... Olha! ... 10 saltinhos.
Prof. e $A_{[vários]}$	[Em coro] 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Prof.	Para onde é que eu vim parar? Eu vim parar para?...
$A_{[vários]}$	Baixo.
Prof.	... baixo. Vim parar logo para o degrau ali debaixo. E agora deixa-me cá ver esta: 38 mais 10? É o Aluno 1.
Aluno 1:	48.
Prof.	48. E 48 menos 10, Aluna 2?
Aluna 2:	38. (A3-2, 18/04/2008)

Prosseguiu assim para mais alguns casos, familiarizando os alunos com este processo de reversibilidade de pensamento.

Problemas de padrão – descoberta de invariantes numéricos. A tarefa principal da 3.ª aula baseou-se num "acontecimento". O correio, que chega todas as semanas a uma caixa que está na sala, trazia hoje uma encomenda dos amigos da matemática, a Paula e o Simão.

Leonor contou que esses meninos queriam plantar uma oliveira (aproveitou para falar nessa árvore) e o Simão, ao cavar a terra, encontrou um objecto que tiraram: era um cofre! Abriram o cofre e encontraram uma folha lá dentro. Recheia a história de pormenores emocionantes do género: «até as mãos lhe tremiam», a Paula disse: «e se está uma cobra?!», a fotocópia está estragada porque o papel era mesmo muito velho... O bilhete encontrado dentro do cofre continha um código secreto com três regras: 1.º Para abrires o baú tens de saber jogar o aritmógono; 2.º Acertar todas as pistas; 3.º Decifrar as mensagens secretas que lá vão estar.

A tarefa do aritmógono[17] tinha sido sugerida na formação num momento em que Leonor já não a frequentava mas tinha tido acesso à documentação. Contudo, deu-lhe um cunho muito pessoal com um enquadramento motivador.

[17] Adaptada de Mason & Johnston-Wilder, 2006.

Os alunos trabalham a pares. Leonor entrega a cada um uma fotocópia do documento encontrado para que possam desvendar o mistério. Começa por explicar como funciona cada linha, informando que no quadradinho do meio devem pôr a soma dos números que estão nos círculos, como pode ver-se na Figura 55:

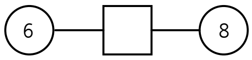


Figura 55. Linha do aritmógono

Entretanto, para dar mais emoção à tarefa, havia um descodificador de correspondências números-letras e símbolos-letras para poderem desvendar determinadas mensagens. Uma delas era “Mapa do tesouro”.

Os primeiros aritmógonos para os alunos completarem eram do tipo ilustrado na Figura 56.

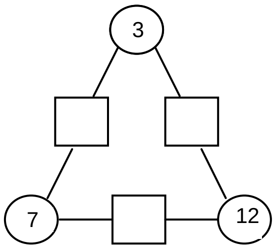


Figura 56. Aritmógono

Esta primeira tarefa revelou-se fácil. Mas depois de completarem alguns a tarefa complicou-se, pois o seguinte tinha preenchidos os quadrados e era necessário descobrir os números dos círculos, como se mostra na Figura 57.

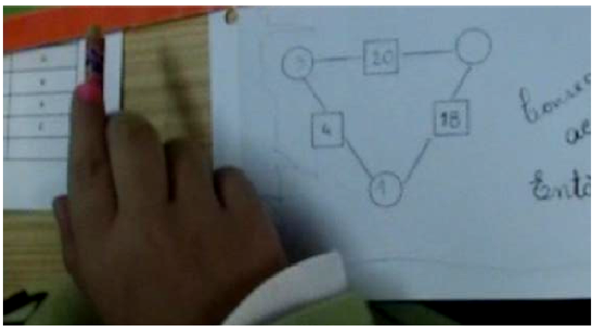


Figura 57. Aritmógono - versão inversa

Aqui, os alunos, para além de terem de pensar inversamente, de modo a descobrir parcelas que produzem aquela soma, precisam ainda de atender a várias condições simultaneamente, o que não é fácil para um 1.º ano. A estratégia usada para este problema foi a de tentativas. Entretanto, a professora ia incentivando os alunos:

> Não podem é desistir! Olhar e à primeira impressão: "Olha, não dá. Não consigo." Nem pensar! Temos que tentar, tentar e se errarmos… e se errarmos pegamos numa safa, safamos e tentamos outra vez até conseguir. Ou com régua, ou na cabeça, nós temos que arranjar caminhos para lá chegar. (A3, 18/04/2008)

De seguida, pedia-se para cada um inventar o seu aritmógono. A professora pôs como condição não usarem números superiores a 15. Uns alunos construíram logo um de sua invenção, começando pelos círculos e preenchendo depois os quadrados. Na última etapa pretendia-se que cada um, para o seu esquema, adicionasse os valores dos círculos, e depois os dos quadrados, e procurasse descobrir uma relação entre estas somas. Nesta parte houve a oportunidade para aplicarem as suas estratégias de cálculo mental. No entanto, nalguns casos a tarefa revelou-se muito difícil pois os números em jogo eram já bastante grandes e muitas das crianças não tinham ainda destreza de cálculo para lidar com parcelas tão altas como as que figuravam nos quadrados de alguns deles. Por exemplo, um tinha: 21+22+29. Lá foram, com alguma ajuda, realizando estes cálculos. A descoberta da relação entre a soma dos quadrados e a soma dos triângulos foi também possível:

Prof.	Olhem! Vou-vos fazer uma pergunta. Olhem para o resultado… para o resultado da soma dos círculos e para o resultado dos quadrados. Que relação é que estes números têm? Ora olhem! Por exemplo… Eu vou pegar aqui nos números mais baixinhos. A Aluna 1 deu-lhe: nos círculos deu-lhe 6, nos quadrados deu-lhe 12. O que é o 6 em relação ao 12? Ora pensem.
$A_{[\text{vários}]}$	Mais 6.
Prof.	Mais 6.
$A_{[\text{vários}]}$	Mais 6.
Prof.	Ou seja, o que deu nos quadrados é o?… Quem sabe esta palavra?
Ruben:	Ao meio.
Prof.	Ao meio?!
	[Ouve-se algumas gargalhadas dos alunos.]
Prof.	Essa… Ouçam! À Tânia deu-lhe, quando juntou os círculos, deu-lhe 6, quando juntou os quadrados, deu-lhe…
$A_{[\text{vários}]}$	12.
Prof.	… 12. Não chegam a nenhuma conclusão? Olha deixem-me cá ver outro! Deixa-me cá ver um.
$A_{[\text{vários}]}$	O dobro.
[…]	
Prof.	Ah! Olhem, à Aluna 4 deu-lhe 10 e quando juntou os quadrados deu-lhe?…
Aluno 2:	5.
Prof.	Deu-lhe?… Se é o dobro!…
$A_{[\text{vários}]}$	É 20.
Prof.	20. A ela deu-lhe 10 nos círculos e os quadrados deu-lhe 20.
Aluno 3:	E a mim também… A mim também…

Prof. [Apontando para os alunos do seu lado direito] Vocês, será que também deu exactamente o dobro? Esses números são maiores. Ora vamos ver.
[Ouve-se vários alunos a falarem em simultâneo.]
Prof. Chiu! Vá. Olhem, a Aluna 5 diz que os círculos deu-lhe 24 e os quadrados deu-lhe 48. Será que 24 mais 24 é 48?
$A_{[vários]}$ Não.
Prof. Não? Ora vamos cá... que eu vou... Vamos relembrar isto. Lembram-se? Vamos fazer uma maneira mais rápida [Escrevendo no quadro o algoritmo em pé]. Lembram-se? Lembram-se?
$A_{[vários]}$ Ah!...
Prof. Ah! Como era? Por onde é que eu começo?
$A_{[vários]}$ Por 4.
Prof. Pelas?...
$A_{[vários]}$ Unidades.
Prof. ... unidades. E então como é que eu fazia?
$A_{[vários]}$ 4 mais 4...
Prof. 4 mais 4...
$A_{[vários]}$ ... é 8.
Prof. E aqui quem é que mora?
$A_{[vários]}$ As dezenas.
Aluno 6: É 48.
Prof. E aqui.
$A_{[vários]}$ 48.
Prof. Dá, ou não dá 48?
$A_{[vários]}$ Dá. (A3-2, 18/04/2008)

Assim, os alunos acabaram por fazer a generalização necessária, descobrindo que, em todos os casos, a soma dos números presentes nos quadrados era sempre igual ao dobro da soma dos números existentes nos círculos.

De notar que Leonor já tinha iniciado os alunos no algoritmo da adição para os casos de números maiores. Na reflexão da aula contou que, quando ensinou o algoritmo, os alunos ficaram tão entusiasmados com a descoberta que um até disse que ia ensinar ao pai, pois decerto ele não sabia e isso ia-lhe facilitar muito a vida! A formadora comentou que o algoritmo não deverá ser trabalhado muito precocemente pois pode inibir a descoberta de estratégias de cálculo mental e consequente mecanização dos factos numéricos, mas Leonor defende que não é essa a sua intenção, pois continua a trabalhar intensamente o cálculo mental e a descoberta de padrões na estrutura numérica, reservando o algoritmo apenas como outra ferramenta para os casos de números maiores em que o cálculo mental se torna difícil.

Na última parte da aula os alunos tiveram de descodificar uma frase que resumia o conteúdo do segredo: "Moedas de ouro", tal como mostra o trabalho da Figura 58. Quando o conseguiram, receberam cada um uma moeda de ouro (de chocolate) antes de ir para o intervalo.

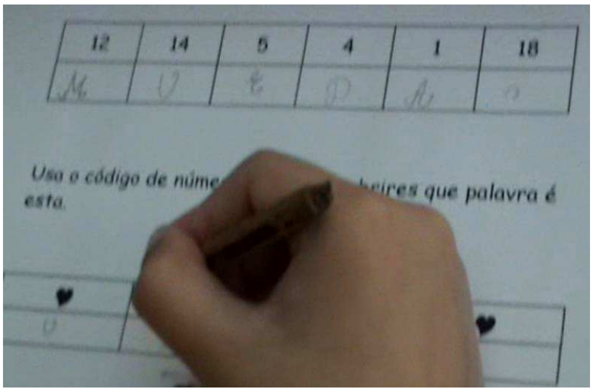


Figura 58. Descodificação da mensagem

O trabalho autónomo

Leonor frequentou o segundo ano de formação em 2006/07 e durante esse ano lectivo a proposta de trabalho autónomo foi apresentada de acordo com um guião em que se pedia que escolhessem uma das seguintes sugestões: (a) Planificar em conjunto tarefas para a sala de aula directamente aplicáveis nessa quinzena e reflectir com os colegas sobre a implementação que fizeram das tarefas planificadas, nomeadamente nos seus pontos fortes e fracos e na evolução do conhecimento matemático; (b) Aprofundar conceitos matemáticos cuja necessidade seja suscitada pela prática; (c) Desenvolver um projecto conjunto que, preferencialmente, abranja todos os anos de escolaridade, com o objectivo de aplicar nas suas turmas e apresentar na sessão colectiva, discriminando os seguintes aspectos: Exploração; Aspectos de Implementação; Dificuldades/modos de superar.

Leonor fazia parte de um grupo de formandos no segundo ano que, em conversa conjunta com a formadora, decidiram desenvolver um projecto de desenvolvimento do cálculo mental denominado "As olimpíadas do cálculo mental". Este projecto deveria reunir os contributos de todos. Foram distribuídas tarefas. Leonor trabalhou na sua escola com uma outra formanda do mesmo grupo que era professora de apoio socioeducativo e prestava apoio a alunos da sua turma. Em conjunto desenvolveram uma série de tarefas que implementaram nessa turma do 2.º ano de que Leonor era titular durante uma manhã em que metade do tempo era da responsabilidade mais directa de cada uma das professoras. Passa-se de seguida a especificar alguns pormenores do trabalho desenvolvido.

Numa outra aula anterior Leonor já começou a relacionar as tarefas com os jogos olímpicos do cálculo mental, desenvolvendo duas tarefas. Na primeira colocou um cartão com um número pendurado num fio ao pescoço de cada aluno e disse que teriam de sair para o corredor e aí organizarem-se em grupos de dois, três, quatro, como quisessem, mas de modo que o conjunto fosse par. Esta tarefa foi muito interessante pois trabalhou com os números pares e ímpares e forneceu também uma oportunidade de cálculo mental. De notar o seguinte episódio: Dois alunos que se juntaram não conseguiram fazer a soma mentalmente, pois tinham os números 85 e 57, mas entraram confiantes pois sabiam que o seu resultado era par, já que eram ambos ímpares. Outra tarefa foi designada "Acerta no alvo", e os alunos estavam dispostos em grupos. Colou um alvo no quadro com números marcados no círculo central e nas coroas circulares seguintes. Vendava os alhos a um aluno de cada grupo, à vez, e este, com uma canetinha na mão, devia seguir as instruções dos colegas de grupo, do tipo: "avança um passo, à direita, levanta o braço, não piques", etc., para tentar acertar no alvo. Iam sendo feitos os registos dos números acertados e no fim cada grupo adicionava os seus pontos. Para ajudar o cálculo a professora mandou abrir o envelope da matemática, onde já estavam alguns materiais construídos entretanto pelos alunos, e tirar o "ábaco", constituído por uma reguinha de madeira fina subdividida em três áreas, centenas, dezenas e unidades, e vários quadradinhos de cor diferentes, brancos para as unidades, vermelhos para as dezenas e verdes para as centenas – ver Figura 59.

Foi um exercício de orientação espacial e lateralidade seguido de outro de cálculo de somas de números da ordem das dezenas e centenas, em que houve oportunidade de trabalho colaborativo.

Figura 59. Acerta no alvo

Na segunda aula começou por um problema de vários passos, a viagem de autocarro, que envolvia entrada e saída de passageiros e cujo objectivo é o desenvolvimento do cálculo mental. Individualmente cada um segue a viagem do autocarro e vai vendo quantos passageiros entram e saem para no final saber quantos chegaram.

No início deu indicações aos alunos para fazerem cálculo mental, mas registando os valores para se ver o caminho seguido, só quem não conseguisse mesmo é que fazia o cálculo escrito. No fim fez a síntese. Alguns explicitam as suas estratégias de cálculo mental. A professora vai questionando para os levar a verbalizar o pensamento:

Prof. Como se aproximava a hora de entrada nas escolas e em muitos empregos entraram 10 crianças e 11 senhores. Aluna 1, como é que nós fazemos agora? Como pensaste? Ora diz lá.
Aluna 1: Aqui em vez de pôr mais mais, juntei logo.
Prof. Pois. A Aluna 1 diz que em vez de pôr mais mais mais… Qual era o mais mais mais? Como é que eu pensava? 42?…
A[vários] … mais 21.
Aluno 2: [Em simultâneo com os anteriores] 42 mais 21.
Prof. E esse 21 o que era, Aluno 3? Aí não diz 21! O que seria esse 21?
Aluno 3: Pois não. Juntar.
Aluna 1: Juntar…
Aluno 3: Juntámos.
Prof. Juntámos o quê?
Aluno 3: Juntámos o 42 com aqueles, com o 10 e com o 11.

ou apontando resoluções alternativas:

Prof. 19 passageiros dentro do autocarro. O autocarro seguiu viagem. 19 passageiros a andar, não é? Chegou à primeira paragem, entraram 10 passageiros. Aluno 1! Se entraram 10 passageiros, o que é que tu fizeste?
Aluno 4: 19 mais 10.
Prof. [Repetindo] 19 mais 10.
Aluno 4: E depois iam 29.
Prof. 29 passageiros dentro do autocarro. Toda a gente está a entender esta viagem até aqui?
A[vários] Sim.
[…]
Prof. 29 passageiros e o autocarro continua. O autocarro continua. Na segunda viagem… [Corrigindo-se] Na segunda paragem saíram duas pessoas e muitos de vocês até nem fizeram cálculos. Se saíram duas pessoas ficaram?…
Aluno 5: 28.
Prof. Ficaram?… Iam 29 saíram duas?…
A[vários] [Em coro] 27.
Prof. 27. Saíram duas pessoas e entraram 15. Então como é que eu vou pensar, Aluna 6?
Aluna 6: 17… [Corrigindo-se] 27 mais 15.
Prof. 27 mais 15. Tiram logo aquelas duas. 27 mais 15. O Aluno 8 fez de outra maneira. Sabem como é que ele fez?
Aluna 6: Não.

Prof. Ele pensou assim: Se saíram duas pessoas e entraram 15, em vez de tirar as duas pessoas ao autocarro, chegou aqui e tirou logo duas, que é como se tivessem entrado 13. Será que ele também pensou bem?

Aluno 7: Sim.

Prof. No fundo ele fez de outra maneira, mas também estava a pensar bem. No fundo no fundo, esquecendo que era a Senhora Maria, o Senhor António, só pensando num número, é como se tivesse entrado 13. Certo? Pronto. E o autocarro continuou com 42 pessoas. Está? (A5-1, 07/05/2007)

De seguida Leonor referiu os Jogos Olímpicos, as várias modalidades de que já tinham falado e as regras de participação em que todos têm de saber ganhar ou perder pois o que interessa é participar. E retomou o jogo Damas matemáticas, inventado por si e que já tinha sido apresentado aos alunos em aula anterior, e em que eles próprios tinham ajudado a construir as regras. É jogado a pares e cada jogo representa uma modalidade olímpica: Atletismo, Vela, Natação, etc. Este jogo é uma espécie de jogo das damas num tabuleiro de 5x5, como mostra a Figura 60, em que cada par tem três peças mas em que, ao avançar de umas casas para outras, vai-se adicionando os pontos indicados. Ao comer peça adversária também se adicionam 10 pontos.

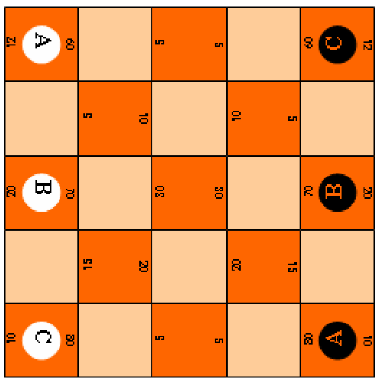


Figura 60. Tabuleiro do jogo Damas matemáticas

A professora chamou a atenção para as regras a cumprir:

Aluna 1: Ninguém goza um com o outro.

Prof. Ninguém goza um com o outro. Vamos dar tempo ao tempo.

Aluno 2: Ninguém chora.

Prof. Quem conseguir fazer os cálculos mentalmente, o resultado dentro da?...

A[vários] Roda.

Prof. ... rodinha. Fazer primeiro esse esforço, que é para ser mais rápido. Quem fizer isso acaba mais depressa o jogo. Avançamos para o outro. Se quem não conseguir mesmo mesmo mesmo, pronto, faz a continha. Concentra-se e tenta fazer. No fim a rodinha outra vez. A peça quando está a comer junta-se esses?...

Aluna 3: 10.

Prof. ... esses pontos. Quando come alguma peça junta mais?...
A[vários] 10.
Prof. ... mais 10 pontos. Há mais regras que eles falaram, que estiveram eles a fazer essas regras que ao chegar ao fim da meta ainda tinha mais 20 ou assim. Mas alguns meninos, para não se perderem já, para já não pomos esses. Optámos pôr 10 pontos a cada peça que se coma. Está bom? Pronto. Quando já estiver bem interiorizado essas regras depois fazemos novas regras. (A5-1, 07/05/2007)

Lembra também que cada elemento do par tem de controlar as contas do colega para não haver enganos.

Vão-se vendo jogadas como esta nos diferentes grupos:

O Aluno 1 desloca a peça A da posição 110 para a 40. O Aluno 2 registra os pontos obtidos na folha de registo: 110+40=150 pontos para a peça A. Segue-se a vez do Aluno 3 da posição 120 para a 50. A Aluna 4 regista os pontos: 170.]
Prof. Siga. Uma rodinha. Olha! Não se esqueçam de fazer a rodinha no resultado, na soma, quando tiverem feito mentalmente. (A5-1, 07/05/2007)

Também é preciso por vezes tomar decisões:

Aluna 4: A Aluna 5 pode comer de duas maneiras. Assim [Referindo-se à passagem da peça B da posição 70 para a 5, passando sobre a peça A da equipa adversária] e assim [Referindo-se à passagem da peça A da posição 60 para a 30, passando sobre a peça A da equipa adversária]. (A5-1, 07/05/2007)

No fim deste jogo a professora contou a história do inventor do xadrez, Sessa, e do prémio que ele pediu ao rei pela invenção: 1 grão de arroz pela 1.ª casa, 2 pela 2.ª casa, 4 pela 3.ª casa e assim duplicando sempre até à última casa. Aqui a professora lembrou que o tabuleiro de xadrez é maior do que aquele com que estão a jogar: tem 64 casas. E perguntou aos alunos se ele teria feito bom negócio.

Prof. E o Rei começou-se a rir. «Olha, olha que louco! Olha o que ele me pediu! Eu a dizer que lhe dava o que ele quisesse e ele pede-me uma coisa destas! Meia duzinha de grãos de arroz!» Será que ele fez um bom negócio, ou não?
A[vários] Fez.
Prof. Será?
Aluno1: Será sim.
A[vários] Sim.
Prof. Porquê Aluno1?
Aluno1: Porque depois ele... O Rei não lhe deu e depois ele construiu tudo.
Aluno2: Posso ser eu? Porque ele estava a dar de comer aos pobres.
Aluna 3: É isso que eu ia dizer.
Prof. Mas será que ele ganhou muito arroz, pouco...?
A[vários] Muito.
Prof. Vou-vos fazer um desafio só. Só vos vou pedir isto. Em duas linhas do vosso tabuleiro... Duas. Por exemplo, nestas duas linhas [Exemplificando com um tabuleiro 5x5]. Vocês só vão fazer os cálculos destas duas linhas e vão ver quantos grãos de arroz é que ele

ganhava só com estas duas linhas. Ou seja, aqui 1 grão [Apontando para a 1.ª casa]. Aqui?... [Apontando para a 2..ª casa do tabuleiro]

Aluno 4: É o dobro.
Prof. É o dobro deste. Quanto é o dobro deste?
Aluna 5: 2.
Prof. Aqui?... [Apontando para a 3.ª casa do tabuleiro]
A[vários] 4.
Prof. ... 4. Aqui?... [Apontando para a 4.ª casa do tabuleiro]
A[vários] 6.
Prof. Dobro de 4!?
A[vários] 8. (A5-1, 07/05/2007)

De dobro em dobro chegaram a 1024 tendo concluído que no outro tabuleiro muito maior, e sempre a passar para o dobro, ele iria realmente receber muitos grãos – tantos, que nem toda a produção da Índia durante cem anos chegaria para pagar!

Entretanto houve um aluno que, entusiasmado com a história, chegou a calcular até à 15.ª casa, obtendo o resultado 32 768. Por fim a professora entregou uma pequena ficha em que os alunos deviam continuar a usar cálculo mental para completar uns números em triângulo com o fim de receberem uma medalha de participação nas damas matemáticas, que entregou a todos os alunos.

Na continuação, depois do intervalo, a colega fez um trabalho no exterior, A corrida dos 100 metros, em que era necessário o uso de relógio e fitas métricas para medição do espaço de corrida percorrido em 30 segundos e em que intervinha a necessidade de vários cálculos mentais. Este trabalho foi complementado em sala de aula.

O trabalho com a colega decorreu muito bem mas o problema foi organizarem-se ao nível do grupo de nove formandos. As intervenções de uns foram muito maiores do que as de outros, e concretamente a de Leonor, que se empenhou muito, o que a levou a comentar no fim do ano: "No trabalho autónomo houve pouco empenhamento por parte das pessoas" (E3, 09/07/2007). Leonor comenta ainda que este trabalho autónomo foi um excesso de trabalho que não foi reconhecido institucionalmente, já que os formandos do segundo ano têm menos créditos que os do primeiro. Ainda assim, foi feita na sessão colectiva do fim do ano lectivo uma apresentação em *power point* em que se apresentavam curiosidades sobre os Jogos Olímpicos antigos e actuais e alguns relatos de tarefas feitas com os alunos nesse âmbito.

O acompanhamento em sala de aula

Leonor considera que esta formação é muito diferente das que tem frequentado, e realça sobretudo como diferença o acompanhamento em sala de aula. Nesse particular, há uma dualidade nas suas impressões e sentimentos sobre a presença de uma pessoa exterior na aula. Por um lado considera positiva essa presença porque pode ser uma ajuda mas por outro há uma certa reserva e desconfiança em relação a esse processo já que pensa que existe uma grande exposição do professor observado que não está isenta de riscos:

> Quer dizer, é assim uma incógnita, porque a nossa avaliação pode ser vista... quer dizer, pode ir parar a muitos campos. Não é? Por exemplo, nós podemos estar a ser avaliados, sei lá, de muitas maneiras que nós até não conseguimos ver. É sempre assim: O que é que está por trás desta avaliação? É um risco a todos os níveis. É uma exposição que nós fazemos. (E2, 01/03/2007)

E comenta o facto de muitos colegas não quererem frequentar esta formação precisamente devido a essa exposição:

> Acho que... bem ou mal, acho que há uma coragem da parte das pessoas que fazem isso. Muita gente nem sequer dá o nome, porque nem tal coisa lhe passa pela cabeça ter ali uma pessoa a avaliar. (E2, 01/03/2007)

Parece que Leonor sente que pode estar a ser "usada" para fornecer informações ou estatísticas sobre o ensino da matemática no 1.º ciclo:

> Porque os estudos vêm... as investigações sobre os professores vêm cá para fora, não é, dizer que os professores têm pouca formação de matemática, que precisam de mais formação, que nota-se insegurança nas situações problemáticas, nota-se isto e aquilo. E, quer dizer, eu estou para mais conclusões dessas ou estou realmente numa formação de matemática em que só estou a trabalhar aquilo, a partilhar? Mais uma partilha ou mais uma avaliação? (E2, 01/03/2007)

É de notar que esta conversa decorreu em pleno período de lançamento das novas disposições do Ministério da Educação sobre avaliação do desempenho dos professores. Leonor levanta ainda outra questão associada a esta com a qual se sente muito revoltada: o facto de os formandos que frequentam o programa de formação pelo segundo ano terem menos créditos que no primeiro, bem como o facto de haver outras formações paralelas e muito menos exigentes onde os professores podem obter créditos com muito maior facilidade:

> E depois é o que muitas colegas dizem: «Porque é que eu me vou sujeitar a isso quando eu vou buscar os créditos ali?» É por isso que eu acho um descrédito tirarem ainda créditos a formações assim. É muito mais [exigente]! E a planificação e a reflexão... Está-se a planificar, a reflectir, a

> partilhar... Está-se a pedir tudo que realmente eles pedem. E no fundo meteram tudo no mesmo saco e é tudo igual. (E2, 01/03/2007)

Estas circunstâncias exteriores influenciaram muito o modo como a professora se posiciona em relação a esta formação, com a agravante de esta ser da iniciativa do Ministério da Educação. Leonor reflecte sobre estes aspectos na entrevista final:

> [...] a formação é óptima. Eu acho que o que às vezes tem o aspecto não tão positivo como se pretendia é o facto da... é a altura que isto está a decorrer. É: «Tens isto, porque tens este crédito. Tens aquilo, porque tens...» Quer dizer, não é por gosto. As pessoas, muitas, fazem por obrigação. (E6, 30/06/2008)

Relação com a formadora. As relações com a formadora sempre foram de uma grande cordialidade. Progressivamente foi-se gerando um clima de maior à-vontade e confiança e em ambas as turmas a formadora foi sempre bem recebida pelos alunos, participando muitas vezes nas aulas e acompanhando o trabalho individual dos alunos. Contudo, há dois aspectos a referir. O primeiro é que a fase de grande turbulência e controvérsia provocadas pelas mudanças em curso que se referem às tarefas, à progressão na carreira e à avaliação dos professores abalou um pouco a confiança desta professora na formação, e particularmente em relação ao acompanhamento em sala de aula:

> Acho que toda a gente lucrou com a formação [...]. No início, lá está, e estas controvérsias todas das leis e tudo. Das pessoas andarem muito agitadas, revoltadas, mas no fundo depois começaram a acalmar e a gostar, a sentir-se mais à-vontade. Mesmo com as aulas assistidas, que às vezes falávamos entre nós e tudo. No início quando se... pensava assim: «Vamos ter aulas assistidas e tudo. Lá estamos nós outra vez na escola, o estágio.» Aquela associação. Começam a ver que não é. Não é isso. É mais uma entreajuda. Acho que se começou a ver isso e a desmistificar um bocado essa ideia. Acho que sim. E depois mesmo aquelas que ainda tinham mais medo, o facto de quem se sente mais à-vontade às vezes o estar a influenciar «Não é assim.» e «A ideia não é essa.» e «Ai, ainda pensas dessa maneira!»... O dialogar, o estar à-vontade uns com os outros acho que... (E3, 09/07/2007)

O segundo aspecto é que, contrariamente aos outros casos apresentados, a formadora do primeiro ano de formação de Leonor não foi a mesma, e este facto causou alguma instabilidade pela necessidade da adaptação a um estilo diferente:

> Se fosse a mesma pessoa da formação nos dois anos será que se sentiam mais à-vontade? Se calhar. Por exemplo se a Teresa fosse... Por exemplo, a Teresa era um ano e no outro ano era a mesma, não é? Não sei, porque o facto de às vezes de haver a mudança, uma pessoa nova, não se conhece, acho que aí... quebra um bocado. Porque agora no fim do ano se eu fosse começar...

> Faz de conta que estávamos no primeiro. O segundo ano a ser a mesma já nos conhecia a todas. (E3, 09/07/2007)

A reflexão

No fim de cada aula observada era feita uma reflexão individual com a formadora sobre aspectos relevantes da aula que era depois continuada e completada no grupo de formação. Já fora da formação, durante o segundo ano de participação no estudo, continuou-se a usar o mesmo formato.

A professora referia em linhas gerais aquilo que tinha sido explorado e trabalhado e a formadora dava a sua opinião sobre as tarefas e outros materiais utilizados, o trabalho e as reacções dos alunos, as intervenções e a comunicação. Leonor não deu realce, nas entrevistas, a este aspecto da formação. Talvez pelo facto de conversar diversas vezes com a formadora, em entrevista ou em conversa informal, considerando aquele bocadinho mais um momento desses. No entanto, Leonor é uma professora reflexiva, que se vai interrogando sobre a sua prática e sobre o valor daquilo que faz. Um aspecto interessante é que esta professora coloca as questões sempre numa perspectiva muito individual, fazendo depender os resultados e o desempenho da maneira de ser e das características pessoais do professor. Por exemplo, reconhece que nunca gostou da rotina e sempre se preocupou em a quebrar:

> É assim, a formação a mim... Eu já me preocupava, mesmo antes da formação, de diversificar, porque eu própria canso-me da rotina. Eu... Já é de mim. Eu mesmo em casa, eu por exemplo até as coisas gosto de mudar de sítio. Os móveis... Pronto. Não gosto da rotina, porque não gosto de estar a olhar para o relógio que o tempo acabe. Gosto de estar a viver. Deu-me... Estas ideias todas deu-me mais segurança, realmente é por aqui o caminho. (E3, 09/07/2007)

E reconhece à formação o papel de certificação das ideias e das práticas que já possuía anteriormente, provenientes quer da formação inicial quer essencialmente das leituras e pesquisas que entretanto tem feito.

O portefólio. É neste aspecto da formação que Leonor é mais crítica. Considera que é uma pessoa muito sintética e não tem jeito para apresentar um trabalho com grande desenvolvimento. Aliás, defende que o seu trabalho já estava feito anteriormente, para a e na sala de aula, e este trabalho é apenas útil para os formadores terem elementos de avaliação. Esta ideia é defendida no seguinte excerto de diálogo com a formadora:

> Inv. [...] Mas antes disso, o portefólio para si não lhe trouxe digamos nenhuma vantagem em termos de?...
> Leonor: Não. Foi só para vocês.
> Inv. Pois. Quer dizer, para si não lhe serviu para nada?
> Leonor: Para mim não, porque aquele...o meu trabalho está organizado na sala de aula.
> [...]
> Leonor: Estava feito. Aquilo só mesmo para vocês...
> Inv. E ali [a parte escrita] não contribuiu para nada?
> Leonor: Não. (E3, 09/07/2007)

Em relação à apresentação no portefólio das interacções entre o professor e os alunos ou entre alunos, e das explorações e do questionamento que foi realizado, Leonor deixa transparecer o seu carácter emotivo:

> Eu fico tão absorvida com o trabalho e a viver as ideias deles que não consigo estar a registar aquelas ideias a pensar no portefólio. Eu aproveito aquelas dicas e entro na linha das ideias deles e vamos procurar... e depois, no fim, não consigo passar para o papel aquilo. (E3, 09/07/2007)

Defende que se organiza de outro modo, fazendo recolha de trabalhos dos alunos. Deu o exemplo de um projecto que desenvolveu no ano anterior com os seus alunos, a que chamou "A matemática brincalhona", que consistia de momentos de trabalho diferentes em sala de aula. As tarefas desenvolvidas nesses momentos eram arquivadas pelos próprios alunos numa pastinha, o trabalho era exclusivamente feito por eles, mas era tudo feito no momento, durante a vivência da aula. E considera que para a elaboração do portefólio há um hiato que é difícil de transpor:

> Quando passo para isso quebra-me, porque aquilo não está a viver as aulas. Eu tenho dificuldade em passar para ali a aula. Porque há tantas coisas que não consigo... (E3, 09/07/2007)

Passado um ano, já fora da formação, ainda mantém a mesma opinião, mas expressa de uma forma ainda mais veemente a sua discordância sobre o facto de o portefólio ser o único elemento de avaliação dos formandos:

> O acompanhamento na sala de aula é bom, há um acompanhamento, pronto, propriamente do que se está a fazer, do que se teve na formação e se aplica. Só que depois isso... a formação resume-se aqui a um portefólio e não concordo. Completamente contra. Não atino com isso. É das coisas que mais voltas me está a dar ao estômago é ser avaliada por um portefólio[18]. Uma parte

[18] Leonor frequenta durante este ano a formação em Ensino Experimental das Ciências onde o portefólio é também muito valorizado.

> prática que dizem que é tão importante e somos avaliados por um portefólio. Esta parte da formação não... E então eu pergunto, o que é que vêm fazer à aula? (E6, 30/06/2008)

É fundamental referir neste ponto que o portefólio apresentado por Leonor no fim do seu segundo ano de formação não dava uma imagem fiel do trabalho realizado por esta professora, que foi extremamente criativa nas tarefas propostas e eficiente no trabalho com os alunos. Do diário de campo da investigadora:

> O portefólio da Leonor não espelha minimamente o trabalho dela. É uma professora muito criativa, que cria contextos muito interessantes para os alunos de modo a surgirem naturalmente os conceitos matemáticos, e é muito eficiente e exigente com os alunos em termos de trabalho. Além disso os alunos estão entusiasmados nas aulas e intervêm e participam com qualidade. Todas estas características não se reconhecem no portefólio, que lido por uma pessoa exterior dá a impressão de se estar a analisar o trabalho de uma formanda média. (DC, 20/07/2007)

Leonor refere ainda a injustiça do processo de avaliação da formação centrado no portefólio, citando casos de colegas que são capazes de escrever relatórios muito bem feitos, com muitas páginas, e que não correspondem ao trabalho que realizaram na prática, pois o seu trabalho concentra-se precisamente nesta elaboração do documento.

A partilha de experiências

Esta é a vertente do programa de formação que Leonor mais valoriza. Considera que as trocas de experiências e de impressões quer com os colegas quer com a formadora que se verificam no início de cada sessão conjunta de formação são enriquecedoras. Faz essa síntese no fim da sua colaboração:

> O que é que acontece com os anos e com estas trocas? Aquilo que se calhar não via outra vez, despertou-me o gosto e a curiosidade. Quer dizer, mesmo a formação. O facto de haver esta troca, estes contactos é muito positivo. Vai-se ouvindo e vai-se trocando. Pronto. É isso. Vai-se experimentando novas estratégias... Eu acho que... Não nos sentimos sozinhos. (E6, 30/06/2008)

Contudo, na sua apreciação crítica sobre a partilha de experiências reflecte que por vezes esta é um pouco superficial, fica-se pela rama, pela mera apresentação dos materiais utilizados, e Leonor aspirava a uma maior profundidade na reflexão sobre os efeitos desses recursos nas aprendizagens dos alunos:

> As partilhas das experiências na sala de aula por vezes resumia-se ao que é que se fez. Ouvia-se fichas. «Dei esta ficha, dei esta e dei esta.» Eu acho que é muito mais útil o que é que resulta, o que é que foi positivo. «Olhe, eu experimentei esta estratégia e foi óptima. Os alunos gostaram.» Eu não estava interessada nas fichas. Mais bonequinho ou menos bonequinho. Mais um risco ou menos um risco. Às vezes é… Sei lá! «Olhe, eu dei esta matéria e usei esta técnica.» Isso é que era bom. Porque às vezes… Pronto. Haver mais essa troca. Mas as pessoas também têm que estar viradas para isso, não é? (E6, 30/06/2008)

Reflexos do Programa de formação

Nesta secção reúnem-se e sintetizam-se alguns aspectos do impacto do programa de formação nesta professora em relação ao conhecimento matemático e didáctico e na prática de sala de aula, às perspectivas da professora acerca da matemática e do seu ensino e às atitudes e aprendizagens dos alunos, focando-se por fim os aspectos menos conseguidos e as perspectivas para o futuro.

No conhecimento matemático e didáctico e na prática de sala de aula

Neste ponto procura-se fazer uma síntese das evidências do aprofundamento do conhecimento matemático e didáctico desta professora que ocorreu ao longo dos dois anos de formação. Entremeiam-se as afirmações da professora no decurso das entrevistas com as observações da investigadora e os dados obtidos por registo vídeo das aulas já apresentados anteriormente. Esta opção de analisar o conhecimento do professor essencialmente em situação de sala de aula está de acordo com a visão de Ball et al. (2001) quando afirmam que a prática tem de ser o centro da investigação de modo a poder desvendar o uso do conhecimento que não é visível quer através dos cursos frequentados quer mesmo através do estudo do que o professor sabe. É necessária uma visão do conhecimento matemático e didáctico no contexto de ensino.

Leonor reconhece à formação uma importância mais qualitativa do que propriamente de aquisição de conhecimentos. Na verdade, a professora defende que os conteúdos das sessões de formação lhe deram sobretudo um maior entusiasmo para planificar e aplicar outras tarefas e estratégias de ensino, relembrar coisas e reforçar aspectos a que não dava a devida importância:

> Eu não fui aprender assim nada de novo. Não vi assim nada de novo. Coisas que já sabia, que lia. O que é que eu fui ali ver? Há um maior entusiasmo. A pessoa empenha-se mais até a preparar as coisas. Obriga o próprio professor a reflectir, a pensar desde os objectivos, a procurar estratégias… Quer dizer, a não cair naquela rotina. A organizar-se melhor. Obriga aqueles que não vêem o Programa a ir ao Programa, porque nós sabemos que há muitos que andam só de volta dos livros, não é? Eu fui assim até… alguns aspectos foi assim um relembrar coisas que já estavam assim mais esquecidas. Coisas que não dava a devida importância e agora vemos que é muito importante. Eu fui… eu não fui… mau será, quer dizer, uma pessoa ir buscar ali uma formação! Uma pessoa tem que estar minimamente formada. Ali foi um avivar. (E6, 30/06/2008)

De facto, verificou-se em várias situações que esta professora utilizou nas suas aulas conhecimentos matemáticos que não foram trabalhados na formação, como é exemplo a história do inventor do xadrez ou uma exploração com números inteiros negativos que fez no primeiro ano de participação neste estudo, com o seu 2.º ano de escolaridade. Esta foi feita no âmbito de um projecto interdisciplinar em que fizeram a medição da temperatura ambiente ao longo de um mês. A descoberta de temperaturas negativas foi tão importante que uma aluna até questionou se a professora que viria visitá-los – a formadora de matemática – saberia da existência desses números.

Em relação ao empenho na preparação das aulas e à diversificação de estratégias de ensino e propostas de trabalho, a observação da investigadora complementada com os relatórios das aulas e as notas no diário de campo confirmam as afirmações de Leonor. Na verdade, esta professora preocupou-se em produzir e seleccionar materiais de qualidade para as suas aulas e tarefas motivantes e desafiadoras, como é o caso, por exemplo, das damas matemáticas integradas nas olimpíadas do cálculo mental, dos padrões de repetição e da tarefa do aritmógono enquadrada por uma história empolgante.

Os tópicos que eram menos conhecidos para a professora e com os quais lhe foi possibilitado contacto através das sessões de formação foram a estatística e as probabilidades, as investigações matemáticas e, já depois da saída da formação, o pensamento algébrico. Com este último tema Leonor pôde tomar contacto através dos materiais elaborados pela equipa de formadores e que lhe foram fornecidos. Dentro do tema Números e Operações passou a valorizar fortemente as estratégias de cálculo mental. Leonor refere que, ao verificar a importância que é dada a determinados tópicos na formação, fica alertada para a atenção que lhes deve ser dada: "Acho que a formação ajuda-nos a… objectivamente, a classificar melhor as coisas… e a dedicar mais tempo a essas actividades" (E6, 30/06/2008). Outro tema que mereceu destaque foi a resolução de problemas uma vez que, embora já fosse anteriormente trabalhado, lhe forneceu novas ideias e tarefas.

Leonor considera assim que um dos aspectos mais positivos do programa de formação foi fornecer-lhe um modo prático de olhar os temas matemáticos, já que defende que o aprofundamento do conhecimento matemático e didáctico apenas é importante se estiver ancorado na prática:

> Olhe, o que foi mais importante foi que, perante estes temas todos, arranjavam sempre estratégias para os trabalhar. Não era só a teoria: «É importante as probabilidades por causa…» Não. «Tem esta actividade. Pode-se trabalhar estas actividades.» Eu acho que foi mais estas estratégias… a ligação à prática. (E6, 30/06/2008)

Perante as situações concretas dentro da sala de aula, face às dificuldades de aprendizagem de determinados tópicos pelos alunos, a professora sente a vantagem desta diversificação de estratégias que vai permitir-lhe chegar a todos: "E é muito importante estas estratégias. Como é que eu vou fazer com que o aluno consiga isto?" (E6, 30/06/2008). Quanto a formas de organização prefere normalmente que os alunos trabalhem dois a dois. "Muitas vezes ponho o bom aluno e o fraquinho – ajuda mútua" (E2, 01/03/2007).

Leonor confessa que o acompanhamento em sala de aula, mais do que investir na preparação dessas aulas, fez-lhe ter atenção ao fio condutor da aula, uma vez que a observação está sujeita a um tempo limitado e há uma meta a cumprir. Elege como as tarefas que gostou mais de trabalhar as situações problemáticas. A professora acha importante a criação de contextos onde podem inserir-se vários tópicos matemáticos, no sentido de que os alunos se apercebam da utilidade da matemática no seu dia-a-dia:

> Eu gosto muito de trabalhar as situações problemáticas. Porque eu com as situações problemáticas trabalho aquilo tudo, a Geometria, as Probabilidades… Tento meter… Às vezes cria-se uma situação para chegar ao que eu quero. Utilizo muito. E às vezes as situações problemáticas mais objectivas, mas as situações problemáticas eu dou muita importância para eles verem que aplicam aquilo na vida prática. Não dar os conceitos assim… eu tento sempre enquadrá-los assim numa situação, numa história… eu chamo-lhe, em vez de problemas, vamos ouvir uma história pequenina quando estou a trabalhar isso para ligar, para eles verem a utilidade. (E6, 30/06/2008)

Conta também, com gosto, um trabalho que realizou com a turma durante o segundo ano de formação sugerido nas sessões conjuntas, que consistiu em descobrir onde está a matemática escondida:

> O andar na sala sem olhar para o percurso e eu não esbarrei nas mesas. Eles viram hoje que estávamos dentro de um paralelepípedo a trabalhar. Estava em cima da mesa, mas hoje estávamos dentro do paralelepípedo. E o quarto deles é o estar dentro. Desde que acordam... Hoje iam entrar... sair da escola com os olhos abertos e ver onde estava a matemática. Também estou curiosa agora ver amanhã o que é que vai sair dali! Vou recolher as folhinhas e vou ver cada um onde é que encontrou a matemática. Desde... Eu dei o exemplo, por exemplo, a matemática aqui na escola. Desde as cartolinas, a mesa... Sei lá! Montes de coisas. E depois eram eles com as pastas dos dentes, por exemplo, eu estou a deitar a pasta dos dentes, estou a calcular a quantidade de pasta para os meus dentes. Se fosse a boca de um dinossáurio eu não ia pôr a mesma... Pronto. Era assim uma galhofa!... Mas eles a verem no medir, no calcular, a Matemática. (E2, 01/03/2007)

Leonor valoriza a aprendizagem por descoberta depois de confrontar os alunos com situações motivadoras criadas por si, já que “procura o lúdico sempre para despertar” (E2, 01/03/2007). Na sequência didáctica que normalmente utiliza parte desta base em que muitas vezes contactam com materiais manipuláveis passando daí para representações mais abstractas – referindo aqui em particular o desenho - para atingir depois uma forma de trabalho autónomo. Para ilustrar essa opção apresentam-se de seguida alguns episódios de uma das aulas de Leonor no seu segundo ano de formação:

> Certo dia o nosso amigo Gino contou que esteve num planeta chamado... chamado Planeta da Cara Metade... o Planeta da Cara Metade, pois todos os seres que viviam lá eram metade transparentes e metade opacos. [...] O menino Caló tinha o lado direito transparente. Não se via nada. Só se conseguia ver o olho esquerdo, a orelha esquerda e do seu cabelo todo penteadinho só se via os caracóis que lhe caíam em cima da orelha esquerda. Já a irmã do Caló, a Milita, é transparente no lado esquerdo, então só se conseguia ver a orelha direita. Direito. E é muito fácil brincar às escondidas neste planeta. Sabem porquê? Porque olhem. Basta esconder um lado, este lado [Apontado no quadro para a metade do lado opaco da imagem da menina que estava esboçada no quadro] atrás de uma árvore ou atrás de uma esquina e ficavam... deixavam de se ver. (A3-1, 05/02/2007)

E a história continua neste tom, apresentando-se a ideia do Gino de usar um espelho para ver os meninos completos. A professora introduziu o termo de figuras simétricas e distribuiu então imagens e espelhos pelos alunos para descobrirem quais eram simétricas. Os alunos são convidados a trabalhar em grupo para essa identificação. Entregou em seguida miras para facilitar o trabalho. Procuraram também simetria em imagens provenientes de recortes de revista. Depois fizeram recortes em folhas dobradas ao meio com um contorno numa das partes para analisar o que obtinham. De seguida utilizou uma tarefa onde era necessário descobrir por simetria a lógica de uma sequência. Tiveram também de usar os espelhos para descobrirem uma mensagem mandada pela Milita a um amigo – era a palavra "beijinho" vista ao espelho. Havia ainda outras mensagens que tiveram de ler ao espelho. Uma delas era uma frase que tinham que dizer rapidamente: "Três pratos de trigo para três tristes tigres". Receberam em seguida umas grelhas com algumas bolinhas marcadas e que precisavam de completar para que se tornassem figuras simétricas. A professora lembrou que poderiam imaginar a grelha a dobrar ao meio: "Se eu pusesse aqui uma bolinha de tinta e dobrasse, para onde é que esta bolinha iria [Apontando para a bolinha que se encontra na primeira coluna e na sexta linha]? (A3-1, 05/02/2007). Leonor desafiou depois os alunos a escreverem o nome deles visto ao espelho, imaginando o que ficaria se escrevessem a tinta e dobrassem o papel por cima da parte escrita. No fim usariam os espelhos para confirmar se tinham escrito bem.

Os alunos estiveram toda a aula muito entusiasmados, primeiro com a história e depois com as descobertas que foram fazendo.

A professora fornece o material, dá as instruções e fomenta a discussão. Mostra-se muito eficiente na gestão do tempo, o que faz com que uma hora renda muito e se consigam realizar imensas tarefas. Fez a ligação à língua portuguesa com as frases em código que eram trava-línguas e com a escrita do nome de cada um ao espelho, que se revelou um exercício interessante para a turma do 2.º ano, de lateralidade e motricidade fina. O tema matemático trabalhado foi a introdução ao conceito de simetria. As ideias fortes aprendidas nesta aula foram: a outra metade é igual, pode-se ver com o espelho sobre o eixo de simetria, pode-se ver com o mira sobre o eixo de simetria, pode-se recortar com papel dobrado e abrir depois, verificando, se voltarmos a dobrar o papel pelo eixo, que as duas metades coincidem. Fez-se também a pesquisa de simetrias em figuras representando objectos da vida real. Por fim realizou-se uma tarefa de construção da metade da figura que falta de modo a que resulte simétrica.

Verifica-se pela descrição o gosto da professora pela utilização de materiais manipuláveis no início e pela criação de situações problemáticas num contexto lúdico. Algumas destas tarefas e recursos foram sugeridos nas sessões conjuntas de formação, mas, como noutros casos já apontados, foram trabalhados e enriquecidos com imaginação pela professora.

O desenvolvimento do pensamento algébrico. Procurar-se-á apresentar evidência do desenvolvimento do pensamento algébrico à luz do percurso de *algebrização* da experiência matemática dos alunos recomendado por Blanton & Kaput (2003), descrito pormenorizadamente no Capítulo 3, e concretizado pela categorização de formas de pensamento algébrico de Blanton & Kaput (2005). O caso de Leonor é um pouco diferente dos outros já que esta professora não se encontrava em formação no segundo ano de contacto. Uma vez que só durante este segundo ano lhe foi pedido, como aos outros participantes, que dirigisse o seu trabalho para o desenvolvimento do pensamento algébrico, o trabalho aqui analisado não vai reportar-se ao trabalho autónomo do seu segundo ano de formação mas à terceira aula e à primeira parte da quarta aula do seu segundo ano de participação neste estudo. Escolheram-se os primeiros minutos destas aulas pois retratam o seu trabalho intensivo no âmbito do cálculo mental, para além de ter sido desenvolvida na segunda parte da terceira aula a tarefa do aritmógono, com as características requeridas. O cálculo mental foi um tópico representativo dos gostos e interesses de Leonor e do que reputa de fundamental na sua prática lectiva. Por estas características tornou-se assim um trabalho de referência da professora, que se pensa poder exprimir de forma significativa o seu sentir na profissão, em particular no ensino da matemática, através das abordagens, tarefas e recursos escolhidos e implementados. Deste modo, pode iluminar melhor a evolução do seu conhecimento matemático e didáctico, pela interpretação autónoma dos materiais usados nas sessões conjuntas de formação e a sua implementação na sala de aula, com as adaptações pessoais que entendeu fazer.

Leonor começou por utilizar a tabela dos cem para explorar padrões numéricos da soma com 2, com 3, com 4, e finalmente com 10. Sobretudo neste último caso, deu relevo ao tipo de movimentos possíveis. Tanto se podia ir "pelos degraus" de um em um dando 10 saltinhos como passar directamente para a casinha de baixo na tabela, "descendo de elevador". Aproveitou também para relacionar com a operação inversa. Na quarta aula a exploração já podia ser feita adicionando ou subtraindo 10, 11, 12, 9, 20, 21, etc. Esta professora optou pela criação de algumas rotinas através de um trabalho sistemático de uns minutos no início de cada aula de matemática, ao longo do ano, em que ia abordando estratégias de cálculo mental progressivamente mais complexas. Acreditando que o ensino explícito de estratégias pode ser útil pelo menos para os alunos com mais dificuldades, de acordo com Reys et al. (2007), não se limita no entanto a exigir uma resposta certa mas a explicação do procedimento, aproveitando ainda a intervenção de alguns alunos para a exploração de estratégias por eles livremente escolhidas e cuja comunicação à turma poderá beneficiar os colegas, de forma consistente com McIntosh (1998) e Threlfall (2002).

Leonor usou de modo bastante sistemático a tabela dos cem. Deste modo, pensa-se que cabe aqui uma pequena reflexão sobre o seu uso, sobretudo tendo em conta algumas objecções (Brocardo & Serrazina, 2008). Estas investigadoras defendem que, para adicionar por exemplo 45+37, os alunos são levados, ainda que conhecendo muito bem o procedimento de descer 3 linhas e andar de seguida 7 casas para a direita, "a obter o resultado através da leitura do número a que chegam no quadro e não a partir do número a que chegam na sua cabeça" (p.111). Neste sentido, a objecção é compreensível e válida. Contudo, no programa de formação contínua e em particular neste estudo não se usou a tabela dos cem para realizar genericamente adições ou subtracções mas sim para explorar padrões numéricos e desenvolver estratégias de cálculo mental. Os alunos descobrem um modo de adicionar (ou subtrair) 10, 20 ou 30, por exemplo, ou 11 ou 9, e, embora inicialmente possam apoiar-se nos movimentos correspondentes no quadro, não se pretende que a sua consulta se eternize mas que, uma vez descoberto o padrão e feita a generalização, consigam realizar esses cálculos simples mentalmente *com qualquer número*, mesmo superior a 100, já sem o apoio da tabela. Foi o que aconteceu na turma de Leonor com vários alunos, apesar de se tratar de crianças muito pequenas. Ou seja, a tabela é um pré-requisito inicial que apenas se utiliza para a descoberta de padrões de cálculo mental pois ajuda a criar imagens mentais produtivas nesse sentido, e não genericamente para obter o resultado de operações de adição ou subtracção. Para esse efeito serão mais adequados outros modelos, como o da recta numérica vazia, que é indicado para realizar a adição descrita acima, mas que todavia não poderá ser utilizado antes de os alunos terem a mínima ideia de quanto é 45+30 ou 45+40 como passo intermédio. Para a aquisição dessa competência é que surge a tabela dos cem como modelo extremamente útil, como foi observado na turma de Leonor. Por exemplo, quando os alunos descobrem que a sequência de movimentos para adicionar 12 tanto pode ser ↓ → → como → → ↓ estão a generalizar sobre características da operação de adição como a propriedade comutativa. Defende-se, de acordo com Blanton & Kaput (2005), que estes exemplos reflectem raciocínio algébrico porque a ênfase é colocada nas relações entre operações sobre números e não no resultado de um cálculo específico.

A tarefa do aritmógono proporcionou oportunidades de cálculo mental e resolução de problemas, para além de dar origem a várias formas de pensamento algébrico.

Apresentam-se na Tabela 8 as categorias de pensamento algébrico observadas nestas aulas.

Tabela 8: *Ocorrências de formas de pensamento algébrico nas aulas de trabalho autónomo de Leonor*

Categoria	
A	Decomposição de números em parcelas e exame da estrutura dessas parcelas.
B	Adicionar 10 descendo pelos degraus 10 saltinhos ou descer de elevador directamente para a linha seguinte. Para adicionar 12 é o mesmo descer uma linha e andar duas casas para a direita ou o contrário – propriedade comutativa da adição.
C	Para qualquer número, adicionar 9 é o mesmo que adicionar 10 e subtrair 1.
D	Resolução de expressões em que falta um ou dois números no aritmógono.
E	Descodificação de correspondências números-letras e símbolos-letras para poderem desvendar determinadas mensagens.
F	Descoberta da relação entre a soma dos círculos e a soma dos quadrados no aritmógono.
G	Formulação de conjecturas sobre a relação entre a soma dos círculos e a soma dos quadrados no aritmógono.
H	Descoberta de padrões numéricos na tabela dos cem.
J	Explicitação e verbalização das descobertas que vão sendo progressivamente refinadas. Discussão e debate com a professora e entre colegas.

O modelo da tabela dos cem mostrou-se uma boa ferramenta de iniciação ao pensamento algébrico. As tarefas de descodificação utilizaram formas de representação adequadas. Houve sempre a preocupação de registo das descobertas nos momentos-chave.

Nas perspectivas da professora sobre a matemática e o seu ensino

Leonor tem já muitos anos de actividade docente e várias experiências diferenciadas, nomeadamente o cargo de cooperante da prática pedagógica da Escola Superior de Educação. Deste modo considera que atingiu um patamar confortável a nível profissional e valoriza na formação essencialmente um refrescamento dos seus conhecimentos, novas ideias e recursos para enriquecimento da sua prática. Em relação ao seu primeiro ano de formação observa:

E pronto. E tirei ideias novas, outras maneiras de trabalhar com isto e trocar impressões. E tenho feito. Vou juntando sempre. (E1, 23/11/2006)

Realça também fortemente o aspecto, que para si é fundamental, da quebra da rotina, como se pode ver no seguinte excerto de entrevista:

Leonor: E quebra um bocado a rotina para eles [os alunos] e para mim, porque eu não gosto de rotinas, que uma pessoa perde um bocado o gosto na rotina.
Inv. Então a sua avaliação do ano passado da formação foi positiva. Senão...
Leonor: Senão não vinha.
Inv. [Continuando] ... não se tinha inscrito este ano, não é? Pois.
Leonor: Não vinha, não é. Acho que aprendi sempre ideias novas e, apesar de eu ter as minhas, hei-de enriquecê-las, trocar as ideias. (E1, 23/11/2006)

No fim do segundo ano de formação reforça este aspecto, salientando que os temas já foram trabalhados anteriormente mas estão um pouco desactualizados e, por outro lado, o facto de ter contacto com diversas abordagens dá maior flexibilidade de acção na prática:

É isso, é enriquecer. Porque é o que eu digo, muitas vezes estão as fotocópias já amarelas porque aquela matéria foi dada. Agora isto aqui há ideias novas, é realmente um arranque. Olhe! Vai... Sei lá! Eu pego numa matéria: «Olha! Com isto até se podia fazer aquilo ou aquilo.» E organizamo-nos de acordo com o que temos à nossa frente. Se é 1.º ano, se é 3.º... Não. Eu acho que... Sei lá! Às vezes, o mesmo tipo de exercício, eu assim: «Não. Este exercício é muito giro, mas os meus já estão no 3.º ano. Até nem preciso de o adaptar. Há outro se calhar mais rico para o 3.º ano.» Eu acho que o explorarmos as diversas maneiras dá-nos, sei lá, mais traquejo... para manusearmos as coisas e... (E3, 09/07/2007)

Leonor, dada a sua experiência, tem ideias muito claras sobre as melhores formas de ensino e aprendizagem. Tem grande confiança na sua auto-formação e é uma profissional empenhada e dedicada aos alunos.

Em relação a um bom professor de matemática Leonor define-o como aquele que, além de ter bom domínio científico, consegue motivar os alunos e criar-lhes o gosto pela disciplina:

Um bom professor de matemática é aquele que não só sabe transmitir bem os conceitos, como domina tão bem a matéria, mas eu acho que além de saber transmitir, é aquele que incute o gosto, consegue transmitir esse gosto, aliciar as pessoas para descobrirem mais e arranjar assim estratégias para eles fazerem a acomodação dos conceitos, que vive. Não é só blá-blá-blá. (E6, 30/06/2007)

Referindo-se ao seu percurso, a professora considera que sempre teve gosto pela matemática mas as circunstâncias profissionais às vezes não ajudavam, nos primeiros anos, quando estava deslocada em lugares remotos com as quatro classes na mesma sala e sem materiais de espécie alguma. Defende que gosta sempre de criar situações motivantes para a abordagem dos conteúdos e isso tornava-se difícil nessas condições. Reconhece que a formação contínua vai avivando a chama, evitando a acomodação:

> A formação contínua é como deve ser em qualquer área, em qualquer profissão. Isto vai avivando. Não deixa as pessoas caírem na rotina. Vai... Mas quanto ao gosto... Eu acho que sempre tive. (E6, 30/06/2007)

Com esta formação teve a possibilidade de sentir curiosidade por temas que estavam esquecidos e passar a valorizá-los.

Na sua caracterização de um bom aluno a matemática, Leonor refere o desenvolvimento das competências que são consideradas essenciais e, especificando, defende uma capacidade para ligar e relacionar tópicos aprendidos de modo a poder fazer face a situações novas e resolvê-las:

> Um bom aluno a matemática daqui a uns anos é aquele que durante este percurso todo conseguiu criar estruturas lá dentro que aparece-lhe outras situações e ele consegue, com aquela acomodação toda daqueles anos todos, arranjar uma solução para aqueles problemas. Não é só aquela parte mecânica. Ele tem que saber... Pronto. É todo aquele que vai desenvolver nessas competências e faz uso delas. Quer dizer, sabe trabalhá-las, uni-las, por exemplo... E não só. Há aquelas outras que vão estando ligadas, que são importantes. É que depois permitem... uma situação nova e conseguem ligar coisas que nem sequer se está a trabalhar naquela altura... (E6, 30/06/2007)

Defende contudo que esta capacidade não se vai poder observar num ano, é um trabalho que se vai desenvolvendo e que só produz frutos muito mais tarde: "Eu vejo um bom aluno a matemática não é naquele ano. É um percurso" (E6, 30/06/2008). Daí infere a importância de os alunos começarem bem para não irem acumulando lacunas, dadas as características da matemática como disciplina cumulativa. Nessa ordem de ideias defende o começo de um trabalho sério a nível da matemática não no 1.º ciclo mas no Jardim de Infância: "[na matemática há entre os temas] uma ligação tão grande! Que não começa aqui. Começa no Jardim" (E6, 30/06/2008). E, em coerência com esta ideia, sugere que haja formação contínua em matemática para educadores de infância:

> [Referindo-se ao trabalho num jardim de infância] Não tem interesse nenhum saber que aquilo é o m, como elas dizem, o t, o l... O que interessa isso? E em Matemática é igual. Estão a dar os números todos. Mas eles não têm a noção do número. Eu acho. Esta formação porque não também para as educadoras? (RA5, 07/05/2007)

Leonor considera que a formação teve impacto na sua postura profissional na medida em que é sensível a novas propostas, novos desafios, e quando eles aparecem, como foi o caso da formação, não se limita a assimilá-los e guardá-los para si, começa logo a arquitectar modos de trabalhar com os alunos:

> Isso já tem muito a ver com a personalidade das pessoas. Eu, por exemplo, eu ao aprender, ao avivar, a ver esta importância, eu pronto, a minha cabeça está logo a ver como é que eu vou trabalhar isto e arranjo essas estratégias. (E6, 30/06/2008)

A professora realça o aspecto prático da formação, muito ligada à sala de aula, mas mais uma vez põe a tónica na vontade e capacidade individual do professor. É este "gosto de ser professor", este "saber o papel do professor" (E6, 30/06/2008) que são para Leonor os aspectos distintivos dum bom profissional. Reconhece que a formação deu um contributo para clarificar e reforçar essa tendência. Mesmo para os professores que, no dizer de Leonor, vão para a formação contrariados só porque precisam de créditos, esta acaba por ter neles um impacto positivo, porque o contacto e a partilha com colegas desenvolve a receptividade e "dá um abanão".

Mas o aspecto mais importante defendido é um aumento de segurança, uma confirmação do valor de práticas que já vinha desenvolvendo, mas sem ter muita certeza de serem as melhores pois não as via à sua volta. Agora sente-se mais segura do caminho a seguir:

> Isto é um reavivar. E há muitas noções que uma pessoa na escola não as dava e olhámos para elas. Os problemas: uma pessoa estava habituada dantes, não era, pão pão queijo queijo, junta-se... Quer dizer, há. Então não há? Quer dizer, há outra maneira de... E pelo menos ficámos com uma confiança, ficámos mais seguros até. Às vezes eu digo assim: «Eu acho que deve ser assim.» Mas parece que não e vamos ali buscar uma força. Fazemos com mais segurança as coisas. Sabemos que é... Então não é? Estas formações todas acho que nos dão muita mais segurança no trabalho, no dia-a-dia. Mesmo para quem já até as faz e até as pratica acho que vai sempre ali buscar... (E2, 01/03/2007)

Esta ideia é reforçada mais tarde, quando relata o facto de se confrontar com um tipo de ensino mais tradicional, repetitivo e mecanizado, e por vezes se questionar sobre as suas práticas:

> Será que estou a perder tempo? Será que estão a preparar melhor, a fazer aquilo: "anda; e faz outra vez; e anda outra vez". Será que elas é que estão certas? Eu às vezes questionava-me. Eu assim: Será isto? Será que os estou a prejudicar? Será ideia minha? Não. Isto veio-me dar assim mais segurança: é por aqui. (E3, 09/07/2007)

E no ano seguinte volta a reforçar a mesma ideia:

> O que é que eu vejo que alterou assim em mim? Mais segura. Mais segura. Até mesmo às vezes a nível de reunião. Às vezes se uma colega se põe a... as tais colegas contrariadas, eu respondo. Sinto-me com a segurança suficiente para dar uma resposta [...].É um apoio. E o caminho é esse e é para aí que temos que ir. Não vale a pena estarmos a lutar contra a maré. É por aí que se tem que ir. (E6, 30/06/2008)

Nas atitudes e aprendizagens dos alunos

Leonor considera que o trabalho que vem desenvolvendo, referindo-se a um tipo de tarefas menos tradicionais, é do agrado dos alunos: "Realmente as crianças gostam mais por este lado" (E3, 09/07/2007). Em particular referindo-se à influência da formação, reconhece que teve efeitos notórios no gosto dos alunos:

> Eles dizem muitas vezes que gostam muito de matemática. Pronto. Isso já é uma satisfação. Não ter aquela rejeição da matemática: "Não gosto da matemática". E isso eu notei. Notei o levar assim uma matemática mais... a ver a utilidade da matemática. (E3, 09/07/2007)

Este gosto é generalizado ao nível da turma no fim do seu segundo ano de formação. Refere na continuação que já fizeram, no fim do 2.º ano de escolaridade, vários exercícios da prova de aferição do 4.º ano com êxito:

> Eu estava assim a apreciar, mas não lhes disse que era do 4.º ano. Dei, estive... Pronto. Aqueles meus quatro, esses fizeram a brincar. Tinha lá alguns que desconfio que tiravam positiva! Aquelas partes do quilograma e isso tudo não sabiam, mas aqueles... Acho que já ficaram assim com mais traquejo para fazer as coisas. Mas lá está! É uma coisa que demora muito tempo. (E3, 09/07/2007)

No fim do segundo ano de colaboração, já fora da formação e com uma turma do 1.º ano de escolaridade, reitera para esta turma a questão do gosto pela matemática, afirmando que todos os alunos, genericamente, afirmam o seu entusiasmo pelos desafios que lhes foram sendo colocados ao longo do ano:

> Eu acho que eles gostaram muito da matemática. Eles, pelo menos, dizem que gostam muito da matemática, dos desafios da matemática. Eles gostam. Acho que senti isso, muito entusiasmo. Entusiasmados com isto. (E6, 30/06/2008)

Fazem-se de seguida algumas considerações especiais em relação ao desenvolvimento do cálculo mental. No fim do segundo ano de colaboração, quanto a aprendizagens, considera que os alunos estão bem, tendo-se notado forte evolução em particular ao nível do cálculo mental, já que se trata de uma turma do 1.º ano em que este foi trabalhado de forma muito intensiva. Na verdade, notou-se no fim do ano lectivo nestes alunos do 1.º ano uma capacidade de cálculo mental que por vezes não se observa no fim do 1.º ciclo do ensino básico, e, tendo sido este tema uma linha de força do programa de formação da ESEVC, em que insistentemente se trabalhou com os formandos, e tendo Leonor pertencido a um grupo de formandos que optou, durante o 2.º ano de formação, segundo sugestão da formadora, por um trabalho autónomo ligado ao cálculo mental, e tendo sido fornecidos a esta professora os materiais da formação ligados ao cálculo mental durante o ano de 2007/08 que ela adaptou autonomamente, considera-se que é pertinente neste momento sintetizar algumas características do trabalho realizado por esta professora neste âmbito, assumindo-o pelo menos parcialmente como reflexo do programa.

Concretamente neste tema Leonor não se coíbe de fazer explorações até onde os alunos chegarem:

> Tenho colegas que questionam: «ai, desculpa, isso não está no programa!» Eu chego a pôr no sumário muito menos do que o que faço para não ter problemas porque só se pode dar os números até 20 no 1.º ano. Às vezes mesmo no cálculo mental avanço muito e não declaro. (E5, 15/05/2008)

Tendo sido comentado pela formadora que não consta no Programa em vigor que só se pode dar os números até 20 no 1.º ano, Leonor afirma:

> Deve ser por causa dos manuais, eles só trazem até 20. O nosso por exemplo tem 30 e 40 mas só de raspão nas duas últimas páginas... (mostrou.) Vê, é tudo muito abebezado... eu vou ao ritmo deles, se eles podem eu puxo, senão acalmo... e mesmo os que têm mais dificuldades, uns vão puxando os outros. (E5, 15/05/2008)

A professora manifesta a sua tendência para fornecer aos alunos uma grande variedade de recursos que eles usam também de acordo com as suas preferências. Por exemplo, introduziu a tabela dos cem que tinha sido sugerida na formação e com a qual confessa que gostou muito de trabalhar, mas antes já tinha trabalhado com outros recursos, como material não estruturado, os dedos, umas reguazinhas até 10 e depois até 20 que construiu para cada aluno, o esquema das escadas de unidade em unidade que usa muito regularmente. Verifica que deste modo os alunos, cada um ao seu ritmo, vão interiorizando os padrões numéricos que lhes facilitam e flexibilizam o cálculo mental e vão aos poucos abandonando os auxiliares:

> Todos no início tinham uma reguazinha pequenina até 10 que eu lhes fiz e que vimos como se podia usar. E depois usam se acharem que dá jeito. Eu dou-lhes os meios e depois salto fora. Por exemplo tive alturas em que tinha alguns a usarem a régua, outros a não quererem, procuravam as escadas, outros iam aos lápis, outros com os dedos e outros usavam a cabeça. E depois aos poucos vão abandonando... à medida que descobrem as regularidades do cálculo. Há uns que descobrem, os que não descobrem eu chamo a atenção e páro para eles reflectirem e eles aos pouquinhos vão descobrindo. (E5, 15/05/2008)

Outra ideia fundamental que emerge das afirmações de Leonor é que ela considera importante fornecer aos alunos os meios para eles poderem trabalhar com progressiva autonomia de acordo com as suas preferências. Só quando sente os alunos em dificuldades é que os questiona para suscitar o seu pensamento e reflexão.

Leonor usa também metáforas que facilitam a compreensão dos alunos. A tabela dos cem foi trabalhada na formação; a professora utiliza-a mas cria a imagem de um prédio alto cheio de degraus no qual é possível também usar o elevador para ir mais depressa, de dezena em dezena:

> Com a recta numérica e as escadinhas começo até ao 20. Depois parei no 20 e passei... meti esta [a tabela dos cem]. Mas lá está. Eu... como eu dei os degraus, com as escadas... [...] segui a mesma linha. Esta está na linha. Portanto, as escadas continuaram a seguir. Isto é um prédio com estes degraus todos. E eu ou vou pelas escadinhas... no início ia... ou vou pelo elevador. E depois quando: «3 mais 10?» E eu é que os levei a eles a descobrirem que é o de baixo. Fazia muito isso: «E 26 mais 10?» E eles tum, tum, tum e dizem. «E 45?...» Aqueles mais espigadotes: «Ah! É sempre aquele. É sempre aquele». Pronto. Então no fim... Mas a todos, a todos. «Então qual é a conclusão a que chegamos? Sempre que eu digo mais 10...» (RA4-2, 12/06/2008)

Outra ideia-chave que ressalta é que os alunos verbalizam sempre o seu pensamento e as suas estratégias, o que os ajuda a eles próprios a aos colegas.

Foi também abordado na reflexão da aula o facto de no esquema usado inicialmente das escadas se subir um degrau para passar para a unidade seguinte, e na tabela dos cem o crescimento ser a descer, no sentido inverso. Leonor defende que esse facto não afectou os alunos, uma vez que esta segunda imagem foi introduzida bem mais tarde, quando a outra já estava interiorizada.

Outro aspecto crucial é a valorização pela professora das rotinas de cálculo mental num trabalho diário e sistemático que faz com que os alunos se sintam progressivamente mais competentes nesta área e queiram, eles próprios, com o maior entusiasmo, desenvolver ainda mais essas competências. Pede por vezes também a colaboração dos pais a quem explica de que modo podem apoiar os filhos:

> Eu agora tenho aqui este quadrado (a tabela dos cem). Funcionou lindamente. Já perceberam o padrão do +10 e isso na tabela vê-se muito bem...Quero agora fazer exercícios de +9 por exemplo, mas o [nome do aluno] ainda não entende, conta um a um. Eu agora também falei com a mãe para o ajudar mas ensinei-lhe em que é que ela há-de insistir. Mas os outros adoram, é um desafio para eles, eu às vezes quero mudar de assunto e eles: "faz mais perguntas dessas!" (E5, 15/05/2008)

O seguinte excerto da reflexão da última aula dá conta desse trabalho continuado que dá frutos visíveis no final do ano:

> Inv. Mas tudo isto foi fruto de um bocado de treino, não é?
> Prof. Ah! Sim.
> Inv. Trabalhou bastante esta questão.
> Prof. Sim. Sim.
> Inv. Não é assim de um dia para o outro.
> Prof. Não cai assim do céu!
> Inv. Claro.
> Prof. Não. É desde o início.
> Inv. Claro. Pois.
> Prof. Isso aí não há dúvida. É encadeadinho e... pronto. (RA4-2, 12/06/2008)

Aspectos menos conseguidos

O aspecto referido por Leonor como menos conseguido foi a superficialidade de algumas intervenções no momento da partilha de experiências de sala de aula no início de cada sessão conjunta, aspecto que já foi referido anteriormente. Por vezes havia pessoas que se limitavam a fazer uma descrição da aula com os materiais utilizados, e o que era importante, na opinião de Leonor, era a análise dos aspectos positivos da intervenção do professor de modo a poderem ser úteis para os colegas.

Perspectivas para o futuro

No portefólio, no final da formação, Leonor denota a preocupação de conhecer os melhores métodos de ensino da matemática para levar os seus alunos a aprenderem de um modo mais eficaz, mas tem a noção clara de que não existe um método de carácter universal que cumpra esse objectivo, donde reconhece que:

> [...] é necessário um trabalho de constante actualização, preparação de aulas, experimentação de novas tarefas e materiais, identificação de possíveis problemas na comunicação e no ambiente da aula, na reflexão sobre os resultados obtidos pelos alunos, de modo a ter em conta os seus conhecimentos, dificuldades, interesses e preferências. (Por, 05/07/2007)

Reflectindo sobre a sua actividade profissional, enumera no portefólio os seguintes pontos que procurou trabalhar:

> Ter mais conhecimento e segurança na matemática que ensino; ser uma profissional motivada e empenhada; ter abertura à inovação e experimentação; desenvolver na comunidade profissional, isto é, com outros professores, um maior relacionamento; diversificar as actividades matemáticas; ter maior rigor na linguagem. (Por, 05/07/2007)

Ao longo do segundo ano de contacto, já fora da formação, a observação de aulas mostra que Leonor utiliza sistematicamente ideias, materiais e recursos sugeridos pelo programa de formação, embora adaptados livre e criativamente por si às necessidades dos seus alunos e aos seus gostos e tendências pessoais. Confrontada directamente com esta situação, foi-lhe questionado qual é o seu sentimento em relação à formação, agora que está de fora. A professora é clara na sua resposta de que o espírito da formação permanece, como se pode ver pelo seguinte excerto, tendo embora em conta as vicissitudes presentes que dificultam a disponibilidade interior da pessoa:

> Inv. O aritmógono aproveitou da formação, embora já esteja fora. Em relação à formação qual é o seu sentimento agora que está de fora?
>
> Prof. Não estou, para mim como pessoa ficou-me o espírito da formação, estou noutra este ano [formação em ciências experimentais] mas continuo a valorizar na formação o sair da rotina o fazer coisas novas.
>
> Inv. Mas acha que valeu a pena a formação, assim ao longe?
>
> Prof. Isso é indiscutível, aliás todas as formações, mas o problema é a sobrecarga de trabalho, eu este ano tenho 27h por semana e depois vem a formação, só a partir das 17h30, é muito pesado. A formação era boa dantes, a partir das 15h30 era uma lufada de ar fresco, agora assim, eu chego a casa exausta, até acho às vezes que não vou aguentar, e depois há a família, o jantar, enfim, isto tem de mudar porque estão a dar connosco em doidas. (E5, 15/05/2008)

Leonor mostra-se decidida a continuar a trabalhar na linha que já considerava como sendo a melhor e que a frequência do programa de formação veio confirmar, dando-lhe segurança e apoio institucional para prosseguir um trabalho em que já acreditava.

Deste modo, e com a consciência de que o professor é um elemento decisivo na sala de aula, toma em mãos a necessidade de um aperfeiçoamento e uma superação constantes.

Síntese

Leonor é uma professora com bastantes anos de experiência de ensino no 1.º ciclo que reivindica a posse de uma formação sólida anterior a esta, baseada essencialmente na sua auto-formação ao longo do tempo, aliada a uma atitude face à profissão activa e empenhada, com preocupações na implementação de novas metodologias de ensino com diversificação de estratégias e recursos inovadores, e nesse aspecto considera que a formação não lhe modificou substancialmente a postura profissional.

As circunstâncias e o tempo em que este programa de formação decorreu, em simultâneo com várias iniciativas ministeriais que resultam em exigências aos professores que Leonor considera irrealizáveis pois lhe roubam o tempo de que necessita para planificar as suas aulas, provocam alguma amargura nesta professora em relação a emanações ministeriais.

Leonor é uma professora muito criativa, que desperta e mantém a atenção e o interesse dos alunos com a criação de contextos lúdicos muito motivadores e que tem uma boa gestão do tempo disponível, imprimindo um bom ritmo ao trabalho dos alunos, o que permite a realização e exploração de muitas tarefas ao longo de cada aula. Sabe ainda aproveitar as situações criadas para tocar e aprofundar vários tópicos quer da matemática quer de outras áreas numa perspectiva de interdisciplinaridade.

Em relação às sessões de formação em grupo, Leonor valoriza o aprofundamento de conceitos matemáticos pela possibilidade de voltar a abordar temas que estavam esquecidos e pelos quais sentia curiosidade. No aspecto didáctico reconhece que recolheu novas ideias para ir refrescando e enriquecendo o seu leque de recursos para a sala de aula. A partilha de experiências com colegas é também destacada, embora considere que por vezes esta não foi feita com o necessário aprofundamento, ficando-se pela análise superficial de aspectos descritivos do que foi feito nas aulas.

O portefólio não foi um instrumento do agrado desta professora, que confessa que não lhe serviu para reflectir sobre a sua prática, colocando a tónica da sua realização apenas em fins avaliativos por parte dos formadores. De resto, verificou-se que não conseguiu exprimir no seu portefólio toda a riqueza do seu trabalho com os alunos.

O trabalho autónomo foi realizado em grupo, com distribuição de tarefas pelos diversos intervenientes. Leonor trabalhou em conjunto com uma colega de escola que dava apoio socio-educativo a alunos da sua turma e este trabalho conjunto denotou grande empenho e qualidade, permitindo a Leonor adquirir uma grande sensibilidade para a necessidade de desenvolvimento do cálculo mental nos alunos. Esta ideia veio a reforçar-se no ano seguinte, já fora da formação e noutra escola, com a sua turma do 1.º ano, num trabalho intensivo e precoce de descoberta de padrões numéricos na adição e subtracção, com o apoio de recursos como saltos numa escada e posteriormente a tabela dos cem, que deu origem ao desenvolvimento de várias estratégias de cálculo mental. Foi aliás neste ponto que se notou uma maior evolução no desempenho desta professora e influência da formação.

Leonor utilizou, no segundo ano de colaboração neste estudo, já fora da formação, os recursos sugeridos na formação no ano anterior e também aqueles que foram trabalhados no ano seguinte e que lhe foram fornecidos, ligados ao desenvolvimento do cálculo mental, do sentido do número e à emergência do pensamento algébrico pela descoberta de padrões que conduz à compreensão da estrutura numérica. Soube, autonomamente, interpretar e aplicar muitas estratégias de ensino sugeridas adaptando-as ao seu gosto pessoal e enriquecendo-as com a sua imaginação, dando origem a metáforas que facilitavam a compreensão dos alunos e lhes permitiam uma melhor aprendizagem. Nesta mesma área destacaram-se também as explorações feitas com padrões de repetição figurativos e consequente identificação da estrutura do padrão, primeiro de continuação ou completamento do padrão e depois de criação de um padrão pelos próprios alunos, e o problema do aritmógono, uma tarefa aritmética mas que conduzia à descoberta de invariantes numéricos permitindo assim a formulação de conjecturas e a generalização.

Leonor reconhece à formação também o papel de certificação das práticas que já vinha implementando, fruto da sua reflexão e auto-formação ao longo dos anos. Assim, considera que a frequência do programa de formação lhe proporcionou, para além dos aspectos já referidos, uma maior segurança quer na utilização de um trabalho com os alunos baseado na motivação, no envolvimento em situações problemáticas, na descoberta e na autonomia, na compreensão de conceitos e sua comunicação, quer na defesa dessas práticas perante outros colegas que as não utilizam.

Capítulo 10

SÍLVIA

A professora a quem neste estudo foi atribuído o nome de Sílvia é a figura central deste capítulo. No início faz-se uma breve apresentação da professora no seu percurso pessoal e profissional, passando-se depois para a caracterização da sua relação com a matemática enquanto estudante e do seu retrato profissional prévio ao programa de formação. Em seguida analisa-se o seu percurso durante a frequência do programa, nas suas várias vertentes, e as suas impressões pessoais ao longo do tempo, bem como aos reflexos deste programa no seu conhecimento matemático e didáctico, na sua prática de sala de aula e nas aprendizagens dos seus alunos.

Apresentação

Sílvia tem quarenta e dois anos no início da formação. É morena, alta e elegante. Tem um temperamento desembaraçado e expedito, sendo um carácter extrovertido e optimista. É casada e tem dois filhos no ensino básico. Tem dezoito anos de serviço como professora do 1.º ciclo. Esteve colocada, durante os dois anos de formação, como titular de uma turma numa pequena escola rural com apenas duas salas de aula do 1.º ciclo e um Jardim de Infância.

Percurso académico e profissional

Sílvia frequentou o ensino secundário na sede de concelho da sua residência, tendo concluído, entre outras, a disciplina de Matemática no 12.º ano. Chegou a concorrer a um curso de Engenharia mas ficou colocada muito longe de casa e também não era exactamente o curso que gostaria de tirar, pelo que acabou por desistir. Sílvia refere que sempre quis, em criança, ser professora:

> Sempre achei interessante, sempre achei... sempre quis imitar as minhas professoras. Acho que é uma coisa que normalmente todas as crianças gostam de ser: professores. No início é quase sempre professores, bombeiros... Portanto, eu quis ser professora. (E1, 12/12/2006)

Da primeira vez que concorreu ao Magistério Primário teve um problema com os prazos de inscrição e não entrou, de modo que, para não ficar parada, frequentou o curso de Filosofia numa universidade privada, embora nunca tivesse gostado de Filosofia. No ano seguinte entrou finalmente no curso da sua preferência, o do Magistério Primário, que frequentou na sede de distrito da aldeia onde nasceu e vive.

Depois da conclusão do curso trabalhou em várias escolas de concelhos do norte do país durante cerca de dez anos até finalmente estabilizar próximo de casa.

A escola do primeiro ciclo onde leccionou nos dois anos de formação é de plano centenário e tem características eminentemente rurais pois está situada numa aldeia a cerca de 35 km da sede de distrito. Na escola há apenas duas turmas de 1.º ciclo e funciona também o Jardim de Infância com duas salas. Sílvia é titular de uma turma de 1.º/2.º anos de escolaridade no primeiro ano de formação e depois, durante o segundo ano, dá continuidade à mesma turma, agora de 2.º/3.º anos de escolaridade. É uma escola muito bonita, situada num ponto elevado com óptimas vistas sobre vinhedos, é arejada e luminosa e tem boas condições em termos de espaço e aquecimento.

Relação com a matemática enquanto estudante

Sílvia não tem memórias negativas da matemática enquanto aluna da escola primária. Contudo, no 5.º e 6.º ano frequentou a telescola e foi aí que a sua relação com a matemática começou a deteriorar-se, embora tenha passado com nota positiva:

> Porque havia uma explicação na televisão, depois essa explicação era... era mais aprofundada pelo professor e tudo. Mas havia aquele problema dos horários! E bastava o atraso... atrasarem na... um bocadinho ao ligar a televisão para se perder parte da aula e aquilo, na altura, não era por cassetes, eram dadas em directo, de maneira que se perdia e... Perdia-se aquela parte e depois o professor muitas vezes também não estava muito a par da matéria e passava e eu comecei a ficar para trás na matemática. (E1, 12/12/2006)

Nos anos seguintes veio a ressentir-se e durante o 7.º, 8.º e 9.º ano teve sempre nota negativa a matemática. No dizer de Sílvia, os cadernos de matemática eram postos de lado logo no primeiro dia de aulas, uma vez que não percebia e não conseguia acompanhar as matérias. No 10.º ano frequentou uma área científica, com matemática portanto, e, como não tinha bases, reprovou. Frequentou depois um colégio privado onde encontrou um professor que considera excepcional e que a ajudou a ganhar o gosto pela disciplina e a descobrir formas de a estudar de modo a colmatar as suas lacunas, tendo conseguido uma boa classificação no exame do 11.º ano. No ano seguinte, já com outro professor, concluiu a matemática do 12.º ano.

Assim, atendendo ao seu percurso escolar algo atribulado e cheio de altos e baixos, foi mantendo com a disciplina, nas suas próprias palavras, "uma relação de paixão e ódio" conforme os professores que tinha e os resultados escolares que ia conseguindo alcançar.

Formação matemática na formação inicial e complementar

Sílvia frequentou o último curso do Magistério Primário da escola onde se formou. Confessa que não gostou da formação matemática que aí recebeu. A matéria que era dada posicionava-se ao nível do 9.º/10.º ano, sendo quase uma continuação dos estudos do secundário. Considera que a informação era muito teórica mas nada que se relacionasse com a profissão que os estudantes viriam a desempenhar no futuro, no sentido de abordar e explorar modos de ensinar:

> Aliás, é um comentário que eu às vezes tenho tido com colegas minhas que andaram por lá e noutros Magistérios, não foi só lá. Não estou a dizer que fosse erro do Magistério. Havia um Programa e os professores tinham que cumprir o Programa. Mas todas se queixam da falta de preparação para a vida prática. (E1, 12/12/2006)

E particulariza, com um exemplo próximo do dia a dia dos professores do 1.º ciclo, evidenciando o seu desejo e a sua necessidade de aprender modos de ensinar:

> Quer dizer, há muitas teorias, muitas teorias. E eu na altura até questionei um professor, não sei de que disciplina, eu assim: «Mas diga-me lá para que é que me interessa isto se eu não vou ensinar isto aos meus alunos?» E ele disse-me: «Mas vocês para ensinar têm que saber mais do que aquilo que vão ensinar.» Certo. Concordo perfeitamente. Mas eu queria era saber, de facto, como ensinar. Um aluno não consegue fazer a soma com transporte. Como é que... Que estratégias ou maneiras de ensinar o aluno? Mas isso não! Sabíamos que havia soma com transporte, [no caso da subtracção] pedia emprestado, que se dava depois e não sei quê. Mas era só por ali. Isso já nós sabíamos até do nosso... nosso normal, não é, do nosso dia-a-dia. Mas, para como explicar aí é que era um problema. (E1, 12/12/2006)

Sílvia evidencia a falta de conhecimento de conteúdo especializado (Ball et al., 2007). Este "como ensinar" foi-o aprendendo, desde o ano de estágio, recorrendo a colegas mais velhos, que por sua vez tinham aprendido por experiência própria.

Recentemente fez um complemento de formação em Matemática e Língua Portuguesa, o que não correspondeu à sua primeira opção mas por falta de vagas, pois pretendia um curso especializado em Expressões. Confessa o seu temor inicial por ir fazer um curso ligado à matemática, já que previa ter de lidar com uma matemática muito especializada focando "derivadas e aquelas coisas todas de que eu estava esquecida" (E1, 12/12/2006). No entanto, nada disso se passou, tendo Sílvia gostado muito da formação por se dirigir exactamente àquilo que esperava e necessitava como professora de matemática do 1.º ciclo:

> Ao princípio fiquei um bocado assustada. «Matemática! O que é que me vai esperar aqui?» - pensei eu. Que vinha aquela matéria que estava completamente esquecida. Mas, de facto, não foi nada daquilo. Quer dizer, a Matemática era muito diferente, era Matemática mas muito diferente daquilo que eu estava à espera. Não. Era... Acho que foi bom em ser assim! Era a Matemática que eu achava que devia aprender. (E1, 12/12/2006)

Contrariamente aos seus receios, considera que este curso de complemento de formação foi muito proveitoso no que diz respeito à matemática uma vez que foi incentivada a aprofundar determinados tópicos, de que destaca em particular a resolução de problemas, o que lhe activou a capacidade de raciocínio:

> Porque aqui na ESE o 1.º ano eu andava: «Ai, meu Deus! Que é isto? Eu não tenho os meus neurónios a funcionar!». Porque eu parece que não sabia pensar, porque foram muitos anos... (E2, 06/03/2007)

Paralelamente, segundo o seu relato, foram-lhe apresentadas maneiras de ensinar diferentes em que ficou muito interessada.

Não tinha anteriormente frequentado qualquer outra formação em matemática, embora já tivesse conversado com colegas que a informavam de que "agora a matemática está muito diferente". Mas Sílvia nunca conseguiu encontrar uma formação ligada à matemática no centro de formação da sua área.

Retrato profissional prévio

Nesta secção procura dar-se uma imagem profissional de Sílvia antes de ingressar no programa de formação. Uma vez que o início da recolha de dados coincide com o início da frequência da formação, a descrição que aqui se faz baseia-se mais nas entrevistas do que na observação directa.

Perspectivas sobre o ensino e a aprendizagem da matemática

Sílvia verifica que os alunos, no 1.º ciclo, costumam gostar de matemática. Os problemas começam a aparecer no 2.º ciclo, altura em que se apercebem que a disciplina é muito mais difícil, não conseguem atingir o grau de abstracção exigido e começam a desanimar. Reconhece também que as crianças são hoje muito mais imaturas, só querem brincadeira, não têm o sentido da responsabilidade; e por outro lado as turmas são grandes, os professores mudam constantemente, não podem dar uma atenção tão personalizada aos alunos e estes começam a deixar-se influenciar pela mentalidade dominante, de que "Matemática, ui! Não vale a pena chatear-se muito porque não consegue. A matemática parece assim um bicho papão" (E1, 12/12/2006). Outro factor que Sílvia pensa contribuir para o insucesso a matemática é a dificuldade de interpretação da língua portuguesa, defendendo que os alunos por vezes até sabem fazer o cálculo se o problema lhes for explicado.

Considera que os professores podem contribuir muito para mudar este estado de coisas proporcionando-lhes outro tipo de actividades mais dirigidas à compreensão. As actividades devem ser diversificadas e não rotineiras e levar os alunos a pensar:

> Não quer dizer que eu faça, mas acho que devemos proporcionar actividades diversificadas para que eles possam... primeiro também aprender a gostar da matemática porque eles começam a ver que a matemática não é só aquilo do dia-a-dia, de todos os dias fazer o mesmo. E também, essencialmente, pô-los a pensar, que acho que também é um problema grande da matemática, é eles não pensarem. (E1, 12/12/2006)

Defende mesmo que o papel mais importante da matemática enquanto disciplina escolar é desenvolver nos estudantes a capacidade de pensar e de organizar o seu pensamento. Realça assim o carácter formativo da matemática enquanto disciplina que desenvolve o raciocínio e ajuda na resolução de problemas futuros: "Porque a vida é feita de desafios e nós não sabemos tudo, mas se formos habituados a pensar, acho que depois teremos mais facilidade" (E2, 06/03/2007).

Numa aula típica Sílvia começa por uma parte expositiva que procura que seja curta, passando sempre pela concretização, usando diversos materiais. Procura também desenvolver nos alunos a capacidade de comunicação, para que ao explicar como fizeram possam ajudar os colegas. No entanto verifica que é muito difícil trabalhar com dois anos simultaneamente pois, enquanto está com uns, os outros têm tendência para ouvir o que se passa na outra metade da turma e não se concentram nas suas tarefas:

> Há sempre uma parte mais expositiva ou que tem... procura-se que seja curta, embora eu às vezes me prolongue um bocado demais na exposição. Mas depois parto sempre para o concreto: experimentarem com materiais, utilizar os materiais. [...] Por exemplo, se é trabalhar forma e espaço, usar os geoplanos ou tangrams, que ainda não comecei nesta fase, porque senão eles não conseguem perceber muito bem, não interiorizam muito bem. [...] Depois há sempre uma parte em que cada um dá o seu... faz a sua parte do seu trabalho e por vezes também explica aos colegas que não conseguiram e eles até conseguiram e explicam como é que fizeram. [...] Porque é assim, trabalhar com um ano só numa turma é uma coisa, trabalhar com dois, como é o meu caso, ou três e quatro como há colegas, torna-se muito mais complicado. [...] E eu para estar com uns tenho que dar outras actividades aos outros. Mas normalmente eles estão sempre mais receptivos àquilo que o professor está a fazer com o outro grupo... porque é tudo na mesma sala e... (E1, 12/12/2006)

Quanto ao papel dos diferentes tipos de tarefas, reconhece a importância da aprendizagem e do treino de uma determinada técnica, mas realça o valor de outro tipo de tarefas, como os problemas e as investigações, que levam a pensar, verificando que isso não é feito nalguns casos:

> Eu acho importante a parte da mecanização, sem dúvida. Porque há certas coisas que têm que ser mesmo mecanizadas: as operações, os algoritmos e essas coisas. Mas depois, a resolução de problemas eu acho muito interessante, porque são exactamente esses que, tal como as investigações, põem os alunos a pensar, não é? Põem-nos a pensar em estratégias diferentes [...] Dar mais tempo à criança para propostas de actividades que as obriguem a pensar, para que elas se vão habituando. Porque eu vejo pelo meu filho que está no 3.º ciclo, e nunca o vi resolver tarefas de investigação nem problemas destes de... É tudo muito mecanizado. E se nós não os habituamos desde o início... (E2, 06/03/2007)

Verifica mesmo que, com um tipo de tarefas menos tradicionais, os alunos às vezes nem sequer se apercebem de que estão a trabalhar na matemática:

> Se a gente lhes manda resolver um algoritmo, eles sabem nitidamente que estão na matemática. Mas, às vezes, quando estão na resolução de um problema, eles nem sempre se apercebem que estão na matemática. Porque fala-se, dá-se sugestões, um dá uma opinião, outro dá outra e eles até se esquecem que estão na matemática e vêem a matemática... proporciona-lhes uma visão diferente da matemática. (E2, 06/03/2007)

É que a visão das crianças sobre a matemática já está condicionada desde muito cedo. Mas pode-se-lhes "trocar as voltas", no dizer de Sílvia, pondo-os a pensar, a escrever, a explicar o seu raciocínio. "Porque na matemática fala-se menos ou é suposto falar-se menos" (E2, 06/03/2007). E Sílvia considera interessante conciliar as três vertentes.

Quanto aos materiais, acha importante a manipulação para a aquisição de determinados conceitos: "Eles aprendem mexendo. Parece que têm os olhos nas mãos" (E2, 06/03/2007). Em relação ao manual, dá conta de que o utiliza já que os pais o compraram, mas não a cem por cento. Ou seja, pesquisa noutros locais, manuais e Internet, selecciona, faz montagens, organiza as coisas ao seu modo. Não utiliza os livros de fichas de revisão pois considera-os demasiado infantis para serem resolvidos no final do ano, que é quando podem ser, uma vez que abarcam todos os conteúdos.

Quanto às formas de organização do trabalho, considera que os alunos muito novos, do 1.º e 2.º anos de escolaridades, que são os que tem neste momento, são ainda bastante egocêntricos e têm dificuldade em trabalhar em grupo: "Eles, a maior parte das vezes, estão agrupados. Não estão a trabalhar em grupo" (E2, 06/03/2007). Acha que mais tarde é importante fazer alguns trabalhos de grupo para discutirem e apresentarem soluções, mas mantendo também o trabalho individual pois defende que o aluno tem de ser capaz por si, individualmente, e por outro lado num grupo há inevitavelmente aqueles que trabalham e aqueles que não fazem nada pois o trabalho aparece feito pelos outros.

Dificuldades/Necessidades de formação

Apesar de ter frequentado recentemente um curso de formação complementar ligado à matemática, Sílvia continua a sentir lacunas, sobretudo na utilização de materiais manipuláveis para a exploração de conceitos matemáticos:

> O que é que eu queria? Queria aprofundar mais... tirar partido... aprender a tirar partido do material multibase, desses materiais que existem. Manipuláveis. Como é que eu posso fazer coisas? Como é que eu posso ensinar isto ou aquilo? Porque é uma... uma lacuna que eu tenho, que eu sinto que tenho nessa área. (E1, 12/12/2006)

Considera que a matemática é uma disciplina fundamental, onde há muito insucesso, e reconhece que por vezes a culpa é também dos professores, porque apresentam aos alunos uma disciplina muito complicada, quando de facto, apresentada de outro modo, ela pode tornar-se mais aliciante. Daí sentir a necessidade de aprofundamento sobretudo do seu conhecimento didáctico.

Refere também que o que se exige hoje do ensino da matemática é muito diferente do que se considerava importante no tempo em que frequentou a formação inicial, dando como exemplo o ensino através da resolução de problemas. Sílvia sabe que no actual programa a resolução de problemas está no centro do ensino e da aprendizagem, mas não sabe como operacionalizar essa questão. Sabe utilizar problemas mas muitas vezes tem dificuldade em tirar partido deles para trabalhar conteúdos matemáticos.

Sílvia dá conta da grande importância que teve para ela a frequência do complemento de formação, já que ficou muito interessada em determinadas formas diferentes e inovadoras de abordar com os alunos os tópicos matemáticos. Contudo reconhece que não teve tempo para as desenvolver e espera deste programa de formação precisamente a concretização desse aspecto na prática de sala de aula:

> Mostraram-me maneiras de ensinar que eu fiquei, assim muito... muito interessada. Mas quê? Depois não houve tempo para as desenvolver. [...] Eu noto que nos primeiros anos eles gostam de Matemática, porque é uma Matemática em que nós usamos muitos materiais, nós usamos muita

> brincadeira para eles aprenderem determinados conceitos e eles vêem aquilo como uma brincadeira. Aliás, eles adoram pegar no material Cuisenaire. Eles... aquelas barras para eles é uma alegria e o problema é depois quando passam àquela fase de uma maior abstracção. Aí é que é mais complicado. Mas... precisamente para aprender mais coisas, porque, lá está, a tal lacuna que eu senti durante o curso, que me faltou por falta de tempo. Utilizar os materiais. Como é que eu posso utilizar os materiais para desenvolver determinados conteúdos que eu acho muito importantes? (E1, 12/12/2006)

Sílvia denota, como se verifica, uma percepção de que os materiais manipuláveis são importantes mas não devem ser usados como um fim em si – a brincadeira – mas como uma ferramenta inicial para uma aprendizagem mais profunda progredindo no nível de abstracção.

Outra razão importante que Sílvia destaca para a frequência do programa é a necessidade de quebrar o isolamento. Neste momento está numa escola de dois lugares pelo que os seus problemas e dúvidas não são os do colega, já que este lecciona precisamente os outros dois anos de escolaridade. E já esteve em pior situação, em escolas de lugar único, onde se sentia completamente só, sem ter com quem conversar, debater as dificuldades e as dúvidas, pedir ajuda. De modo que vê nesta formação uma oportunidade para trocar impressões e experiências, enriquecer-se no contacto e no debate de ideias e na troca de materiais de ensino com os pares.

O percurso profissional ao longo do Programa

Pretende-se aqui descrever o percurso de Sílvia durante a frequência do programa de formação. Por uma questão de organização, apresentam-se inicialmente e em separado as vertentes do programa que proporcionam uma descrição mais concreta e extensiva, e cujos dados foram recolhidos por observação directa e/ou registo vídeo, como sejam, as sessões de formação, a prática de sala de aula, incluindo particularmente a produção matemática dos alunos, e o trabalho autónomo. Outros aspectos mais gerais de impressões e atitudes da professora, cujos dados foram recolhidos essencialmente através de entrevista, e que estão ligados às vertentes do programa de acompanhamento em sala de aula, particularmente na relação com a formadora, de reflexão e de partilha de experiências, são apresentados logo de seguida na parte final da secção e integram por vezes vários aspectos em simultâneo, já que nas entrevistas a professora faz a sua gestão conjunta.

As sessões de formação

Sílvia foi sempre assídua nas sessões de formação durante os dois anos, que frequentou com muito empenho. A sua participação foi sempre marcada por grande vivacidade e entusiasmo na forma como acolhia as sugestões dadas e como se relacionava com os colegas numa perspectiva de colaboração. Valoriza o carácter prático das sessões, onde pôde sempre tirar ideias para a sua sala de aula, realçando o uso de materiais, estruturados e não estruturados, na exploração dos conceitos:

> Eu acho que esta, da matemática, é excepcional. Não tem nada a ver com as formações que eu frequentei. Esta é, de facto, a formação que eu queria, é aquela que eu precisava e que gosto. Ou seja, coisas que eu posso aplicar nos meus alunos. Porque nas outras eu aprendi muitas teorias e de teorias eu já sei: pego num bom livro, leio. Mas nesta não. É o que eu precisava. Saber como trabalhar com os materiais, tirar partido da, por exemplo, tirar partido dos materiais estruturados ou até mesmo por estruturar e tirar partido de uma simples linha que a gente desenha no quadro. (E2, 06/03/2007)

Confessa que por vezes, até sem ter previsto de antemão, trabalha na aula uma ideia que foi sugerida na formação pois vai integrando novos conhecimentos que lhe vêm a ser úteis no momento certo e em que nunca tinha pensado antes de eles serem debatidos nas sessões de formação. Realça a importância de as tarefas serem exploradas nas sessões do mesmo modo que será de esperar que sejam trabalhadas com os alunos porque há uma transferência muito mais directa para a prática:

> Nós tivemos a oportunidade de praticar aqueles exercícios da mesma forma que depois poderíamos aplicar em contextos de sala de aula; teve interesse porque nos deu conhecimentos e ficámos a saber como podíamos trabalhar aquela... ou pelo menos algumas pistas para saber trabalhar aquela actividade... (E3, 12/07/2007)

Dá ainda conta da ajuda que constitui para si a brochura editada pela equipa de formadores, que consulta frequentemente como fonte de ideias:

> Nós temos orientações, temos actividades mesmo que podemos experimentar e depois umas puxam as outras. Diz assim: «Olha lá se eu experimentasse esta?» Eu às vezes vou àquele livro da Matemática: «Hoje vou experimentar esta. Tal. Amanhã vou experimentar esta. Deixa-me cá ver o

> que é que eu vou fazer, como é que vou fazer e tal.» Preparo o material se for necessário e eles gostam muito mais. Acho que o livro ajuda muito. (E3, 12/07/2007)

Valoriza também o facto de as tarefas propostas nessa brochura terem já sido experimentadas em sala de aula, tendo até algumas registos fotográficos dessa aplicação; este aspecto incute-lhe confiança, pois se já resultaram com alguém, "Na minha turma também poderá resultar" (E3, 12/07/2007).

No final da formação, Sílvia constata que o tempo despendido nas sessões de formação acabou por ser pouco, atendendo à enorme quantidade de tópicos a explorar e à sua vontade de saber mais:

> Mas as sessões até ainda haviam de ser mais, sinceramente, porque acho que são tantos os conteúdos, são tantas actividades que se pode fazer que uma aula teórica de 15 em 15 dias... acaba por ser pouco. Eu sei que o tempo é pouco para nós. Mudaria para mais. Mas se calhar... Porque a gente às vezes está: «Ai, eu ainda gostava de saber mais.» Eu gostava de saber mais! Eu gostava sinceramente de saber mais. Mas o tempo também não... O programa acaba aqui. E depois há a formação que cada um pode fazer, não é? Pesquisas e tudo, mas... (E3, 12/07/2007)

A prática de sala de aula

Ambiente. A turma era no primeiro ano constituída por doze alunos, seis do 1.º ano e seis do 2.º ano. No segundo ano de formação a professora manteve a mesma turma, agora com seis alunos do 2.º ano e cinco alunos do 3.º ano, já que se deu a transferência de um aluno.

As mesas duplas tanto estão na disposição tradicional voltadas para o quadro como estão em U, bem como ainda dispostas para trabalho de grupo. Normalmente os alunos dos dois anos estão separados mas por vezes encontram-se misturados; esta é de resto uma estratégia usada por vezes pela professora em tarefas mais complexas. É uma turma pequena e com bom comportamento. No início da formação são medianamente participativos. Mostram-se envolvidos e interessados nas tarefas propostas, embora alguns alunos sejam mais passivos.

As tarefas e os recursos. Sílvia investiu sempre bastante na preparação das aulas observadas, seleccionando, com base nas propostas da formação, tarefas adequadas e com elevado grau de desafio para os seus alunos. As tarefas eram de natureza diversificada, mas sobretudo de cariz exploratório, iniciando-se com o apoio de materiais manipuláveis de modo a concretizar as situações contempladas, e era normalmente distribuída uma ficha de trabalho com indicações para os alunos sobre a sequência de trabalho a seguir e questões orientadoras, e que era utilizada para os vários registos. Houve várias oportunidades de resolução de problemas, alguns deles de carácter mais aberto e investigativo, em que eram possíveis várias abordagens e pontos de chegada diversos. As rotinas de cálculo foram exploradas nas aulas observadas no contexto de tarefas e realizar e não duma forma isolada. A professora preparava cuidadosamente os materiais a utilizar, quer se tratasse de materiais comerciais quer construídos por si, e organizava a sequência da aula incluindo a previsão de questões a colocar oralmente de modo a levar os alunos a evoluir na apropriação e aprofundamento dos conceitos matemáticos em estudo.

Das tarefas referidas neste trabalho, as que foram apresentadas por Sílvia em suporte de papel constam do Anexo H.

Durante o primeiro ano, (1) Explorou padrões de repetição e de crescimento. Utilizou figuras geométricas em plástico coladas no quadro com *post it* para definir as sequências onde seria necessário descobrir o padrão. Começou com padrões de repetição do tipo ABAB, ABCABC, etc. Fizeram a identificação da estrutura dos padrões utilizando outras representações. Em seguida passou-se ao padrão de crescimento "Bolas em V", com a exploração de vários aspectos numéricos relacionados; (2) Trabalhou conceitos geométricos no geoplano. A professora distribui um geoplano para cada dois alunos. Como é a primeira vez que usa este material, começam por explorações livres. Passam depois à construção de figuras seguindo várias condicionantes, tais como: "desenhar um triângulo passando por 3, 4, 5 pregos". Por fim procuram descobrir todos os quadrados que é possível desenhar no geoplano; (3) Propôs problemas para o 1.º ano e um jogo de números com dados para o 2.º ano. No problema para o 1.º ano teriam de escolher, de entre vários animais, as hipóteses possíveis de modo a perfazer seis patas. Com o 2.º ano pretendia-se que preenchessem uma grelha de 2x2 com os números que iam obtendo no dado de modo a conseguir a maior soma, a menor soma, um número par, etc. Os alunos, em ambos os grupos, trabalhavam a pares de modo a poderem fazer um trabalho mais autónomo já que a professora tinha de se desdobrar para dar apoio aos dois grupos; (4) Voltou à abordagem da geometria, por análise de figuras obtidas por cortes no quadrado. Há muitos quadrados em papel, tesouras, réguas, cola e papel de cenário para fazerem um cartaz. Os alunos, em pares, deviam, com um único corte recto no quadrado (para o que deviam utilizar uma régua para traçar o segmento de corte) obter o maior número possível de polígonos diferentes. À medida que as novas hipóteses iam aparecendo, a professora ia fazendo sínteses e iam construindo e ampliando o cartaz. Depois passaram para a exploração com dois cortes.

No segundo ano, em todas as aulas observadas houve ocasião de abordar a iniciação ao pensamento algébrico, passando pelo desenvolvimento do sentido do número: (5) Foi colocado no quadro um cartaz com a correspondência numérica às letras por ordem alfabética, a começar no número 1. Cada aluno, individualmente, tinha de calcular o valor do seu nome. Em seguida tinham de inventar uma frase com 200 pontos. Foi incentivado o cálculo mental, explorando-se várias estratégias como a de associação de parcelas e em que foi utilizada a recta numérica. Passou-se depois às contagens visuais. Perante uma imagem com uvas, teriam de fazer a contagem dos bagos de modo expedito, reconhecendo padrões na distribuição e fazendo associações; (6) Explorou o raciocínio funcional através de máquinas transformadoras. A professora tinha numa mesa uma série de caixas, cada uma com uma etiqueta (que pode mudar-se) que indica a transformação a fazer ao número que entra, a que chamou as máquinas de segredo. Na segunda parte passou a haver duas caixas sem indicações e só eram conhecidos os números de entrada e saída, tendo assim os alunos que descobrir os mistérios da transformação; (7) Fez uma iniciação às probabilidades e à estatística através do jogo da soma e do produto. Os alunos, em pares, lançavam dois dados e, se a soma fosse par, ganhava um deles; se fosse ímpar pontuava o outro. O objectivo era descobrir se o jogo é ou não justo, tendo sido feitos registos por cada um dos grupos e centralizado os registos globais da turma no quadro, para poderem ter uma visão mais global da questão por análise de uma maior frequência dos acontecimentos. Depois foi feito o mesmo jogo mas com o produto dos números dados pelas pintas; (8) Trabalhou os conceitos de área e perímetro a partir de uns campos de pastagem quadrados. Tratava-se por um lado de analisar a quantidade de erva de pastagem para uma vaca e, por outro, de colocar uma cerca no campo para a vaca não fugir. Continuou para os padrões em sequências ligados ao perímetro e área de quadrados. Foi apresentada uma sequência de quadrados de lado 1, 2, 3, ... nos quais se pretendia a análise do perímetro em vários casos e a descoberta e generalização de um padrão; e (9) Continuou a aula anterior, trabalhando padrões em sequências, mas desta vez relacionados com o perímetro e a área de rectângulos. Foram exploradas sequências de rectângulos desenhados em quadrícula, em que se pretendia descobrir e generalizar um padrão para a medida do perímetro e da área.

Papel da professora. Uma característica desta professora é que é muito exigente com os alunos na medida em que gosta de lhes apresentar desafios reais. Confessa que às vezes até se sente intranquila por receio de estar a exigir demais, mas considera que se eles "derem" não há razão para ir a um ritmo demasiado lento. Neste particular, lamenta o facto de ter dois anos por ter que dividir o tempo e dar dois programas:

> Sou, sou muito exigente. Eu exijo... Eu, às vezes, até fico com a consciência um bocado pesada, entre aspas, porque não sei... Eu, às vezes, não sei até que ponto eu estou a exigir demais. Mas eu acho que é melhor exigir do que depois... Sou muito exigente, porque eu acho que se eles derem... Há aquele que não dá. Mas aquele que dá não vai para um ritmo mais... mais lento. Pronto. Mas aqueles que dão eu, às vezes, tenho pena porque eu ainda... eu, por exemplo, gostava de ter só uma turma, só um ano. Porque se eu tivesse só um ano ia conseguir fazer muita coisa. Eu acho que tinha... acho que, tenho consciência que, se tivesse um ano conseguia fazer muitas coisas engraçadas e tudo. Agora com dois anos eu tenho que dividir o tempo, eu tenho que dar dois programas. (E2, 06/03/2007)

Sílvia é uma pessoa activa e desembaraçada que imprime um bom ritmo de trabalho aos alunos. Para além da selecção das tarefas e da escolha criteriosa de materiais adequados, procura sempre a participação activa dos alunos, nomeadamente na comunicação e explicação de raciocínios aos colegas. É muito viva nas intervenções e exprime-se numa linguagem solta e divertida. Remete para a turma algumas questões ou descobertas de um aluno quando considera que os colegas podem beneficiar com a sua apreciação. Normalmente escolhe o trabalho a pares ou individual. Procura sempre fazer sínteses finais. À medida que o tempo passa vai-se sentindo uma grande evolução nesta professora, conforme se pode ver por registos no diário de campo da investigadora a propósito da última aula observada do primeiro ano:

> Acho que houve muito progresso na Sílvia, ela esta cada vez melhor. Vê-se a crescer profissionalmente, Cada vez faz melhor e esse facto vai-lhe aumentando a segurança para as próximas. Aliás na reflexão as palavras jorram-lhe com um entusiasmo e uma vitalidade absolutamente espantosos. Diz que à medida que o tempo passa consegue compreender melhor o sentido das tarefas. Esta foi-lhe mostrada no curso de complemento de formação e na altura não lhe deu muita atenção mas agora, depois de a usar, é que se apercebe de como é rica e proporciona tantas explorações. (DC, 20/05/2007)

A professora preocupa-se com o questionamento, pensando de antemão em questões que podem activar o pensamento matemático dos alunos.

Do relatório de observação de aulas:

> Questiona provocatoriamente, de modo a estimular os alunos a progredir, a avançar, a aprofundar… O questionamento insistente e seguro leva a uma muito melhor e mais precoce assimilação dos conceitos. (Rel4-1, 15/05/2007)

No início do segundo ano declara que está a dar muita importância àquilo que designa por “brincar com os números”, trabalhando-os de diversas maneiras mas sempre de modo a suscitar a compreensão e a estabelecer relações, em suma, a desenvolver nos alunos o sentido do número. Embora atribua importância aos algoritmos, considera que estes podem ser trabalhados em contextos mais vastos, por necessidades de resolução de problemas ou integrados em tarefas de exploração:

> Exactamente essa parte do cálculo e deste brincar com os números. Não é… Eu, por exemplo, nas operações, eles aplicarem os algoritmos e assim, mas eu gosto mais daquele exercício que os põe a pensar. Ainda ontem, por exemplo, fizerem uma série de exercícios que é… tipo adivinhas. Olhe! Veja este aqui: «Descobre o número. Eu sou maior que 800, menor que 900. É ímpar. Tenho um algarismo que é o 0 e a soma dos seus algarismos é o 13. Qual é o número?» […] Trabalha já uma série de conceitos que eles têm de ter em atenção em simultâneo. […] Aqui têm de fazer ao contrário. Têm o produto e têm de encontrar os factores. Acho que isto é melhor do que estar ali a fazer um algoritmo simples. (E4, 03/12/2007)

Relata uma outra tarefa feita com os alunos que consiste em pensar num número de três algarismos, invertê-lo, subtrair o menor do maior, inverter a diferença e somar esses dois números, constatando que o resultado é sempre 1089. Observa a esse respeito os comentários dos alunos, confessando que têm feito descobertas, por exemplo na tabuada, de que a professora nunca se tinha apercebido:

> Mas eles acharam: «Como é que pode ser, os números são diferentes!» Quer dizer, que coisa tão bonita! Nós podemos brincar com isso. Então nós não podemos brincar com os números e encontrar coisas?… Ah! No outro dia na tabuada do 9… Descobriram-me uma série de coisas na tabuada do 9. É que o resultado… Mas foram eles! 1, 2, 3, 4… Não. 9 vezes 1, 9… Depois que o resultado era sempre de… dava sempre 9 e depois… […] Ai! Sei que eles descobriram para aí uma série de coisas nas tabuadas! Que eu assim: «Olha! Nem.. essa nem eu sabia!» (E4, 03/12/2007)

Papel dos alunos. A turma, embora de dois níveis de escolaridade, é pequena, o que proporciona um maior acompanhamento individual. No início da formação era uma turma medianamente participativa mas, à medida que o tempo vai passando, vai-se notando nestas crianças um progressivo interesse e entusiasmo pelo trabalho em matemática. Os alunos gostam dos desafios que lhes são propostos e envolvem-se de forma persistente e concentrada.

Do diário de campo ressalta a surpresa da investigadora perante essa atitude em alunos do 1.º e 2.º anos de escolaridade: "Aula de duas horas em que crianças tão pequenas trabalham ininterruptamente e ainda por cima à tarde" (DC, 15/02/2007). Ou, num relatório de aula do fim do 2.º ano:

> O trabalho foi duro e estimulante mas os alunos corresponderam integralmente. Duas horas a puxar pela cabeça sem se distraírem é obra! Só o [nome do aluno] é que é muito disperso mas mesmo ele só pediu para ir à casa de banho uma vez! Foi espectacular, trabalharam muitíssimo. No fim até nós estávamos cansadas, não sei como é que eles aguentam duas horas sem intervalo e sem interrupções! (RelA5-2, 27/05/2008)

Nota-se do princípio para o fim da formação uma grande evolução dos alunos também em termos de autonomia no trabalho e organização em pares. Podem constatar-se estes factos por observação dos registos feitos em três épocas diferentes:

"A professora é bastante directiva. As crianças são muito pequenas e estão à espera de indicações" (RelA1-1, 30/01/2007). E "Os alunos estão entusiasmados. Alguns já conseguem trabalhar a pares" (RelA4-1, 15/05/2007). E ainda "Muito interessados e participantes. Muito à-vontade. Organizaram-se em pares com bastante autonomia" (RelA3-2, 04/03/2008).

Produção matemática dos alunos. Ao longo destes dois anos verificou-se que foram focados e abordados muitos tópicos matemáticos do programa. Esta análise não pretende apresentá-los exaustivamente nem tal seria possível. Procurar-se-á apresentar alguns episódios com o objectivo de ilustrar o desenvolvimento de capacidades transversais constantes nesse mesmo programa ligadas sobretudo ao desenvolvimento do sentido do número e à emergência do pensamento algébrico, pois foi esse o tópico privilegiado na segunda parte deste estudo, e que se mostraram mais relevantes através da observação de aulas.

Sílvia confessa que, quando lhe foi proposto o tema de trabalho do pensamento algébrico para o segundo ano de formação, essencialmente para o trabalho autónomo, ficou bastante apreensiva porque desconhecia a designação. Na sessão de formação que abordou esse tema, porém, pôde constatar que muitas tarefas ligadas ao pensamento algébrico já eram por si trabalhadas, apenas não lhes dava o nome:

> Pelo menos o termo para mim era só associado aqui ao 8.º ou... ligado às equações. E eu também achei engraçado, porque eu nunca pensei no 1.º ciclo trabalhar álgebra. Mas utilizar já o termo, eu fiquei assim um bocado assustada quando a Teresa me disse: «Se trabalhasse a álgebra...» Eu: «Ai Jesus, trabalhar a álgebra!» Porquê? Porque eu não sabia exactamente o que

era. Mas quando começámos a... quando vieram as sugestões de actividades que a gente foi aprofundando na escola: «Afinal eu sou capaz de fazer isto!» (E6, 14/07/2008)

Padrões de repetição em sequências. Na primeira aula do primeiro ano Sílvia explorou padrões de repetição em sequências com base numa tarefa com os mesmos objectivos realizada na sessão conjunta. Para isso utilizou inicialmente figuras geométricas em plástico coladas no quadro com *post it*. Começou com um padrão alternado, triângulo, quadrado, triângulo, quadrado, pedindo aos alunos para lhe darem continuidade. Sugeriu de seguida que dessem nomes mais curtos às peças, por exemplo, chamar ao triângulo A e ao quadrado B, e registaram o padrão ABAB. Para suscitar a comunicação pediu em seguida a uma aluna para descrever o que via, dizendo-o como quisesse, e sugeriu uma conversa telefónica para que a criança pudesse exprimir-se oralmente, o que provocou um episódio anedótico:

Prof. Então quando tu telefonasses à tua prima que está em França podias dizer de outra maneira.
Aluna 1: Em França não falo com prima nenhuma. As primas são afastadas.
Prof. [Rindo-se] Faz de conta.
Aluna 1: São todas afastadas. (A1-1, 30/01/2007)

E a aluna não conseguiu desprender-se do facto concreto de não poder fazê-lo por não ser habitual falar com a prima!

Explorou o facto de o padrão continuar indefinidamente. Mudou as peças, usando outra para construir o mesmo padrão, e atenderam também à alternância de cor numa outra variante. Passou depois a um padrão do tipo ABCABC também com figuras geométricas, triângulo azul, círculo verde, rectângulo vermelho, e formulou novamente o pedido de indicarem o que diriam numa conversa telefónica, mas mudando o destinatário para uma amiga muito longe. No entanto, a estratégia não teve muito sucesso. Os alunos têm ainda dificuldades de expressão:

Prof. Aluna 2, agora és tu que vais telefonar a uma amiga tua muito longe e vais descrever o padrão que fizemos aqui na sala. Olha diz lá como é que se faz. Mas ela tem que ficar a perceber. [A professora faz uma breve pausa para que a aluna responda, mas sem sucesso] Anda lá!
Aluno 3: Eu sei.
Prof. Ó Aluno 3, mas eu queria que fosse a Aluna 2. Mas se sabes então, ora diz lá então que a Aluna 2 hoje está tão... está tão...
Aluno 3: É o desenho do triângulo...
Prof. Estás a falar ao telefone. Estás a falar ao telefone. Então diz lá.
A3 As cores!?
Prof. Eu não sei. Tu é que sabes como é que vais dizer!
Aluno 3: Forma.

Prof. Formas, cores, tamanhos… Fala o que tu quiseres. O padrão está ali. Ora diz lá. Diz assim: Olha eu hoje fiz um…

Aluno 3: Triângulo.

Prof. … ou pensei num desenho, como queiras. Em que pus primeiro um?…

Aluno 3: Triângulo, círculo, rectângulo.

Prof. E depois continuei este desenho. Olha, Aluna 4, tu és capaz de me dizer qual era o quarto desenho do nosso… do meu… a quarta figura do meu desenho?

Aluno 3: Um triângulo novo. (A1-1, 30/01/2007)

De seguida comparou este padrão com o anterior para que os alunos notassem as diferenças, chamando a atenção para o grupo que se repete:

Prof. Este padrão é igual a este?

$A_{\text{[vários]}}$ Não.

Prof. Quantas figuras tem? Quantas vezes é que se repete este conjunto?

$A_{\text{[vários]}}$ Dois.

Prof. Neste conjunto temos dois elementos que se vão repetir. Neste já temos?…

$A_{\text{[vários]}}$ Três.

Prof. Três. É a partir daqui que ele se repete. Olhem! (A1-1, 30/01/2007)

Neste padrão os alunos sugeriram já outras representações, e a professora aceita e incentiva à apreciação por parte dos colegas e ao registo:

Aluno 1 Ó Professora! E neste não podemos pôr assim o A B C?

Prof. Chiu! Ah! O Aluno 4 disse-me assim: «Ai, eu não pus A B C. Eu pus…» Olha diz-me lá o que é que tu disseste.

Aluno 4: P.

Prof. P.

Aluno 4: T L.

Prof. E acham que está mal?

$A_{\text{[vários]}}$ Não.

[…]

Prof. Diz lá outra vez.

Aluno 4: P T L.

[…]

Aluna 5: Eu sei um.

Prof. Ãn?

Aluna 5: 100 200 300.

Prof. Sabes o quê? Não percebi.

Aluna 5: 100 200 300.

Prof. Ai, isso é complicado. Só usar assim coisinhas… Mas também dava. A Aluna 5 propõe… Ouçam! A Aluna 5 propõe que em lugar de se chamar àquele padrão A B C ou P T L ou 1 2 3 ela chama… agora já não me lembro. Qual é?

Aluna 5: É 100 200 300.

Prof. Então vai lá pôr.
[A Aluna 5 levanta-se e dirige-se para o quadro.] (A1-1, 30/01/2007)

A professora aproveitou neste momento para fazer uma pequena exploração numérica à volta dos números surgidos – os alunos do 2.º ano tinham trabalhado recentemente o 300.

Mais à frente, usando uma grelha de 5x5, colocou em sequência um motivo de quatro figuras geométricas diferentes, pretendendo que os alunos continuassem o padrão, como se ilustra na Figura 61:

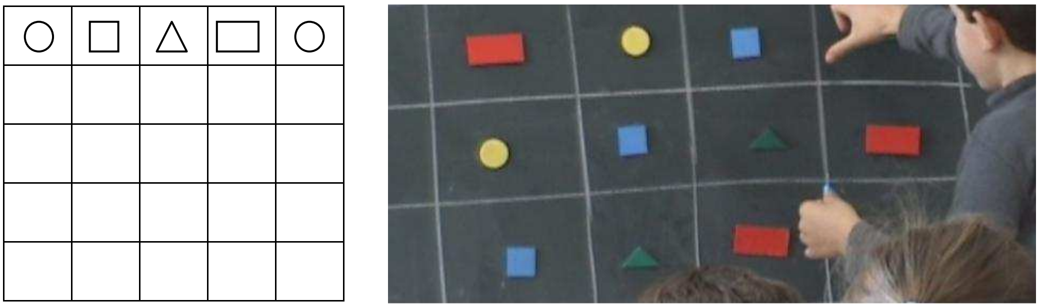


Figura 61. Padrão de repetição em grelha

Os alunos foram à vez ao quadro colocar a peça seguinte. A professora aproveitou para explorar os conceitos de horizontal, vertical e diagonal. Começaram a reparar no efeito produzido pelas figuras em diagonal, tendo feito descobertas que foram comunicando à vez.

A certa altura a professora começou a associar a figura ao número de ordem da casinha, questionando: Que figura está na 10.ª casinha? E na 12.ª? Os alunos identificavam as peças. Quando tinham preenchido as 16 primeiras células, a professora colocou o seguinte desafio:

> Então agora vais para o lugar e toda a gente vai pôr a cabeça no lugar. Eu quero saber... Não vamos preencher mais para já. Sem preencher, eu quero que vocês me digam se são capazes de dizer qual é a figura que vai ficar na casinha número vinte e um. No quadradinho vinte e um. (A1-1, 30/01/2007)

Os alunos continuaram mentalmente o padrão para poderem responder à questão. Não foi feita generalização distante. A professora aproveitou para treinar a contagem de cinco em cinco, para ser mais rápida a localização da casinha 21. Continuaram a exprimir a descoberta de padrões na horizontal, na vertical e na diagonal. Eis um exemplo:

> Aluna 1: Descobri outra.
> [...]
> Aluna 1: Na... [Faz o gesto vertical simulando as colunas laterais]
> Prof. Na vertical?...
> Aluna 1: Na vertical... A horizontal e a vertical é tudo igual. (A1-1, 30/01/2007)

À frente a professora pediu para utilizarem umas figuras geométricas que já tinham recortado previamente para construírem, a pares, um padrão numa grelha de 5x5. A professora pediu para os colocarem na grelha e depois de verificados seriam colados. Surgiram muitos padrões diferentes. Uns usaram duas figuras, outros três e outros ainda quatro, com ou sem elementos repetidos, que tiveram de ser explicados à professora à medida que esta ia chegando a cada grupo.

Os alunos trabalharam com interesse e envolvimento, na sua maioria. Há alguns mais passivos e sobretudo há um altamente disperso, do 1.º ano, que perturba um pouco o trabalho da turma. Houve oportunidade para reconhecerem, predizerem, continuarem e construírem padrões de repetição em configurações diferentes, compararem padrões explicitando as diferenças, identificarem o motivo de repetição, abstraírem dos objectos para identificarem a estrutura do padrão, e comunicarem os seus raciocínios e descobertas.

Padrões de crescimento em sequências – primeira abordagem. Sílvia explora ainda na mesma aula um padrão de crescimento numa sequência figurativa, a das bolas em V, apresentado na Figura 62, que tinha sido trabalhado numa sessão de formação. A professora inicialmente ia colocar objectos no quadro a formar a configuração, mas acabou por optar por fazer o desenho já que a fixação dos objectos iria ser trabalhosa e demorada.

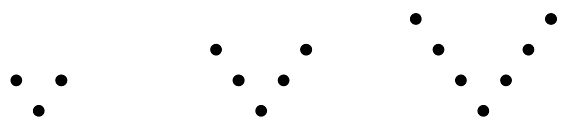


Figura 62. Padrão das bolas em V

A exploração foi feita no grupo-turma. A professora analisou com os alunos a configuração em V dos três termos desenhados e concluíram sobre o número de bolinhas em cada um. De seguida pretendia que desenhassem o elemento seguinte da sequência. Um aluno disse que tinha de ser maior, ao que a professora perguntou quanto maior. Teria oito bolinhas?

Prof.	Olhem! O oito tem mais de sete, não tem?
$A_{[\text{vários}]}$	Tem.
Aluno 1:	O oito? Mas não dá.
Prof.	Mas não dá, porquê?
Aluna 2:	Porque tem que ter mais dois.
Prof.	Ah! E porque é que tu sabes que tem que ter mais dois?

Aluna 2: Ao nove se... Ao oito... Ao sete se pormos mais um fica oito. Fica um lado maior do que o outro.
Prof. Ah! Então anda cá desenhar. Como é que tu dizes? Espera aí. Espera aí.
[A aluna dirige-se para o quadro.]
Prof. Espera aí. Tu dizes que não pode ser oito?...
Aluna 2: Porque senão estes lados ficam tortos. (A1-1, 30/01/2007)

A professora orienta para o desenho da quinta figura havendo logo várias respostas simultâneas, o questionamento do porquê e a argumentação correspondente:

$A_{[vários]}$ Professora! Vai dar onze.
Prof. Porquê que vai dar onze?
Aluna 3: Tem que ser mais dois.
Prof. Mais dois como?
Aluno 4: Tem que pôr mais dois porque senão fica aleijado. (A1-1, 30/01/2007)

Em seguida as descobertas e intervenções sucederam-se:

[...] Aluno 5: Senão ficava torto.
[...] Aluna 6: Ou mais quatro...
[...] Aluna 3: Sempre mais um número par.
[...] Aluno 7: Mas um par não faz um V.
[...] Aluno 8: É sempre mais dois no cimo do V. (A1-1, 30/01/2007)

A professora, consciente de certa confusão provocada pelas intervenções, exclama: "Então vamos pôr isto numa tabela que isto quer-se organizado". Preencheram então a tabela desenhada no quadro e cada um, no seu lugar, tinha também uma tabela para fazer o registo. Raciocinaram, um a um, com grande profusão de pedidos de explicação, até ao oitavo termo relacionando a ordem com o termo e concluindo que o número de pintinhas seria 17 porque era preciso acrescentar sempre mais dois. A partir daí disseram sempre "o seguinte", contando de dois em dois até ao 33. Nesse momento, a professora colocou a questão mais importante deste trabalho:

Trinta e um, trinta e três... O que iria... o que iria fazer V's enormes. Olhem uma coisa! E existirá?... Uma pergunta! Existirá um V...[...] Será que com 48 bolinhas eu consigo fazer um V? (A1-1, 30/01/2007)

As respostas sucederam-se e foram sendo orientadas para uma conclusão linguisticamente correcta:

$A_{[vários]}$ [Em coro] Não.
Prof. Porquê?
[...]
Aluna 1: Porque... porque um lado tem mais do que o outro. Porque o V é par.

Prof. Quarenta e oito é um número?...
Prof. e A[vários] ... par.
[...]
Aluno 2: Ó professora! Ó professora! Só se fosse com quarenta e nove [bolinhas].
A[vários] Aí... aí pode dar.
Prof. Então vamos lá voltar atrás. Para trás. A pergunta que eu fiz é... Chiu! A pergunta que eu fiz é: Será possível fazermos um V com quarenta e oito bolinhas?
A[vários] [Em coro] Não.
Prof. Não. Porquê?
A[vários] Porque é par.
Prof. Um de cada vez. Aluna 1! Diz lá.
Aluna 1: Porque fica com um lado mais e o outro menos.
Prof. Porque iria ficar com um lado maior do que o outro. Porque o número quarenta e oito é um número?...
A[vários] [Em coro] Par. (A1-1, 30/01/2007)

Em seguida houve uma questão interessante colocada por uma aluna, provavelmente por coerência com a conclusão anterior de que a sequência era de números ímpares, cuja resposta era de difícil gestão...:

Aluna 3: Ó professora! E com?... E com um [pontinho]? E um V com um?
Prof. Com um não consegues fazer nada. [Desenha um pontinho no quadro] Um é isto. É um ponto. Um ponto não dá para fazermos um V. Precisávamos...
Aluno 4: É um ponto final.
Prof. Para fazer um V precisávamos no mínimo...
A[vários] Três. (A1-1, 30/01/2007)

Nesta exploração, bem conduzida, em que a professora soube colocar questões importantes, foram produzidas duas categorias de generalização. Por um lado, usando um tipo de pensamento recursivo, e baseando-se na visualização, os alunos concluíram bem que se passava de um termo para o seguinte adicionando sempre duas unidades. Por outro lado, analisando os valores numéricos dos diferentes termos, concluíram que estes eram sempre representados por um número ímpar, pelo que não seria possível um V com 48 bolinhas, nem com qualquer outro número par; esta argumentação teve também suporte visual. Contudo, o trabalho mais importante feito por Sílvia com padrões de crescimento em sequências é desenvolvido mais tarde, já no segundo ano de formação, e dá-se-lhe continuidade na secção relativa ao trabalho autónomo.

Sentido das operações. Sílvia optou, na terceira aula do primeiro ano, por fazer tarefas diferentes para os dois anos. Aos alunos do 1.º ano propôs um problema em que a mãe duma menina que gostava muito de animais só lhe deixava ficar em casa com animais que totalizassem seis patas. Os alunos teriam de ver todas as possibilidades dentre o gato, o cão, o peixe, o galo e a pomba. Os alunos do 1.º ano fazem os registos que preferem. Inicialmente usam desenhos dos animais mas depois a professora incentiva-os a escreverem as palavras "galo", "cão", ... ou mesmo só as iniciais - mas eles não pegaram nesta sugestão. Fizeram os registos bastante desordenadamente, não notando por vezes que "cão, galo, peixe" já repete "galo, cão, peixe". Cada par fez o seu tipo de registo e tudo bastante desorganizado, como pode ver-se na Figura 63.

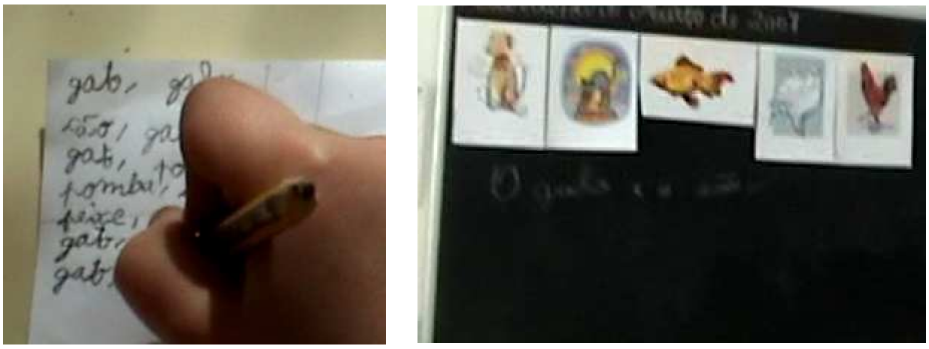


Figura 63. Registo desorganizado das várias possibilidades e início da síntese no quadro

No fim, a professora, para fazer a síntese, pediu a vários alunos para irem registar ao quadro.

Quando viu que estava a tornar-se confuso atalhou:

> [Dirigindo-se agora para o 1.º ano] Olhem! Vamos fazer assim então. Chiu! Olhem! A Aluna 1 fez a primeira da lista. Ou seja, a Inês pode ter um galo e um cão. Agora vamos pegar ainda no galo. Com o galo ela pode ter ainda que outros animais? (A3-1, 13/03/2007)

E sugere mesmo, em seguida, que cada um faça a lista organizada no seu papel:

> Calma! O galo e o gato. Olhem! E vocês podiam também fazer esta listinha, porque esta está muito direitinha. Não apagam a vossa! Agora fazemos assim, Aluno 2. Agora vamos fazer direitinho tudo aqui. Está, Aluna 3? (A3-1, 13/03/2007)

Em conjunto procuram e aperfeiçoam estratégias de resolução de problemas. A organização da lista não foi completamente conseguida.

Contudo, descreve-se aqui com mais pormenor a tarefa proposta ao 2.º ano por envolver a consideração de condições para a escrita de números e a percepção do sentido da adição juntamente com a compreensão do valor posicional, induzindo alguns processos de generalização ainda que de modo informal. Os alunos, jogando a pares, tinham de gerar números com um dado e posicioná-los numa grelha, primeiro de 1x2 e depois de 1x3, simbolizando um número de dois ou três algarismos, colocando os números saídos na casa que quisessem. Comparavam depois os números obtidos e ganhava um ponto o que tivesse obtido o maior, e depois o menor, um número par, um número ímpar.

Sílvia aproveitou para identificar o dado com o cubo e analisar o número de pintinhas que estavam nas faces, desde uma até seis. Há uma resposta interessante de um aluno quando a professora faz a pergunta: "Podia haver uma face com sete pintas?". E o aluno respondeu: "Tinha que ser um dado maior!". Seguiu-se a exploração conduzida pela professora que levou o aluno a aperceber-se do erro.

Escolhem o primeiro aluno a lançar o dado. Com o número saído cada um coloca-o onde quiser na sua grelha, e depois já não pode mudá-lo de sítio. "A borracha não é permitida neste jogo!". Joga o segundo e no fim comparam os resultados. O aluno que ganha marca um ponto. Se empatam marcam os dois. Na vez seguinte trocam as posições para iniciar o jogo. A professora optou por este formato de jogo para que os alunos pudessem trabalhar mais autonomamente permitindo-lhe ir apoiando os dois grupos. Foi explorando com cada par os resultados da colocação dos números e se teria sido a melhor opção em cada caso. Foi também chamando a atenção para o algarismo das unidades, das dezenas e depois das centenas, o valor posicional, a leitura dos números e a verificação das condições. Os alunos foram-se apercebendo das estratégias a adoptar; por exemplo que, para obter o maior número, teriam de colocar o maior na casa das centenas:

> Prof. quanto vale aqui este 5 neste lugar?
> Aluno 1: 50.
> Prof. Pois. Vale 50. Enquanto que o 1 vale só 10. Por isso é que o teu é mais pequenito. Não é? (A3, 13/03/2007)

Passando depois a uma grelha de 2x2, que simulava duas parcelas de uma soma, lançavam o dado quatro vezes e posicionavam os números de modo a obter a maior soma. Foi uma oportunidade para treinarem o algoritmo nunca perdendo de vista a estratégia ganhadora. Os alunos estavam entusiasmados com o jogo e com a perspectiva de ganhar. Questionavam-se as escolhas feitas para a soma máxima, como se evidencia na Figura 64.

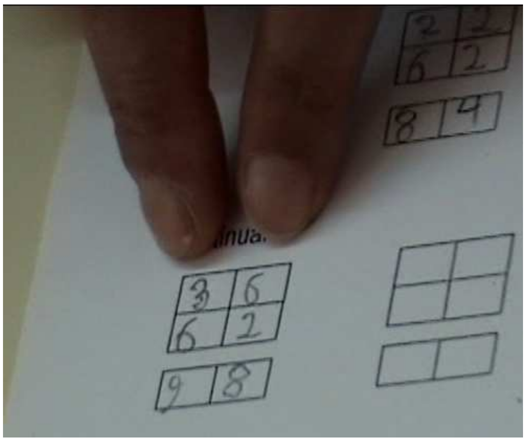


Figura 64. Diálogo sobre a melhor estratégia a adoptar para obter uma maior soma

A professora ficou contente porque um aluno dos mais fracos do 2.º ano, entusiasmado com o jogo e com vontade de ganhar, estava a fazer as contas melhor do que habitualmente, e comentou na reflexão:

> Aquele [...] é um aluno muito fraquinho, mas está entusiasmado com as contas e não é que as faz direitas! Ali... Quer dizer, não está em matemática. Está numa brincadeirinha. Um resultado com transporte que lhe dá 108. Ele: «Olha! Dá-me 108. Olha! Olha!» E eu olhei e está certa a conta. E eu assim: «Estás a ver?» Quer dizer, é uma brincadeira... É um aluno que tem dificuldades, mas se calhar numa situação assim mais lúdica as dificuldades não são tão acentuadas. (RA3-3, 13/03/2007)

Considera no entanto que o trabalho com dois anos e duas tarefas acaba por não ser tão produtivo:

> Portanto, duas actividades ao mesmo tempo diferentes é um bocado difícil, porque quer uns quer outros precisam de bastante apoio. Até porque o estruturar mais: «Olha! Se tu trocasses de número? Olha! Como é que tu conseguirias ter feito um número maior?» ou assim, isto requer mais... (RA3-3, 13/03/2007)

Não houve tempo para fazer uma síntese final, com o grupo do 2.º ano, sobre a actividade realizada, mas a professora ficou de concluir esse trabalho num momento posterior. Porém foi notório pela observação que os alunos se foram apropriando da estratégia óptima, e que a fase anterior de escrita do menor número, do maior número, dum número par, etc., foi muito útil como preparação para a fase seguinte. O jogo aprofunda a compreensão do valor posicional e desenvolve o raciocínio e o sentido da adição, bem como a noção de estratégia do jogo.

Cálculo mental. Na primeira aula do segundo ano Sílvia escolheu uma tarefa inicial para o desenvolvimento do cálculo mental. Começou por colar um cartaz no quadro com as 26 letras do alfabeto na primeira coluna e uma coluna à direita com algumas correspondências numéricas. Pediu aos alunos para preencherem os lugares que faltavam salteadamente, tendo estes descoberto que ao A correspondia o 1, ao B o 2 e assim sucessivamente. Propôs então que cada um escrevesse o seu nome próprio em letras grandes, fizesse a correspondência numérica a cada letra e adicionasse os valores das letras para obter o "valor" do seu nome. Depois comparariam os resultados. Surgiram desde logo algumas dúvidas, por exemplo sobre o valor dos acentos, mas a professora esclareceu que os acentos não contavam. Os alunos iniciaram a tarefa de correspondência e soma. A professora insistia no cálculo mental, incentivando os alunos a fazerem associações que o facilitassem:

Inv.	Já está [Virando-se para a Aluna 1]?
Aluna 1:	Já. Professora! Já fiz.
Prof.	Já fizeste? E tens o total correcto? Tens a certeza? Já confirmaste?
Aluna 1:	Fiz a conta de pé.
Prof.	Fizeste a conta de pé! Então não sabias fazer assim? Então? Como é que fizeste? Ora diz-me lá. Fizeste de pé, mas eu não quero que faças logo de pé. Ora vá lá. Vamos juntando as parcelas mais fáceis de juntar! Por exemplo [Referindo-se ao cálculo: 3+1+18+9+14+1]... (A2-1, 11/12/2007)
[...]	
Prof.	Nós aqui. Vamos lá ver. Vamos fazer grupinhos. Vamos fazer grupinhos. [Virando-se para a Aluna 2] O teu lápis? Olha aqui! Olha! 14 e 1?... 15. 9 e 1?... 9 e 1?...
Aluna 2:	10.
Prof.	10. 15 com 10?... São?...
Aluna 2:	25.
Prof.	... 25. 25 mais 5 quanto é que dá?..
Aluna 2:	30.
Prof.	30. Muito bem. 30 mais 18?... (A2-1, 11/12/2007)

De seguida a professora esboçou uma tabela no quadro com o nome dos alunos em que eles deviam preencher o valor do seu nome. Cada aluno devia também fazer a tabela no seu caderno para registar os valores dos nomes que foram sendo colocados por ordem alfabética.

Houve um aluno que faltou nesse dia. Os colegas gostaram tanto da tarefa que quiseram fazer os cálculos para o seu nome, e uma aluna até já os tinha feito – e acertou:

Aluna 1:	Professora! Para o Aluno 4 deixamos em branco.
Prof.	Para o Aluno 4 deixamos em branco. Exactamente. Porque ele não está. E agora vamos...
Aluno 2:	Ó professora! Podemos fazer aí no quadro! Aluno 4. Vemos quantos ele tem.

Prof. Pronto. Podemos fazer Aluno 4. Vocês estão aí tão... Vá lá. Aluno 4 [Escrevendo no quadro].
Aluna 3: Eu tenho a certeza que dá 50. (A2-1, 11/12/2007)

Depois dos registos discutiram os resultados. "Quem foi que obteve mais pontos? E qual foi o segundo?". Ganhou a aluna que tinha maior número de letras no nome, nove. Mas explorou de seguida o caso de dois alunos que têm o mesmo número de letras e tiveram valor diferente:

Prof. E aqui agora tens o mesmo número de letras, mas o resultado não é igual. Então porquê?
Aluno 5: Porque as letras do Aluno 6 têm mais valor do que as da Aluna 7. (A2-1, 11/12/2007)

E ainda o facto de, tendo muitas letras, não significar que tenha o maior valor:

Prof. Então vocês acham que ter um nome grande ou um nome pequeno faz com que tenhamos mais pontos ou menos pontos?
Aluno 1: Menos pontos.
Aluno 2: Mais pontos.
Prof. Pensem bem. Se tiver um nome grande...
Aluna 3: Ó professora! O nome pode ser pequenino.
Prof. Diz.
Aluna 3: O nome pode ser pequeno mas, por exemplo, se tiver a letra Z...
Prof. Aí, logicamente!... A letra... O nome pode ser pequenino, mas...
[...]
Aluna 4: Professora! Zezé.
Aluno 5: Ó professora! Como a palavra Zoo.
Prof. O Zoo. Exactamente. (A2-1, 11/12/2007)
[...]
Aluno 6: Ó professora! A palavra Tu tem tantos pontos como João.
Prof. A palavra Tu tem tantos pontos como João. Estão a ver?
Aluno 6: Só são duas letras! (A2-1, 11/12/2007)

A professora continuou a exploração perguntando se existiam gémeos. Os alunos concluíram que não, pois não havia dois cujo nome tivesse o mesmo valor. De seguida propôs um novo desafio: inventarem uma frase com o valor de 200 pontos. Sugeriu uma frase sobre o Natal, por exemplo, com palavras bem escolhidas. Começaram a surgir frases to tipo: "Eu gosto muito do Natal", "O Zé brinca com o Zeca", "O Leandro e a Cristiana foram dar um passeio para comprar os presentes de Natal". Fazer as contagens revelou-se um pouco duro, mas os alunos de modo geral foram persistentes. Ao encontrarem, por exemplo, valores um pouco superiores a 200 verificaram que tinham que tirar alguma palavra à frase para acertar. O problema é que ao tirar palavras as frases ficavam sem sentido. O contrário também aconteceu. O facto de fixar o valor e acrescentar outra palavra sem ser preciso fazer outra vez as contas todas é já por si uma descoberta importante.

Quando achou que era suficiente a professora encerrou a questão:

Prof. Vocês estão todos preocupados porque toda a gente queria atingir o 200. Certo?
Aluna 1: Sim
Prof. Óptimo! Eu também queria ganhar o totoloto e para isso eu tinha que acertar! Mas nem sempre isso é possível! Quer dizer, com muitas tentativas nós até chegávamos lá! Mas o dia hoje não era só para isto. Eu, pelo menos, não tencionava só isto. Uns ficaram mais longe, outros ficaram mais perto. E agora vamos registar aqui onde é que ficou cada um. (A2-1, 11/12/2007)

A comparação dos números também conduziu a uma tarefa interessante. Ao dizerem os seus resultados os alunos começaram logo a comparar-se com os outros e com a meta 200. "Eu fiquei mais perto!", "Eu tenho mais oito pontos que tu", "É a Aluna 1 que está mais longe dos 200", "Foi o Aluno 2 que ganhou", "Quem ficou mais longe do 200, foi o Aluno 3 (com 87) ou o aluno 4 (com 94)?" etc. A formadora propôs então à professora, para poderem ter uma visão de conjunto, que marcassem estes resultados todos na recta numérica. A professora traçou então a recta, marcou os números de 10 em 10 e pintou o alvo 200 a vermelho. Puderam então contar de 10 em 10 para a frente e para trás a partir do 200. Cada aluno foi depois marcar o seu próprio tracinho, com a inicial do nome por baixo para ser identificado. Em seguida fizeram a análise global dos resultados, sendo mais fácil darem respostas às questões de proximidade absoluta e relativa, quer por defeito quer por excesso.

A professora fez um questionamento correcto e eficaz, que revelou ter sido pensado de antemão. Os alunos fizeram muitos cálculos mentalmente, tendo para isso aplicado muitas vezes a propriedade associativa. Houve também muitas oportunidades de raciocínio lógico, argumentando os alunos que não é por ter mais letras que um nome tem mais pontos mas sim por as letras que o constituem terem maior valor. Procuraram optimizar a construção da frase acrescentando ou tirando palavras de modo a aproximar o mais possível de 200. Fizeram diversas contagens crescentes e decrescentes. Localizaram e compararam números na recta numérica. Foi assim uma aula muito rica do ponto de vista dos conceitos matemáticos explorados, aprofundados e relacionados, do raciocínio e da comunicação. As crianças estiveram motivadas a trabalhar com afinco e persistência, e tão envolvidas estavam que se mantiveram, sem intervalos, durante duas horas seguidas ao longo da tarde.

Verificou-se contudo nesta aula que, apesar dos esforços da professora para que realizassem os cálculos mentalmente, os alunos têm ainda algumas dificuldades em fazê-lo. Por exemplo, têm dificuldade em cálculos do tipo: 65+10. Sílvia reconheceu este facto na reflexão e, tendo a formadora sugerido a tabela dos cem para esse objectivo, a professora afirmou que já a tem quase pronta e que tenciona iniciar os alunos nesse trabalho mais sistemático no princípio do segundo período. Também verificou na reflexão que não tencionava explorar tanto a tarefa do valor do nome mas que tirou partido da situação criada:

> O primeiro exercício não tinha em mente explorar tanto. Pronto. Mas acho que foi muito... foi preferível ter feito... explorado mais como fizemos do que ter passado ao exercício seguinte. Acho que temos que tirar partido daquilo que realmente está a decorrer. Eu acho que aquela tentativa que eles estiveram a fazer de tirar palavras para conseguir e tudo, acho que é interessante. É um brincar com os números que acho que é muito saudável. E eles parece que estavam na brincadeira. Quer dizer, eles nem se apercebem propriamente que estão na Matemática! Tira e põe, põe e tira... Agora, é... cálculo mental está pouco desenvolvido e, de facto, aquela tabela é de todo importante. Até porque se ela estiver ali em tamanho grande como eu já tenho... Tenho uma tabela assim grande. Eles vêem. Mesmo aqui no lugar eles vêem. Ora 35 mais 10, 45. [...] Fazem aquele movimento e acho que isso é importante, porque aqui implicava já a soma de números grandes. (RA1-2, 11/12/2007)

E em relação à utilização da recta numérica:

> E aquela sugestão de na recta representar os números não era uma ideia minha. Mas não era uma ideia... Não pensava, não tencionei, não pensei. Mas funcionou muito bem. Porque eles ali viram a distância que havia uns dos outros. Uns muito longe, outros muito pertinho. Quer dizer, e têm uma noção mais... (RA1-2, 11/12/2007)

Contagens visuais. Na mesma aula ainda foi proposta uma nova tarefa, que apelava às contagens visuais. Sílvia entregou a cada par de alunos uma imagem das uvas como a apresentada na Figura dentro de uma "mica", uma caneta de quadro branco e um lenço de papel e explicou que a tarefa consistia em indicarem quantos cachos de uvas viam na figura, sem os contarem um a um, ou seja, procurando um modo expedito de contagem. Deviam também explicar como tinham contado. Depois passavam à contagem das uvas – Figura 65.

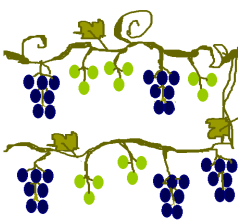


Figura 65. Contagem visual dos cachos e das uvas

Cada par foi convidado a explicar como contou e a professora ia registando no quadro a expressão matemática correspondente para os primeiros casos. Depois os próprios alunos fizeram o registo. A professora procurou que os alunos estabelecessem a relação entre a contagem visual e o registo da expressão numérica correspondente. Surgiram muitos modos de contar:

Prof. Eu perguntei aqui a este grupo, como é que vocês contaram?
Aluno 1: 5 em cima e 5 em baixo.
Prof. O grupo da Aluna 2 também foi?
Aluna 2: Não. Nós fizemos duas vezes o 5.
Prof. Ah! Então duas vezes o 5 [Registando no quadro: 2x5]. Contaram... viram que tinha 5 e depois duas vezes o 5. E este grupo aqui? Esta foi uma maneira. A segunda maneira. Aqui a terceira?
Prof. Ah! O grupo da...
Aluna 2: Da Aluna 3.
Prof. ... da Aluna 3 e do Aluno 4 fez de outra maneira.
Aluno 4: Contámos primeiro as azuis e depois as verdes.
Prof. Contaram 5 azuis mais [Registando no quadro: 5 azuis e 5 verdes]...
Aluno 5: Ó professora! Ainda há outra maneira.
Aluno 4: [Gritando] Professora! Eu e a Aluna 3 contámos de duas maneiras.
Prof. Olhem! É assim. Eu tenho dois ouvidos e só posso ouvir uma pessoa ao mesmo tempo!
Aluna 6: Ó professora! Eu já sei uma ideia.
Prof. Espera! Pronto. Então vais-me dizer essas ideias todas! Tem calma! Aquela foi a primeira maneira que vocês utilizaram. Agora vou-vos dar estas canetas. 1, 2, 3... 5 canetas. Vocês com estas canetas... Isto é assim. Escreve-se e depois eu dou-vos um guardanapo e vocês se se enganarem... E vão fazer os conjuntos, as maneiras de contar. (A1-2, 11/12/2007)

Organizavam-se dentro do grupo e também conversavam entre grupos:

Aluno 7: Nós contámos assim?
Aluna 2: Contámos. Vês ali? Olha! Segundo grupo. 2 vezes o 5.
Aluno 7: Então é assim. Assim é 5 vezes 2.
Inv. Aluna 2! É como ele está a dizer.
Aluno 7: Assim é 5 vezes 2. Aqui 2, aqui 2, aqui 2, aqui 2. Nós contámos assim [fazendo o gesto a abranger um em cima e um em baixo].
[...]
Aluna 3: Olha! Tu fazes as roxas e eu faço as verdes. 1+1+1+1+1. (A1-2, 11/12/2007)

De seguida passaram para a contagem das uvas:

Prof. Não. Agora é baguinhos. Como é?... Dá muito trabalho estar a contar um a um! Dá muito trabalho contar 1, 2, 3, 4, 5...
Aluno 1: Ó professora! É só contar quanto está num e depois juntar os outros.
Prof. Faz e dizes depois.
$A_{[vários]}$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12...
Prof. Ui!... Isso dá muito trabalho! Eu não quero assim! Eu não quero a contar um a um.
Aluno 1: 5 vezes o 7.
Prof. 5 vezes o 7?
Aluna 2: 5 vezes o 7 e 5 vezes o 3.
Prof. Vai lá escrever então ao quadro.
[A Aluna 2 regista no quadro: 5x7+5x3.]
Prof. E o que é o 5? O que é este 5?
Aluna 2: É quantas uvas tem.
Prof. Quantas... Qual é o número de?...

$A_{[\text{vários}]}$ Cachos.

Prof. Qual é o número de cachos. Exactamente. Esta [5x7+5x3]...

Aluno 1: Ó professora! Já descobrimos outra. As azuis... As bolinhas das azuis mais as bolinhas das verdes.

[...]

Prof. Chiu! Olhem! A Aluna 3 disse-me... O grupo da Aluna 3... Ora prestem lá atenção! Senta, Aluno 4! Olhem! O grupo da Aluna 3 diz que... Como é que ela contou? Contou assim. Ora digam-me lá. Diz lá, Aluna 3. Este 7 o que é?

Aluna 3: 7 uvas.

Prof. 7 uvas tintas.

Aluna 3: Sim.

Prof. Mais 3 uvas?...

Aluna 3: Brancas.

Prof. ... brancas. E este 3? 3 uvas brancas.

Aluno 5: 7 mais 3 mais 3 mais 7 mais 3 mais 7 mais 3 mais 3 mais 7 mais 7. (A1-2, 11/12/2007)

E de seguida a professora sugeriu um processo mais expedito de cálculo mental para esta soma:

Prof. Olhem! E agora como é que nós fazemos? Então agora... Aluna 3! Aluna 3! Eu agora queria que vocês estivessem muito atentos para resolvermos esta conta enorme que está aqui com tantas parcelas. Vamos arranjar uma estratégia de resolver isto facilmente. Daquelas que eu estou sempre a dizer: juntem os números fáceis. Lembram-se? Como é que nós podemos juntar estes? Olhem!

Aluna 6: Professora! Arranjámos outra!

Prof. Está, Aluna 6. Mas agora é esta. Espera aí! Vamos cá? 7 e 3?...

$A_{[\text{vários}]}$ 7 e 3...

Prof. Sim.

Aluna 6: 10.

Prof. 7 e 3, 10. (A1-2, 11/12/2007)

E por fim surgiu o processo mais elegante, ilustrado na Figura 66 com o trabalho dos seus autores:

Aluna 1: Ó professora! Arranjámos outra maneira. 5 vezes o 10.

Aluno 2: 5 vezes o 10.

Prof. É 5 vezes o 10. Ora desenha para representar. Representa aí que eu não sei como é! 5 vezes o 10. Ah!... Ah!... Ah! Olhem como eles fizeram! Ó meninos! Olhem aqui uma coisa muito engraçada!

Aluna 4: O quê?

Prof. Senta. Olhem para aqui para este grupo arranjou uma estratégia muito interessante. O que é que ele fez? O que é que eles fizeram? Ó Aluna 1! Anda cá. Explica tu, que vocês é que fizeram. Aluno 5! Senta. Ou expliquem vocês os dois. Vocês foi que fizeram. Vá lá. Olhem! Estejam atentos que eu vou-vos perguntar depois. O que é que fizestes? Diz lá.

Aluno 3: Nós fizemos grupinhos de 5.

Prof. Tu fizeste grupinhos de quê?

Aluna 1: 10.

Prof. 10 uvas. Eles fizeram... Olhem! Agruparam as uvas. 10 baguinhos, um conjunto. Foi isso? 10 baguinhos, outro conjunto. 10 baguinhos, outro. Mais 10 bagos e mais 10 bagos. O que é que eles fizeram aqui? Quantos conjuntos?

$A_{[\text{vários}]}$ 5.

Prof. 5 conjuntos. Cada conjunto tem?...
A[vários] 10.
Prof. Então 5 vezes 10?...
A[vários] 50.
Prof. ... 50 bagos. Ora representa ali a vossa hipótese então. A hipótese 4. Está? Vamos lá representar ali graficamente. Esta também é interessante. Pus 5 vezes... Está? Agora senta-te.
[O Aluno 3 regista no quadro: 5x10=50.] (A1-2, 11/12/2007)

Figura 66. Agrupamento dos cachos em dezenas

Nesta tarefa os alunos fizeram contagens com base na imagem. Tanto a contagem dos cachos como a das uvas possibilitou a descoberta de vários processos de associação, que foram traduzidos quer em linguagem corrente quer em linguagem matemática. Os alunos comunicaram com a professora e entre eles e puderam confirmar a equivalência de várias expressões numéricas. Também, por sugestão da professora, aplicaram a propriedade associativa da adição para fazer mais rapidamente os cálculos de várias parcelas 7 e 3. Provavelmente foi este procedimento que inspirou a última maneira de contar as uvas, por associação de um cacho preto com um branco e formação de cinco grupos de 10=7+3.

Foi uma tarefa muito rica e interessante que manteve também os alunos a trabalhar com gosto. Sílvia afirmou na reflexão:

> Por exemplo, nesta parte das contagens... Contar as uvas não é propriamente fácil! Porque tem ali dois tipos de uvas. Se calhar, a dos caracóis era mais fácil. Esta é mais rica. Permite mais associações. Aquela na vertical, na diagonal, contar tudo... Mas acho que para ser uma primeira vez nesta actividade eu até gostei. Acho que correu bem. Eles estavam entusiasmados. (RA1-2, 11/12/2007)

O raciocínio funcional. Na segunda aula do segundo ano Sílvia decidiu fazer uma abordagem ao raciocínio funcional. Disse então aos alunos que iam ser engenheiros e trabalhar com umas máquinas que tinham um segredo. Isto provocou discussão porque os alunos não sabiam o que era um engenheiro. A professora aproveitou para falar um pouco nas profissões. Acrescentou então que a fábrica tem uma máquina louca. Ela trabalha com números mas entram uns e saem outros muito diferentes. E eles vão ter de descobrir qual o segredo destas máquinas. Colocou bem à vista várias caixas de tamanhos diferentes, cada uma com uma etiqueta (que pode mudar-se). Entra o n.º 3; é multiplicado por 2 na 1.ª máquina e depois soma-se-lhe 1 na 2.ª máquina, e sai 7. Experimentam com mais alguns números: 6, 23, 88. Têm, à vez, de explicar como fizeram os cálculos, que devem ser feitos mentalmente. Há uma tabela dos cem plastificada colada na parede da sala a que os alunos podem recorrer com uma caneta de quadro branco para apoiar o cálculo mental com a adição. Na primeira tarefa era então dado o número de entrada e os operadores, só tinham que transformar o número.

Na segunda tarefa há duas caixas sem indicações e só se sabe que entra um 6 e sai um 7. Têm que descobrir os mistérios da transformação. Claro que há muitas possibilidades e portanto cada um acaba por criar uma diferente. A professora convida os alunos a irem ao quadro mostrar a sua solução. Utilizam um esquema como o da Figura 67 que se revela muito útil e prático:

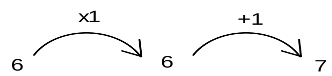


Figura 67. Representação esquemática das transformações efectuadas

Na terceira tarefa a professora acrescentou duas máquinas. O número que entra é o 2. A primeira máquina é de adição, a segunda de subtracção, a terceira de multiplicação e a quarta de divisão. Se entra o 2, o que sai? Para os alunos do 2.º ano, a quarta máquina não existia. Cada aluno tinha de inventar uma solução. Também neste caso a tarefa era aberta possibilitando um número infindável de hipóteses. A professora continuou a incentivar a representação esquemática já utilizada (Figura 68):

Aluno 1: Professora! Já fiz duas.

Prof. Aluno 1! 2 mais 20 dá 22. Pronto. Vai lá fazer. Olhem a do Aluno 1!

[O Aluno 1 regista no quadro: 2+20=22, 22-10=12, 12x2=24, 24:3=8.

Prof. Podias era ter feito era assim. Ó Aluno 1! Olha! [Registando no quadro o esquema à medida que fala] Entra o 2, mais 20 e ficou 22. Não era? Menos 10 e ficou 12. Vezes 2, 24. A dividir por 3 que deu 8. Não é? Olhem! Façam assim com esquema que se vê melhor. (A2-2, 28/01/2008)

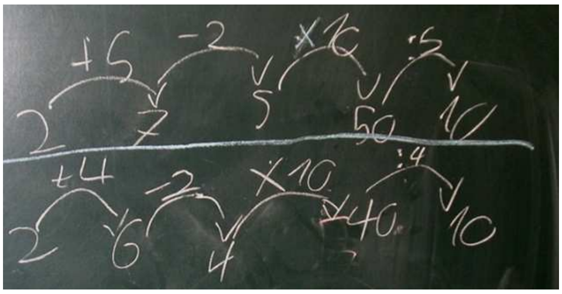


Figura 68. Esquema sugerido pela professora e utilizado pelos alunos

Por fim a professora distribuiu uma ficha de trabalho em que havia máquinas e operadores para descobrirem ou o que entrava, ou o que saía, ou o operador, aqui já duma forma fechada, de resposta única. Tinha uma ficha para o 2.º ano e outra diferente para o 3.º.

Os alunos estiveram muito activos. Todos queriam ir ao quadro representar e explicar a sua hipótese. As tarefas iniciais eram suficientemente abertas e flexíveis para haver um leque infindável de modos que funcionam, o que entusiasma mais os alunos pois o facto de um ter descoberto não desmotiva os outros, o que por vezes acontece quando a resposta é única. Aqui não se tratava propriamente de descobrir, mas mais de inventar. Os alunos puderam "brincar" com os números, realizar cálculos mentais, desenvolver estratégias de obtenção de números, usar intuitivamente as propriedades da adição e da multiplicação, as regras da multiplicação de números por 10, 100 e 1000, desenvolver a compreensão de operador e de função, em suma, para além dos aspectos numéricos, aqui muito importantes, verifica-se também uma forte incidência no pensamento algébrico. Do relatório da aula:

> Foi uma aula excelente. Os alunos puderam inventar muitas maneiras de as máquinas operarem e praticar o cálculo mental. A própria professora afirmou que não esperava tanto dos alunos. Eles trabalharam muito bem. No fim, embora fosse a hora do almoço, ficámos mais 20 minutos e mesmo assim ainda houve alunos que ficaram depois a acabar ou a "brincar" com a nova tabela dos cem. Adicionavam 12, subtraiam 9, adicionavam 23, etc.
> Os pedidos de explicação são constantes. A professora interiorizou a importância e o papel da comunicação na sala de aula. Pede muito frequentemente aos alunos que expliquem e justifiquem os seus raciocínios ou procedimentos. (Rel2-2, 28/01/2008)

Na reflexão, Sílvia considera que este modo de trabalhar, mais livre e flexível do que com os algoritmos fechados, abre-lhes perspectivas e leva-os a outras descobertas:

> Eles começam a fazer o esquema… e depois fazem o contrário. E acho que também ajuda a estruturar. E acho que esta maneira de pensar sobre as coisas e não pensar naquela maneira rígida de resolver um problema com aqueles algoritmos, acho que dá-lhes… abre-lhes caminho

para a resolução de problemas e, principalmente, aquelas estratégias do fim para o princípio e não sei quê... dá mais flexibilidade e eles conseguem ter uma outra visão... (RA2-2, 28/01/2008)

Generalização da aritmética. Ainda na segunda aula do segundo ano, anteriormente abordada, em que se trabalha o raciocínio funcional através de máquinas transformadoras, Sílvia aproveita algumas soluções dos alunos, que utilizam a lei do menor esforço, ou seja, zeros e uns, para explorar o papel do zero e do um na adição e/ou multiplicação:

Prof. Aluno 1! Acrescenta aqui outra. Ora diz primeiro.
Aluno 1: 6 faço vezes o 0.
Prof. Vezes o 0.
Aluno 1: Mais 7.
Prof. Mais 7.
[O Aluno 1 regista no quadro: 6x0+7=7.]
Aluno 2: Era essa a minha ideia!
Prof. Olhem! Esta é engraçada!
E também dá: 6 mais 0, que dá 6. Mais 1 dá 7. Anda cá escrever então a tua. Anda lá escrever.
Prof. Podes. Vá lá.
[O Aluno 2 regista agora no quadro: 6+0+1=7.]
Prof. 6 mais 0, que dá 6. E mais 1. Olhem que engraçado! 6 vezes 0... 6 vezes 0 dá?...
Aluno 2: Zero
Prof. ... zero. E 6 mais 0 mantém. O que é que acontece ao 0 na multiplicação?
Aluna 3: Fica 0.
Prof. Transforma tudo em 0. E na soma? E na soma o que é que acontece?
Aluna 4: É sempre 6.
Prof. Mantém-se o número. Aluna 4, sai daí! Na multiplicação, o 0 absorve tudo. Na soma, deixa estar como está, não altera nada. Não é, Aluno 5? (A2-2, 28/01/2008)

A explicação dum aluno do 2.º ano revelou que tem interiorizada a propriedade comutativa e sabe aplicá-la se lhe for necessário. A professora aproveita para a explicitar:

Prof. O Aluno 4 vai explicar e eu vou depois ver se vocês estiveram atentos que ele pode ter dito alguma coisa mal. Eu não digo nada! No fim eu pergunto.
Aluno 4: 2 mais 3 que deu 5. Menos...
Prof. O 5...
Aluno 4: O 5 menos 0, 5.
Prof. Pois.
Aluno 4: E 5 vezes 3 dá 15.
Prof. Mas tu ainda não sabes a tabuada do 5!
Aluno 4: Pois não mas sei que aqui no 3... o 5... aqui o 3 e o 5 na multiplicação dá o número 15.
Prof. Ah! Queres tu dizer que 5 vezes 3 ou 3 vezes 5 é a mesma coisa. [...] Ele disse aqui alguma coisa que estivesse errado ou menos correcto?
$A_{[\text{vários}]}$ Não.
Prof. Não? É verdade que 5 vezes 3 e 3 vezes 5 é a mesma coisa?
Aluno 6: Sim.
Aluna 7: É.
Prof. E se for 2 vezes 9 e 9 vezes 2?
Aluna 7: Sim.

Prof. Sim o quê?
Aluna 7: Dá a mesma coisa.
Prof. Dá o mesmo?...
A$_{[vários]}$ Resultado. (A2-2, 28/01/2008)

Na terceira aula do mesmo ano, Sílvia trabalhou a organização de dados e uma primeira abordagem ao pensamento probabilístico. Porém, também aqui surgiram oportunidades de pensamento algébrico em processos de generalização, a propósito das operações entre pares e ímpares. No início, para orientar para a tarefa e seus objectivos, a professora distribuiu a cada par de alunos dois dados e questionou se as pintas do dado representam números pares ou ímpares. Verificaram para todos. Depois perguntou: "Então se eu jogasse seis vezes o dado, quantas vezes era de esperar que saísse um número par?" Um aluno teve a intuição, respondendo logo três, mas os outros não pareceram perceber a pergunta. A professora também não deu sequência dizendo que era preciso jogar e fazer muitas experiências para poder saber. Lançaram algumas vezes o dado à vez e foram contando quantas vezes saía par ou ímpar. De seguida indicou que escolhessem quem era par e quem era ímpar e o jogo da soma começou em cada par de alunos. Lançavam os dois dados e somavam os pontos. Se o resultado fosse par pontuava o aluno "par", caso contrário pontuava o aluno "ímpar". Entregou uma folha já com uma tabela para registo dos resultados dos jogos. No fim do jogo centralizou os registos fazendo as somas de todos os grupos para que os alunos pudessem raciocinar sobre os dados em relação a o jogo ser ou não justo. Em seguida fizeram em conjunto uma tabela, no quadro e cada um no seu lugar, e vários alunos à vez faziam parcialmente o seu preenchimento.

Por fim tiraram conclusões. De seguida fizeram o jogo semelhante para o produto e os procedimentos seguintes foram idênticos.

Os alunos utilizaram o cálculo mental para obter as somas dos números saídos em cada dado. Fizeram o registo de resultados em cada par de jogo. Posteriormente fizeram o registo e soma global dos resultados dos jogos de toda a turma. Apareceram somas tais como: 6+6+9+5+10 e 6+4+10+5+7 que foram todas feitas em cálculo mental. A professora orientou a associação dos "amigos do 10", isto é, números cuja soma é 10. Analisaram a frequência relativa – sem lhe dar o nome – concluindo que a da ocorrência de pares era muito parecida com a da ocorrência de ímpares, mas ainda sem tirar conclusões.

A professora propôs fazerem uma tabela com as possíveis ocorrências e todos os alunos fizeram, cada um no seu papel, a mesma tabela, conforme se ilustra na Figura 69, enquanto ia sendo preenchida no quadro por vários. A professora combinou que representariam o par por P e o ímpar por I.

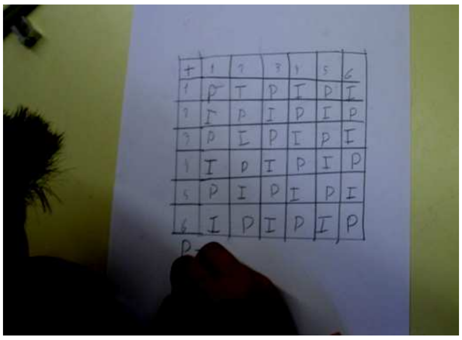


Figura 69. Registo das ocorrências de pares e ímpares

Tiveram alguma dificuldade em fazer a tabela e perdeu-se mais tempo mas foi proveitoso. Descobriram padrões na tabela: na primeira linha ou coluna os valores eram alternadamente par/ímpar e na linha seguinte o contrário. As linhas ou colunas também alternavam. Observaram diagonais.

A professora aproveitou para perguntar quantos resultados havia, mas para responderem sem contar, e um aluno do 3.º ano falou logo em 6x6. Voltou a dirigir a pergunta à turma para todos acompanharem. Depois perguntou quantos pares e quantos ímpares e registaram. 18P e 18I.

A professora questionou no fim sobre se achavam o jogo justo e a resposta, unânime, revela um entendimento diferente sobre o que poderá significar um jogo justo.

Prof. Se fôssemos a jogar pares contra ímpares era um jogo justo ou não?
Aluno 1: Não.
Prof. Quem é que ganhava?
$A_{\text{[vários]}}$ Ninguém. Era um empate. (A3-2, 04/03/2008)

De seguida exploraram um pouco mais aprofundadamente a tabela, a professora questionando o que dava um par mais um par, um par mais um ímpar, etc. Registaram as conclusões. Os alunos iam sempre intervindo. Um aluno disse logo que se um par mais um ímpar é ímpar, um ímpar mais um par é também ímpar.

Foram feitos os registos. P+P=P; P+I=I; I+I=P; I+P=I.

De seguida a professora questionou se com o produto em vez da soma iriam ter os mesmos resultados e a tabela iria ser igual:

Prof. Será que vamos ter uma tabela idêntica àquela?
Aluna 1: Não.
[...]
Aluna 1: Mas é diferente.
Prof. Porquê?
Aluna 1: Porque 1 mais 1 é 2. 1 vezes 1 é 1. Já é diferente.
Prof. Já está por aí... a coisa já está um bocado diferente. Vamos ver o que acontece. Vai acontecer um padrão engraçado também. Então põe esta tabelinha aqui do lado.
Aluno 2: Ó professora! Eu acho que na multiplicação aqui em vez de começar em par vai começar em ímpar.
Prof. Essa é uma das coisas. Na multiplicação, diz o Aluno 2, aqui em lugar de ser um número par vai dar um número ímpar. Porquê?
Aluna 1: Porque 1 mais 1 é 2 e 1 vezes 1 é 1. (A3, 04/03/2008)

E formularam uma primeira conjectura, que pelo resultado das experiências veio a ser refutada:

Aluna 3: Vai ser ímpar, par, ímpar, par...
Aluno 4: Ó professora! Aqui em vez de ser assim trocamos este.
Prof. Será? Será que as trocas são só essas? Acho que há outras diferenças! Ora juntem-se lá nos pares e agora é a multiplicar. (A3, 04/03/2008)

Embrenharam-se novamente no jogo, agora do produto, e surgiram novas e várias oportunidades para o cálculo mental, desta vez de produtos. Os alunos do 2.º ano ainda não sabiam a tabuada do 6 mas iam sendo ajudados pelos do 3.º ano. Quando acabaram verificou-se que em todos os grupos tinha ganho o par. Voltou-se a fazer um registo das ocorrências.

Houve um aluno (3.º ano) que afirmou: "Eu sei porque é que ganharam os pares. Na maioria das tabuadas os resultados dos números são pares". A professora chamou a atenção da turma para esta intervenção do colega e, depois do registo da frequência, fez notar a enorme diferença entre os resultados pares e ímpares.

Preencheram em seguida uma tabela para o produto. Depois de preencherem a tabela de professora perguntou porque é que em determinadas linhas é tudo par, voltando a introduzir o assunto levantado pelo aluno anteriormente:

Prof. E estás tu a pôr tudo *P*s porquê?
Aluno 1: Porque dão todas pares.
Prof. Dão todas pares. Por que é que darão todas pares?
Aluno 1: Porque...
Aluno 2: Porque o 6 é par.
Prof. O 6 é par?
Aluno 3: E na tabuada do 6 todos os resultados são pares.
Prof. E na tabuada do 6 todos os resultados são pares. Exactamente. Então isso só acontece para o 6?
Aluna 4: Não. Também acontece para o 4 e para o 2.
Aluno 3: Acontece para o 2, para o 4, para o 8, para o 10...

Prof. Sempre que um dos factores seja par já dá par. Olhem! Basta um dos factores... (A3, 04/03/2008)

Voltou a insistir, levando os alunos a olhar a tabela e consultar vários resultados. Por fim fizeram o registo: PxP=P; PxI=P; IxI=I; IxP=P.

Apresentam-se ainda dois diálogos de síntese:

Prof. Nesta tabela não é por acaso... não foi por acaso que a equipa que apostou em números pares ganhou agora na multiplicação. Certo? Não foi por acaso. É que, de facto, aparecem muitos mais...são muitos mais os pares do que os ímpares.
Aluna 1: Professora! Eu estive a contá-los. Pares são 27 e ímpares são 9.
Prof. Pares... Aqui temos...
Aluna 2: Professora! Na multiplicação são mais.

Prof. Então digam-me lá. Se vocês quisessem ter a certeza que ganhavam num jogo... Se vocês quisessem ter a certeza que ganhavam num jogo deste género propunham o jogo da multiplicação ou da soma? Qual é o que vocês propunham?
Aluna 3: Multiplicação. Ó professora! Multiplicação.
Aluno 4: Ó professora! O da multiplicação e eu era o par. (A3, 04/03/2008)

Para além da abordagem às probabilidades, esta tarefa proporciona múltiplas abordagens numéricas e forte incidência no pensamento algébrico com a descoberta de padrões nas tabelas e processos de generalização traduzidos pela descoberta de propriedades das operações entre pares e ímpares.

Do relatório:

O questionamento foi excelente; acho que a professora faz as perguntas certas no momento adequado de modo a ir aprofundando a compreensão. Além disso, quando algum aluno tem um vislumbre de descoberta que passa despercebido aos outros, ela devolve e pergunta à turma de modo a os outros poderem também reflectir sobre o caso. Assim aconteceu, p.e., com a questão dos 36 casos possíveis, e, de seguida, com o 18+18. (Rel3-2, 04/03/2008)

O trabalho autónomo

Sílvia deveria realizar um trabalho autónomo como componente da formação na frequência do seu segundo ano. Como já foi referido anteriormente, foi-lhe proposto que o trabalho autónomo se realizasse com base no desenvolvimento do pensamento algébrico. O trabalho foi conjunto com outras duas colegas, isto é, escolheram um tema comum, o das áreas e perímetros, que planificaram em conjunto, mas depois cada uma adaptou às suas turmas e respectivos níveis de escolaridade. Sílvia introduziu tarefas de descoberta de padrões em sequências, para desenvolvimento do pensamento algébrico, mas ligadas às áreas e perímetros. O trabalho desenvolveu-se em duas aulas, a quarta e a quinta do segundo ano.

Na primeira começou por colar no quadro dois quadrados verdes iguais que representavam campos de pasto. Fez então, em grande grupo, uma exploração que pretendia testar a conservação da área: os donos - a quem deu nomes, o Sr. Fernandes e o Sr. Alves, o que deu colorido e interesse à história - tinham dois campos iguais e uma vaca cada um (colocando imagem das vacas em cada campo). Perguntou se as vacas tinham a mesma quantidade de erva para comer. Depois resolveram construir uma casa mas em sítios diferentes. Perguntou então se as vacas continuavam a ter igual quantidade de erva. Os alunos revelaram possuir a noção de conservação da área. Um aluno resumiu a questão nestes termos - mas exprimindo a opinião dos colegas: "O campo é igual, as casas são iguais ... então as vacas têm igual espaço de pastagem".

Na continuação, em diálogo com os alunos, concluíram que para as vacas não saírem era preciso colocar uma cerca no campo. E para ir comprar a cerca necessária o que deviam medir? Depois da primeira exploração entregou uma ficha para resumir e sintetizar o que tinha sido discutido, em que deveriam pintar o interior a uma cor e a fronteira a outra. Gerou-se nesta aula uma situação algo confusa pois a professora utilizou como instrumento de medida de comprimento o quadrado que tinha utilizado para a área. A professora não disse que iam medir com o quadrado mas com o lado do quadrado; mas como estavam a ser iniciados estes conceitos, era importante fazer a sua distinção nítida. A formadora detectou sinais de incompreensão ao ver um aluno a medir o perímetro contando os quadradinhos. Sugeriu então que, dum quadradinho igual, se cortasse uma tirinha ao longo de um lado, a dar a ideia de régua, para mostrar claramente o instrumento de medição de comprimento. A partir daí a situação regularizou-se. Os alunos usaram lápis de cor para pintar a fronteira no caso do perímetro e o interior no caso da área, e mediram a área e o perímetro de quadrados desenhados em quadrícula.

Passou-se então à descoberta do padrão no cálculo dos perímetros duma sequência de quadrados de lado 1, 2, 3, etc., como o representado na Figura 70.

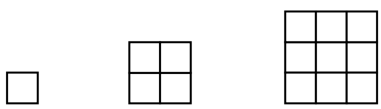


Figura 70. Perímetro duma sequência de quadrados

Começaram por indicar o perímetro das três figuras desenhadas, tendo registado o seu valor por baixo da figura respectiva. Depois desenharam a 4.ª e a 5.ª figura e indicaram o perímetro destas. Depois era necessário dar o salto para a 10.ª. Os alunos fizeram a generalização:

Prof. Já fizemos até à figura 5 e parece que foi fácil. Agora eu…
Aluna 1: Mais difícil.
Prof. Sem ter que fazer a figura 6 nem a 7 nem a 8 e nem a 9 nem a 10, eu queria que vocês me dissessem, se forem capazes, qual será o perímetro da figura número 10?
$A_{[vários]}$ 40.
Prof. 40. Ora dizem vocês que é 40. E agora vamos explicar.
[…]
Prof. Vamos ouvir alguns. Aluna 1! Explica-me lá como é que tu chegaste à conclusão de que a figura número 10 vai ter de perímetro 40 unidades.
Aluna 1: Ó professora! Eu segui pela tabuada do 4.
Prof. Espera! Tu seguiste pela tabuada do 4?!
[…]
Aluna 1: [Palavras que não são audíveis].
Prof. Fala alto, porque senão os teus colegas acolá não ouvem.
Aluna 1: [Apontando para cada figura do quadro] Aqui era 2. Aqui é 3. Aqui é 4. E aqui é 5. Na 6 é 6. Na 7 é 7. Na 8 é 8. Na 9 e 9. E na 10 é 10.
Prof. Exacto. Então…
Aluna 1: E se tem 10 assim [apontando o lado]…
Prof. 10 assim.
Aluna 1: [Esboçando com o dedo os 4 lados do quadrado] Tem 10 assim, 10 assim, 10 assim e 10 assim, 4 vezes o 10 dá 40.
Prof. Então vamos lá ver se dá certo, vamos testar se isto dá certo. Agora…
Aluna 2: Professora! A minha e a do Aluno 3 também eram iguais. (A4-2, 15/04/2008)

Passando depois para a 56.ª figura, outra aluna explicou que esta figura tem 56 unidades de lado, logo o perímetro vai ser 4x56.

Por fim a professora quis a generalização para uma figura qualquer:

Prof. Olhem uma coisa! Então vamos transformar naquela que "eu não sei". O 56 vai passar a ser agora o número que eu não sei.
Aluno 1: Quando eu resolver esta conta pomos um igual e um N, não sei!
Prof. Ah! Se aqui… Exacto. O não sei. […] Se eu quiser calcular qualquer figura… Como é que eu chamei no outro dia àquela quando não sabia?
$A_{[vários]}$ O N de não sei.
Prof. O N de não sei. Exactamente. Nós utilizámos o N de não sei. Então, se eu quiser calcular o perímetro de uma figura qualquer que seja que eu nem sei qual é, como é que eu posso?
[…]
Aluna 2: É 4 vezes… o que eu não sei.
Aluna 3: Professora! O N de número […] que dá de número e de não sei.
[…]
Prof. Se eu te disser agora assim. Calcula o perímetro da figura número 1525. Não precisas de ir para o boneco. Dizes como é que fazemos.
$A_{[vários]}$ 4 vezes 1525. (A4-2, 15/04/2008)

A primeira aula acabou por aqui. No entanto, Sílvia descreve no portefólio que no dia seguinte os alunos quiseram retomar a sequência e descobrir o padrão para a área:

> Na manhã seguinte os alunos estavam tão entusiasmados com as descobertas do dia anterior que quiseram, logo pela manhã, continuar a actividade que ficara incompleta no dia anterior, analisando desta vez a área das figuras. Talvez um pouco embalados pela actividade da aula anterior, facilmente descobriram que se multiplicassem o número de quadrados da vertical pelo número de quadrados da horizontal daria a área ocupada por cada uma das figuras e assim poderiam calcular a área de qualquer figura da sequência se para tal lhes fosse dado o número da figura, ou seja, as áreas evoluem na sequência 1, 4, 9, 16, 25, ..., que podem obter-se como 1x1, 2x2, 3x3, ... A seguir apresentam-se alguns trabalhos produzidos pelos alunos que vêm confirmar o raciocínio atrás explicado. [Figura 71]

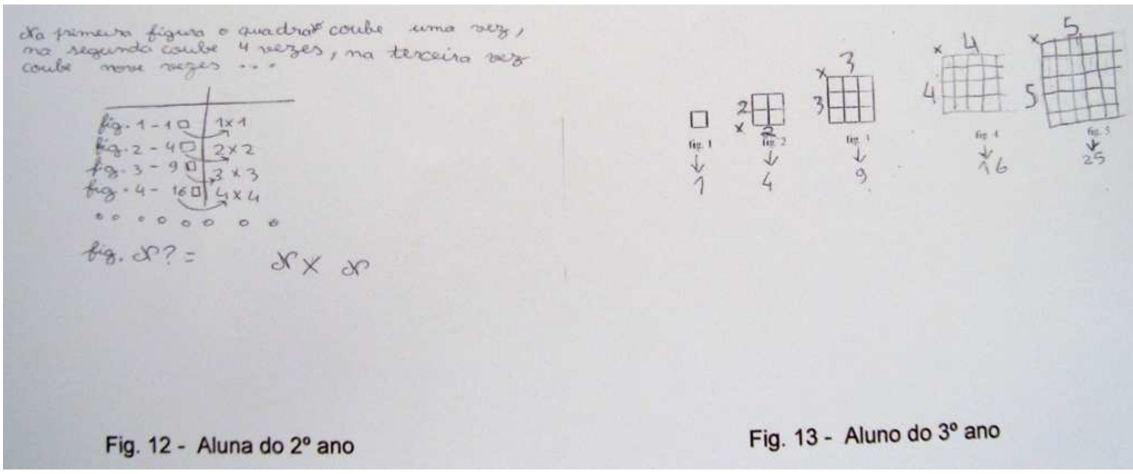


Figura 71. Trabalho de alunos apresentado no portefólio de Sílvia

> Concluíram então que para calcularmos a área de uma figura qualquer desta sequência, bastaria multiplicar o número da figura pretendida por si próprio e surge então a fórmula NxN em que N representa o número da figura pretendida.Com esta conclusão a que quase todos os alunos chegaram (dois alunos do 2.º ano tiveram algumas dificuldades em acompanhar o raciocínio dos restantes colegas da turma) deu-se por concluída a tarefa proposta para esta sessão. (Por2, 03/07/2008)

Na segunda aula dedicada a este tema, Sílvia começou por apresentar a sequência de rectângulos apresentada na Figura 72 com o objectivo da descoberta de regularidades na medida do perímetro e da área:

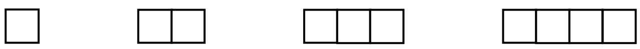


Figura 72. Perímetro e área duma sequência de rectângulos

Havia um espaço na ficha para explicarem por escrito como fariam para calcular o perímetro de uma figura qualquer. Alguns alunos começaram a contar as unidades no perímetro da segunda figura, mas houve logo uma que disse que podia ser de outra maneira, e um terceiro que arranjou logo outra:

Aluna 1: Contei estes aqui [Apontando para o lado maior do rectângulo] e depois conta-se...
Prof. Espera aí!
Aluna 1: Faz-se 2 vezes este [Apontando para o lado maior do rectângulo] e depois 2 vezes este [Apontando para o lado menor do rectângulo] e somam.
[...]
Aluno 2: Também podia ser duas vezes dois mais um mais um. (A5-2, 27/05/2008)

Foram avançando neste raciocínio, em trabalho de pares, sempre explicando os valores obtidos.

Aluno 3: [referindo-se à figura 5] Aqui é 5 mais 5 é 10. Depois mais 2... (A5-2, 27/05/2008)

Descobrem também outras formas de expressão:

Aluno 4: Ó professora! 2 vezes o 2 é 4 [Apontando para a primeira figura].
Prof. Sim.
Aluno 4: 2 vezes o 3 é 6 [Apontando para a segunda figura]. 2 vezes...
[...]
Aluna 5: Para seguir a tabuada tinha que ser isso.
Aluna 5: A figura 6 é 2 vezes 7.
Inv. E a figura 20?
Aluna 5: 20? 2 vezes 21. (A5-2, 27/05/2008)

Quando a professora pediu a esta aluna para explicar o seu raciocínio na figura ela explicou perfeitamente desenhando os dois L ilustrados na Figura 73 que correspondiam numericamente a 3+3 ou 2x3 para a 2.ª figura:

Figura 73. Justificação de uma aluna

A professora validou a hipótese mas não a levou para a frente porque dava origem a uma generalização mais difícil para começar, do tipo 2x(n+1). Esta questão foi discutida na reflexão. De volta ao trabalho com toda a turma, a professora questionou qual seria o perímetro da figura 30 e depois de uma figura qualquer. Conseguiram perfeitamente a generalização. Foram questionados vários alunos. Por último uma aluna escreveu no quadro a expressão simbólica 2xN+2. Testaram a fórmula para valores já calculados e depois usaram-na para calcular mais alguns, como por exemplo o perímetro da figura 71.

A segunda tarefa procurava a área das mesmas figuras e foi de tal modo fácil que alguns escreveram a resposta antes de a professora explicar o que quer que fosse. Logo vários alunos verbalizaram a generalização feita dizendo "é o número da figura!". Quando a professora perguntou qual seria a área da figura 100, houve um aluno que afirmou orgulhosamente que não precisava de fazer o desenho, tendo-se apercebido já da importância da generalização:

Prof. Se eu dissesse quantos quadradinhos... quantas unidades de área teria a figura?... Se eu vos mandasse desenhar a figura 100, quantas unidades de área?...
$A_{[\text{vários}]}$ 100.
Prof. 100 unidades de área.
A1: Professora! Eu não desenho! (A5-2, 27/05/2008)

A terceira e a quarta tarefas eram semelhantes – pedindo perímetro e área - mas partindo de uma outra sequência de rectângulos, como se mostra na Figura 74.

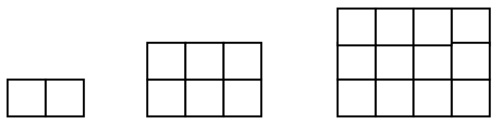


Figura 74. Perímetro e área doutra sequência de rectângulos

Em relação ao perímetro, mais uma vez fizeram a generalização, com a professora a refinar a linguagem:

Inv. E então para a figura 4 como é que vai ser?
Aluno 1: A figura 4?
Inv. Aquela que agora a professora estava a perguntar, que tu disseste 18 e disseste bem.
Aluno 1: Duas vezes o 5.
Inv. Sim.
Aluno 1. E duas vezes o 4.
[...]
Aluna 2: Aqui é sempre o coiso da figura e aqui é...
Aluno 3: Ó professora! Eu sei uma maneira.
Prof. Ao alto vem o número da?...
Aluna 4: Figura.
Prof. ... figura. E no comprimento...
Aluna 4: É o dobro.
Prof. O dobro?!
Aluna 4: O dobro não. Uma vez.
Prof. É... Como? Explica. Eu sei o que tu queres dizer, mas é isso. Ao alto vem sempre o número da figura, o número de quadradinhos é igual ao número da figura. E no comprimento é...
Aluna 4: No comprimento é o número da figura mais 1.
Aluno 3: É sempre mais 1. (A5-2, 27/05/2008)

Este padrão era mais difícil e vários alunos apenas descobriram e aplicaram uma lei por recorrência, verificando que o perímetro de uma figura era sempre mais quatro que o da anterior, sem terem conseguido obter uma expressão relacionando o termo com a ordem. No entanto houve alunos que fizeram a generalização distante aplicando-a por exemplo à figura 38, em que calcularam 2x38, 2x39 e adicionaram os resultados obtidos. E também se pôde observar a respectiva expressão verbal:

Prof. Calma! Toda a gente tem que pensar um bocadinho! Como é que fazemos? Como é que fazemos para nesta sequência descobrir qual é o perímetro de qualquer figura, mesmo que nós não saibamos qual é essa figura?
Aluna 1: 2 vezes o número da figura ...
Prof. É duas vezes o número da figura...
$A_{[\text{vários}]}$ Mais duas vezes o número da figura mais 1. (A5-2, 27/05/2008)

Neste caso não foi feita a representação simbólica por ser muito complicada e exceder as possibilidades dos alunos.

Passando depois à análise da área, os raciocínios foram feitos de forma idêntica, tendo os alunos concluído que na figura 3 a área era 3x4, na figura 4 era 4x5 e assim sucessivamente. Generalizaram para a figura 10 obtendo 10x11=110. A Figura 75 ilustra fases do trabalho.

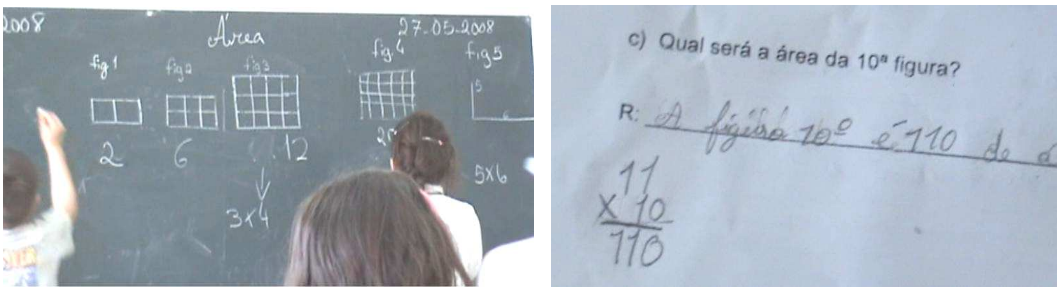


Figura 75. Generalização da área dos rectângulos

Notou-se nesta aula que Sílvia trabalhou entretanto os conceitos de área a perímetro, tendo-se dissipado eventuais confusões resultantes da última aula observada. Em relação ao perímetro refere-se agora ao "comprimento da fronteira" usando explicitamente o termo comprimento. Teve um papel muito activo de impulsionadora do trabalho mas reservou sempre espaço suficiente para os alunos se exprimirem, desenvolverem os seus raciocínios, darem a sua opinião, fazerem generalizações.

A geometria transformou-se em números, a medida da área e do perímetro, e deu lugar ao pensamento algébrico, mas estas tarefas permitiram também consolidar e distinguir as noções de perímetro e área trabalhadas em paralelo. A aula foi muito rica no desenvolvimento do pensamento algébrico. Começam por contagens um a um, e na primeira tarefa isso é notório;

um aluno até diz que fez a figura 25 e a apagou depois de contar os tracinhos um a um. Mas instado a generalizar fê-lo muito rapidamente. Depois evolui para uma generalização distante mesmo sem passar pela definição por recorrência, embora alguns alunos a usem para a 5.ª figura – temos 4, 6, 8, 10, logo é 12 porque vai de 2 em 2. Mas logo a seguir, com a maior naturalidade, passam a procurar uma possibilidade de termo geral. Do relatório:

> Para a professora e para estes alunos (na sua maioria) já não chegam as definições por recorrência, são muito fracas por não permitirem a generalização distante. È necessário ir mais além e descobrir uma regra mais sólida que permita a obtenção de um termo qualquer, primeiro da figura 30 e depois mesmo da figura de ordem N, "a que eu não sei". Esta designação funcionou na perfeição e é enunciada e encarada com toda a naturalidade por aqueles pirralhos de 2.°/3.° anos de uma aldeia remota dum concelho atrasado. (Rel5-2, 27/05/2008)

É de realçar que o apoio visual teve nestas tarefas um papel crucial. A tarefa das contagens visuais das uvas descrita e outras que se seguiram puderam alertar os alunos para as vantagens da visualização, e as figuras agora trabalhadas, todas em arranjo rectangular, prestavam-se facilmente a um reconhecimento visual. A professora procurou sempre que as justificações dadas pelos alunos se apoiassem precisamente nas figuras presentes, e esta circunstância foi claramente um dos factores do sucesso na realização das tarefas.

Reflectindo sobre a aula, Sílvia realça o trabalho árduo dos alunos e confessa o seu próprio cansaço, mas sente-se satisfeita:

> E foi duas horas a dar no duro. A descobrir padrões. E a generalizar. É. Foi puxado. Agora, no fim, começaram a cansar. Até eu já estou cansada também. Não é? Porque isto cansa qualquer um! Porque estar atento, porque a gente aproveitar aquelas deixas que eles dão para explicar ou para tentar perceber o que é que eles ainda não perceberam ou onde é que eles ainda podem ir ter... Não é? É um esforço constante. Mas gostei, gostei muito. (RA5-2, 27/05/2008)

E mostra ainda o seu orgulho pelas descobertas e raciocínios dos seus alunos e a sua evolução ao longo do tempo:

> É isto que me interessa. Foi como um exercício que fizemos no outro dia sobre números pares e números ímpares, que eu até disse à [nome da colega]: «Anda cá ver!» Porque eles tinham uma sequência... Eu tenho ali o exercício para lhe mostrar depois. E eu... «Alguma vez a soma pode ser 15?» E eles logo: «Não, porque isto são números pares e a soma de números pares nunca pode dar número impar.» (RA5-2, 27/05/2008)

O trabalho realizado foi apresentado aos colegas do primeiro e segundo ano na sessão conjunta de formação. A apresentação foi feita por cada uma das professoras, já que, embora o tema fosse o mesmo, as tarefas seleccionadas foram diferentes, já que uma tinha uma turma de 1.º/2.ºanos, outra de 2.º/3.ºanos e outra ainda de 3.º/4.ºanos.

É de relatar ainda uma situação inesperada que ocorreu a propósito da apresentação deste grupo. As professoras tinham preparado um desafio a propor aos colegas que consistia em fazer dois cortes num rectângulo de modo a obter três triângulos com os quais construir um quadrado. Distribuíram os rectângulos pelos colegas na expectativa da solução. Mas, como facilmente puderam confirmar, neste caso a figura obtida compondo as três peças era apenas um losango, tal como se ilustra na Figura 76.

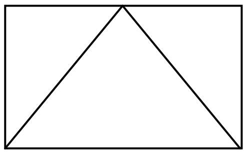


Figura 76. Transformação dum rectângulo num quadrado

Ora as proponentes afirmavam que na preparação da sessão tinha funcionado, o que originou uma discussão produtiva sobre a forma de uma figura geométrica. Reflectiu-se que um rectângulo pode ter várias formas diferentes e discutiu-se qual deveria ser a relação entre o comprimento e a largura do rectângulo original para que o problema pudesse ter solução – o comprimento teria de ser o dobro da largura. Concluiu-se que o facto de terem construído no computador a imagem do rectângulo distribuído tinha modificado a sua forma original levando assim à impossibilidade do problema. Assim, o "azar" acabou por se revelar útil por originar inesperadamente mais um momento de formação, eventualmente mais profícuo do que se tudo tivesse corrido bem: a compreensão das razões pelas quais a proposta apresentada não tem solução.

O acompanhamento em sala de aula

Em relação a esta vertente da formação Sílvia tem uma opinião muito positiva, embora confesse que no início se sentiu algo assustada por ter na sala alguém exterior que poderia ter a intenção de detectar falhas no desempenho. Reconhece contudo, desde o meio do primeiro ano, que essa impressão se desvaneceu:

> Sabe que no princípio fiquei assim um bocado... acho que qualquer pessoa fica assim um bocado... assustada, porque há alguém externo que sabe muito mais do que nós, que está mais atento... não quer dizer que vá para lá para captar erros, para apanhar erros, não é? Porque erros todos nós cometemos. Mas pronto. A gente fica sempre um bocado: «Ai, caramba!» Está-se a expor. Mas depois a Teresa chegou lá e aquilo passa... passámos por ser duas pessoas na mesma sala. Quer dizer, ajudámo-nos. (E2, 06/03/2007)

Realça a importância de este acompanhamento em sala de aula não ter como fim último a avaliação do professor para efeitos de progressão na carreira mas sim o aspecto formativo e a colaboração com vista à melhoria do ensino:

> E uma dá uma sugestão, outra dá outra sugestão, outra: «Olha! E se fizesses assim.» Acho interessante. Estamos a aprender, não estamos a ser avaliadas para subir de escalão nem para progredir na carreira. Estamos a tentar melhorar o ensino aos alunos. Isso é que me interessa. (E2, 06/03/2007)

No fim do primeiro ano reforça esta ideia, mostrando o seu agrado por ter tido a possibilidade de receber, *in loco*, algumas achegas e sugestões. Este formato foi adoptado pela formadora e investigadora quando julgou adequado, por sentir que podia ter mais utilidade do que situar o comentário apenas em retrospectiva. Deste modo era possível um enriquecimento efectivo da prática, ao invés de uma constatação *a posteriori*. Este facto é referido por Sílvia:

> E depois ao estar lá a professora orientadora ela também dá opinião, não é? Dizer: «Olha! Podias ter explorado isto. Podias ter explorado aquilo.» Mesmo no próprio momento às vezes surge: «Olhe! Aproveite para falar nisto. Aproveite para falar naquilo». «Explore mais este conceito». Quer dizer, é importante. Quer dizer, é assim que deviam ser dadas as aulas, ter sempre alguém que soubesse mais do que eu [Rindo]. Em equipa. (E3, 12/07/2007)

E, referindo-se a um episódio concreto, confessa que o acompanhamento em sala de aula lhe dava segurança e que uma pequena sugestão no momento contribuiu para uma melhor compreensão do conceito pelos alunos, facto de que não se tinha apercebido:

> Depois o acompanhamento em sala de aula para mim foi muito importante, porque eu sentia-me segura. Parece que não, mas sentia-me segura quando a Teresa lá estava. Porque dava-me a sensação que eu ali não ia cometer muitos erros, pelo menos científicos, porque eu tinha sempre alguém que os corrigisse. Aliás, viu naquela aula que aquilo não estava a correr muito bem quando estávamos a medir o perímetro. Porque aquilo foi um acto meu e não sei se expliquei no momento. Pronto. Não sei se expliquei, mas se expliquei, expliquei mal porque os alunos não perceberam. Mas aquela pequena dica que deu foi o suficiente para darmos a volta à questão e os alunos ficaram a perceber. E viu-se depois na aula seguinte que eles tinham percebido perfeitamente o conceito de perímetro, que não têm dificuldade nessa área. [...] E o facto das

> aulas assistidas a mim não influenciavam nada. Sentia-me à-vontade e até gostava. (E6, 14/07/2008)

Aproveita este facto para dar a sua opinião favorável à leccionação de aulas em pares pedagógicos, mesmo fora do contexto da formação, pois as incorrecções ou a falta de clareza são mais facilmente detectáveis por alguém que está ao lado e pode corrigir.

Relação com a formadora. Na sequência do que foi exposto anteriormente, Sílvia considera que houve sempre uma boa relação com a formadora que permite considerá-la como colaboradora e sentir-se desde o primeiro ano à-vontade nas aulas observadas:

> Portanto, agora já não me incomoda a presença da Teresa lá dentro. [Rindo] Não. Porque também existe uma boa relação entre a Teresa e nós. Julgo eu. Eu falo da minha parte e pelas colegas que também todas elas dizem que se sentem à vontade. Acho que, portanto, existe uma boa relação, a Teresa está aqui como colega e… acho que isso também nos dá um à vontade e uma maneira diferente de encarar. Estamos ali, estamos todos a trabalhar para o mesmo fim. (E2, 06/03/2007)

A formadora também se sentiu sempre muito bem recebida pelos alunos desta turma, que se mantiveram durante os dois anos. No portefólio Sílvia exprime também esta ideia: "As sessões de acompanhamento eram sempre muito ansiadas pelos alunos" (Por1, 05/07/2007).

Em relação ao papel da formadora, Sílvia acrescenta no portefólio do segundo ano:

> Quanto à formadora, achei que a mesma conseguiu sensibilizar os docentes para uma reflexão profunda sobre os métodos de ensino adoptados. Motivou, de forma positiva, os docentes para a problemática em questão e proporcionou, através do trabalho de grupo, debates, diálogos sobre as experiências na sala de aula e ao mesmo tempo mostrou-se sempre disponível para ajudar, dando sugestões e sobretudo motivando-nos a continuar, fazendo-nos ver que estávamos no bom caminho, ajudando-nos a contornar os problemas quando eles surgiam. (Por2, 03/07/2008)

Sobre a sua colaboração neste estudo, é pertinente relatar um diálogo que mostra bem a sua disponibilidade, acrescida duma atitude positiva em relação aos acontecimentos, aproveitando o que têm de bom:

> No fim da última entrevista, estava eu a agradecer-lhe a colaboração dela no meu trabalho e o tempo extra que lhe fiz perder e Sílvia respondeu:
> - Não lamento nem um minuto que gastei nesta formação.
> Ao que eu retorqui:
> - Não, mas eu agora estava a falar mais na sua colaboração comigo no meu trabalho de doutoramento e não na formação.
> E Sílvia respondeu:
> - Eu não distingo as coisas. Para mim foi tudo formação! (DC, 14/07/2008)

A reflexão

No fim de cada aula assistida era feita uma reflexão com a formadora sobre os pontos principais, que depois era continuada no grupo de formação. Sílvia reconhece que a observação da aula pela formadora e a troca de impressões que ela implica e que se segue a ajuda a reflectir sobre a sua prática e a melhorar:

> Mas se me chamaram a atenção e uma pessoa que sabe mais do que eu, eu acho que devo reflectir e pensar: «Bem. De facto, se calhar, até fiz mal. Onde é que eu fiz? Ora vamos lá ver onde é que eu fiz e vamos emendar» É para isso que estamos aqui, não é? Eu acho e vejo assim. (E2, 06/03/2007)

Esta professora, no fim do primeiro ano, considera a reflexão como um confronto pessoal com os seus medos, incertezas e dúvidas e uma oportunidade para as esclarecer, dando assim um importante contributo para o desenvolvimento profissional:

> A parte da reflexão foi super importante. Isso é importante, porque é ali que nós muitas vezes nos confrontamos com os medos, as incertezas que temos, as dúvidas... o esclarecimento na hora. Eu quando me surge uma dúvida eu gosto de esclarecê-la na hora. E então, sei lá, são muito importantes, muito enriquecedoras, quer aquelas que são feitas no final da aula particularmente entre as pessoas intervenientes, quer depois em grande grupo. (E3, 12/07/2007)

Sílvia, na sua apreciação final sobre a formação, considera este aspecto o mais importante pois permite-lhe pensar no modo como as coisas decorreram e, deste modo, aperceber-se dos pontos mais fracos e tentar superá-los. Não porque não reconheça importância às outras componentes da formação mas porque considera a reflexão o culminar de todo um processo:

> As reflexões são de facto o mais importante da formação. Não descurando nenhuma delas. Mas a reflexão é ali onde nos permite constatar os nossos erros, emendá-los, corrigi-los para de futuro melhorarmos. Portanto, se calhar a reflexão para mim eu elegia como o ponto mais forte da formação. [...] Houve uma preparação, uma fundamentação, uma planificação, uma adequação daquilo que queremos à turma, àquilo que nós achamos que a turma é capaz de desenvolver. Depois há o desenvolver a actividade, que às vezes corre melhor ou pior. Também depende muito da recepção da turma, não é? E depois há a reflexão. Mas aí na reflexão é que eu acho que é o culminar deste processo. [...] Para progredir. Modificando as práticas, adequar melhor. Às vezes a gente tem dificuldade em adequar uma actividade àquela turma, mas depois também é nessas reflexões que a gente diz ... «Olha! Se calhar também propuseste uma actividade demasiado simples. Correu mal porquê? Se calhar também deixaste...». Pronto. Há sempre uma justificação para qualquer situação que ocorre, não é? (E3, 12/07/2007)

No final do segundo ano de formação reitera essa opinião, explicitando também a relação da reflexão com a componente da partilha de experiências:

> Eu considerei que a reflexão sobre as aulas é muito importante. E não sabia muito bem em que nível havia de pôr a reflexão e a partilha de experiências em sala de aula, porque acho que estas duas vertentes foram muitíssimo importantes. Primeiro aquilo sobre o que fizemos na escola com o nosso grupo e depois de âmbito mais geral com o grupo dizer o que fizemos, aceitar sugestões, receber sugestões e dar sugestões. Acho que isto é o mais enriquecedor que há na formação. Claro que depois as sessões de formação conjuntas são importantes. Claro, aí é que nos forneceram ideias, sugestões, actividades... aprofundar o conhecimento para que depois pudéssemos aplicar em contexto de sala de aula. (E6, 14/07/2008)

O portefólio. Sílvia confessa a sua falta de gosto e dificuldade em exprimir-se por escrito. Daí ter considerado o portefólio como a parte mais difícil. Considera que por vezes até tem uma boa ideia mas quando vai tentar exprimi-la para o papel, não consegue traduzir cabalmente essa ideia:

> O portefólio para mim foi a parte mais difícil, porque eu tenho dificuldade em... [Rindo] Ou melhor, eu tenho as ideias, mas eu devia andar com um gravador. Vêm-me as ideias e eu penso: «Ai, vá lá! Olha! Esta está muito boa.» Mas quando vou passar para o papel já me esqueci do que disse e depois acabo por ser repetitiva e acabo por, muitas vezes, naquilo que escrevo não reflectir muitas vezes o trabalho que fiz. Pronto. É um defeito meu, outros terão outros. (E3, 12/07/2007)

Do diário de campo da formadora sobressai o mesmo ponto: "A Sílvia fez muito melhor do que aquilo que aqui está" (DC, 08/07/2007).

A professora considera que o importante é realmente o que faz e não aquilo que fica no papel, embora reconheça que em termos formais o escrito é o que conta e que terá de aperfeiçoar essa sua competência em transpor para o papel aquilo que se passou na prática:

> A ser avaliada pela parte que escrevo, por aquilo que escrevo não vou a lado nenhum. Eu prefiro que as pessoas vejam. Está a perceber? Isso a mim satisfaz-me na medida em que o que interessa é o que eu faço, não é... Porque para mim é mais importante o que se faz do que o que está escrito no papel. Mas eu sei que infelizmente mesmo para inspecções essas coisas contam muito. E sei que tenho que me esmerar nisso. [...] Mas também sinceramente não me ocorria fazer uma coisa mais... Porque lá está, eu tenho dificuldade em transpor e depois não sou minuciosa nas... não sou muito minuciosa nas descrições e assim. (E3, 12/07/2007)

Na apreciação final da importância das várias vertentes da formação posicionou a elaboração do portefólio no último lugar.

A partilha de experiências

Uma das razões que levou Sílvia a aderir a este programa foi a necessidade de quebrar um pouco o isolamento a que se sentia remetida por trabalhar numa escola pequena, só de dois lugares. No final do primeiro ano de formação sente-se gratificada com este aspecto, pois reconhece que teve oportunidade de trocar impressões, de trabalhar em conjunto, de partilhar experiências:

> Porque ao expormos aos nossos colegas as nossas dúvidas, como correu a aula, eles também nos dão sugestões, porque têm outra prática, melhor, pior, é diferente no fundo. Pelo menos é diferente. Mas depois estas várias opiniões podem-nos permitir que, de futuro, ao aplicar aquela actividade noutro contexto ou... a gente se lembre: «Ai, mas aquela colega disse para ter em atenção este pormenor, que podemos fazer isto ou aquilo.» E isto vai também enriquecer a nossa prática pedagógica. (E3, 12/07/2007)

Realça também o valor do trabalho autónomo como uma oportunidade de trabalho conjunto com colegas proporcionada pela formação:

> Eu este ano achei que foi bastante produtivo, porque nós trabalhávamos mesmo com objectivos. Estávamos ali, estivemos a preparar uma aula, tivemos que a apresentar aos alunos, tivemos que reflectir sobre ela, etc. Acho que foi... e apresentá-la aos colegas. Também foi giro. E acabou por ser uma experiência muito enriquecedora também. (E6, 14/07/2008)

Reflexos do Programa de formação

Nesta secção reúnem-se e sintetizam-se alguns aspectos do impacto do programa de formação nesta professora em relação ao conhecimento matemático e didáctico e à prática de sala de aula, às perspectivas da professora acerca da matemática e do seu ensino e às atitudes e aprendizagens dos alunos, focando-se por fim os aspectos menos conseguidos e as perspectivas para o futuro.

No conhecimento matemático e didáctico e na prática de sala de aula

Neste ponto procura-se fazer uma síntese das evidências do aprofundamento do conhecimento matemático e didáctico desta professora que ocorreu ao longo dos dois anos de formação. Entremeiam-se as afirmações da professora no decurso das entrevistas com as observações da investigadora e os dados obtidos por registo vídeo das aulas já apresentados anteriormente. Esta opção de analisar o conhecimento do professor essencialmente em situação de sala de aula está de acordo com a visão de Ball et al. (2001) quando afirmam que a prática tem de ser o centro da investigação de modo a poder desvendar o uso do conhecimento que não é visível quer através dos cursos frequentados quer mesmo através do estudo do que o professor sabe. É necessária uma visão do conhecimento matemático e didáctico no contexto de ensino.

Sílvia defende, já no fim do primeiro ano, que aprendeu muito com esta formação, que foi muito enriquecedora pois lhe proporcionou um aprofundamento do conhecimento, tanto matemático como didáctico. Este facto abriu-lhe os horizontes:

> E sem conhecimento matemático a pessoa fica limitada. Depois chega ali e pára, porque não sabe muito bem por onde avançar, não é? (E3, 12/07/2007)

No fim do segundo ano reforça esta ideia de forma ainda mais convicta:

> E os próprios professores também têm que [...] sentir-se seguros para os temas. [O professor por vezes apresenta tarefas simplificadas para se sentir confortável]. Porque sabe que consegue controlar aquilo. (E6, 14/07/2008)

Esta opinião de que a segurança científica permite trabalhar tópicos matemáticos mais ricos e em maior profundidade volta a ser defendida por Sílvia:

> O aprofundamento do conhecimento proporcionou-me... também me fez com que eu soubesse exactamente... Exactamente não. Tivesse mais segurança naquilo que estava a fazer e, por isso mesmo, fosse capaz de apresentar aos alunos actividades mais desafiadoras. Porque muitas vezes eram... «Mas será que isto não vai resultar ou será que eu não vou induzir os miúdos em erro?» Então agora a gente já tem mais abertura e é capaz de conseguir ver mais longe. «Para que é que isto serve? Isto... Está bem. Vou por aqui porque é isto que está bem.» E acho que isto só mesmo com um aprofundamento matemático. Mas também... E lá está! A formação nesse sentido foi muito importante. (E6, 14/07/2008)

Estas afirmações são consistentes com a atitude que manifestou nas sessões de formação, em que revelou sempre um grande interesse e preocupação pela exploração e aprofundamento dos tópicos matemáticos abordados e/ou subjacentes às tarefas propostas, e também durante a sua prática de sala de aula – de facto, as tarefas que propõe aos alunos, que envolvem um grau de desafio progressivamente maior, eram impossíveis de gerir e desenvolver de forma tão explícita e aprofundada sem conhecimento matemático da parte da professora a sustentá-las. Veja-se por exemplo o uso de representações eficazes na tarefa das máquinas malucas ligada ao raciocínio funcional, ou toda a exploração feita no jogo de dados, que envolve raciocínio probabilístico e também estabelecimento de conjecturas e generalizações.

A professora reconhece do mesmo modo que este aprofundamento lhe permite planificar as aulas com uma maior fundamentação, prever situações e ter uma actuação mais flexível:

> Agora não. Acho que já fiquei com uma facilidade em ver as coisas. Ao programar já me permite assim: «Bem. Acho que isto vai resultar por isto e por isto.» Porque depois também… Claro, aumentando o nosso nível de conhecimento nós somos capazes de prever com antecedência uma situação que pode acontecer depois no futuro. E até ir já preparada para o caso de me engasgar, digamos assim: «Não. Mas eu consigo dar a volta por aqui.» Quer dizer, isto dá-nos maior flexibilidade, não é? Porque podemos gerir melhor as nossas aulas, acho eu. (E3, 12/07/2007)

Realça também a influência do aumento de conhecimento na eficácia da aula, na capacidade de questionamento, da própria análise mais aprofundada do pensamento e do trabalho dos alunos:

> Mas quanto maior for o conhecimento que o professor dispõe maior… mais fácil e muito mais proveitosas serão as aulas, porque se o professor vai com dúvidas, com receios de aplicar à partida aquela é uma aula um bocado condenada já ao insucesso, não é? Se a pessoa vai segura, […] pode escolher as perguntas mais adequadas, […] analisar as descobertas deles, sem se perder ali pela rama […]. Isso permite-nos aprofundar mais temas que estamos a trabalhar, porque, claro, dá-nos maior conhecimento e a gente: «Ah! Pois, mas eu agora posso ir por aqui, explorar esta parte e também posso passar para ali e explorar aquela parte que me interessa.» (E3, 12/07/2007)

Sílvia apresenta também exemplos concretos de tópicos matemáticos onde considera que aprendeu mais. No desenvolvimento do cálculo mental e do sentido do número refere o trabalho na recta numérica e na tabela dos cem, que são representações eficazes para atingir esses objectivos, que defende deverem começar a ser trabalhados desde muito cedo para que os alunos não vão acumulando lacunas:

> Acho que o desenvolvimento do sentido do número é onde está o principal. Acho que foi aí que eu… Por exemplo, trabalhar na recta numérica, que eu não sabia. Não é que eu domine, mas pelo menos já tenho um… E sou capaz de ir pesquisar e procurar mais informação. E acho que aí é muito importante essa parte de trabalhar o sentido do número. E nestas fases primeiras da

> escolaridade é aqui que começa tudo. Porque senão depois são lacunas que se vão acumulando que quando chegam ao 9.º ano, ao... Eu já não digo tanto! Já digo anterior. Ali pelo 6.º ano as coisas começam-se a complicar mais... (E6, 14/07/2008)

Para ilustrar o modo como trabalha estes tópicos usa uma expressão feliz: "Pôr os números às cambalhotas" (E6, 14/07/2008). E recusa a introdução precoce dos algoritmos já que obscurecem a compreensão das relações entre os números e inibem o cálculo mental:

> E a criança brinca com os números e este brincar é muito saudável, porque lhes vai ajudar depois em raciocínios futuros. Estou cada vez mais convencida que a introdução precoce... fora da época, do algoritmo, estraga o cálculo mental. Ainda no outro dia estávamos aqui a falar. Estávamos aqui a falar e agora, segundo os novos Programas, aponta-se para que o algoritmo... seja o mais tardio possível. E eu digo assim: «Olha, eu dou razão porque introduzindo o algoritmo estragamos o cálculo mental». Porque eles têm outra forma de resolver e não precisam de arranjar aquelas estratégias... de brincar com os números, de pô-los às voltas e misturar com estes... e pensar neles, de estabelecer relações entre eles. (E6, 14/07/2008)

Sílvia realça também o tema da álgebra, muito ligado com os anteriores, como o que lhe era menos familiar e aquele em que aprendeu mais e que mais gostou, embora tenha sentido algum receio com o desafio que lhe foi feito no início do segundo ano por nunca ter sequer imaginado que estivesse nos horizontes dum professor do 1.º ciclo esse trabalho algébrico. E também reconhece que havia já alguns aspectos do pensamento algébrico que trabalhava mas nunca lhes tinha atribuído significado nem valorizado especialmente, já que nunca tinha reflectido sobre as potencialidades e objectivos dessas tarefas:

> Ou até nem valoriza assim tanto. [não canaliza] para aquele objectivo. E é o que a formação tem... A gente já sabe o caminho. Para o que aquilo serve. É isso que nos faltava principalmente. Eu agora sei para o que isto serve, portanto devo apostar nestas actividades. (E6, 14/07/2008)

Afirma ainda que o aprofundamento do conhecimento lhe fornece uma maior motivação para experimentar, já que lhe permitiu ultrapassar alguns receios que tinha de que as coisas não corressem bem, de não saber dar a volta a situações geradas pela própria dinâmica do trabalho:

> Agora acho que neste momento sinto-me assim com mais vontade e menos medo de experimentar, porque acho que todas as actividades podem... são susceptíveis de ser aplicadas e umas poderão correr melhor do que outras. Mas pelo menos podemos aplicar, experimentar e era um medo que eu tinha. Até aqui era: «Será que isto vai resultar? Será que é correcto?» Às vezes: «Será que é correcto? Será que não estou aqui a induzir as crianças em erro e depois não lhe sei dar a volta para desfazer esse erro?» (E3, 12/07/2007)

São exemplo notório destas afirmações as aulas de padrões visuais baseadas nos conceitos de área e perímetro, focadas num tema que a professora claramente não dominava anteriormente, e a sua vontade e entusiasmo em experimentar novas abordagens. Nesta aula transparece toda a riqueza de formas de representação, descobertas, raciocínio e generalização algébrica que soube conduzir.

Sílvia reflecte sobre o seu trabalho ao longo do segundo ano no domínio do pensamento algébrico e sobre as suas expectativas em relação aos alunos:

> E achei que a álgebra foi excepcional. Gostei imenso. Aliás, todas as actividades que fiz este ano foram dentro da álgebra. Então estas duas últimas eu adorei, porque muito sinceramente eu tinha cá no fundo uma esperança de que eles iam conseguir lá chegar, mas chegar à generalização. Porque eu tinha dúvidas. Eu tinha um bocado de dúvidas. (E6, 14/07/2008)

Assegura que nunca "ensaiou" tarefas com os alunos e que portanto estava sempre um pouco na expectativa sobre como eles iriam reagir. No entanto, em relação ao processo de generalização já tinha surgido anteriormente a determinada aula observada a oportunidade de o fazer com outra tarefa, e Sílvia manifesta um certo orgulho na estratégia de que se lembrou para explicar aos alunos o processo de utilização de uma letra como representante dum conjunto de números, de modo a poderem chegar à representação formal da generalização, e que se revelou muito eficaz como pôde ser observado:

> Porque é assim, eu nunca preparei nenhuma aula com os alunos. Quer dizer, eu nunca experimentei antes uma aula que até foi assistida. Foi sempre ali na corda bamba. Mas uma semanita antes por acaso surgiu um problema do género em que eles tinham que... se eles conseguissem chegar à generalização era óptimo. E eu comecei: «Então o N é o número que eu não sei. O tal N do não sei. Então como eu não sei qual é o número da figura vamos chamar-lhe N de não sei.» Quer dizer, já tinha no fundo aberto o caminho, não é? Embora fosse uma outra actividade, mas... E eles ficaram com o não sei do N e conseguiram. Mas... E funcionou. Acho que funcionou. Foi uma estratégia razoável e eles conseguiram. E até naquela última que eles já estavam a tentar generalizar aquela... apresentar aquela generalização complicada, que já implicava outros conhecimentos, eles também ainda eram capazes de lá ir um bocadinho. Mas também eram muito novinhos. Mas até a [nome da aluna] do 2.° ano, apresentou uma generalização completa. (E6, 14/07/2008)

Refere outro aspecto interessante para que foi alertada pela formação e que agora faz de modo diferente, no que diz respeito à análise do trabalho dos alunos:

> [...] de perceber como é que ele pensou. Porque agora eu às vezes ponho-me a olhar para as coisas... porque às vezes é interessante a gente olhar... Até mesmo na correcção das fichas eu já olho para elas de outra maneira. Tentar perceber, mesmo que ele tenha errado, porque é que ele... o caminho que ele seguiu, a estratégia que ele utilizou. «Ele até tinha uma estratégia jeitosa!

> Errou ali e tal, por isto e por aquilo.» Não é? Mas é importante eu perceber, porque às vezes eles têm um raciocínio certo. (E6, 14/07/2008)

Apresentam-se de seguida alguns episódios de uma aula no final do primeiro ano, em que foram abordados conceitos geométricos, pelo facto de ter sido descrita no portefólio e por ter sido um tópico valorizado pela professora no primeiro ano. Esta aula baseou-se numa tarefa de investigação presente num artigo da revista *Educação e Matemática n.º 78* (Guerreiro, Fernandes, Costa, Assunção & Ramos, 2004) com que Sílvia tinha tomado contacto no âmbito do curso de complemento de formação. A partir de quadrados, primeiro com um corte e depois com dois, os alunos deveriam obter e explorar figuras geométricas variadas. A professora organiza os alunos em pares. Dá uma ideia genérica da tarefa, dizendo que só devem fazer um corte no quadrado para obter outras figuras. Além disso, o corte deve ser "direitinho" e para tal vão traçar uma linha recta usando uma régua. Só depois de se certificarem que o que desenharam constitui um único corte e recto é que cortam. Exemplificou um corte começando por fazer o seu traçado a lápis e cortando do vértice para um ponto interior dum dos lados que não contém o vértice para obter um triângulo e um trapézio. Acabou por sugerir aos alunos que cortassem também o mesmo. Pede de seguida aos alunos que inventem outro corte diferente para produzir outras duas figuras geométricas. Incentiva os alunos a trabalhar em pares:

> Então pensem no grupinho: «Vamos fazer assim uma maneira. Vamos fazer outra. E vamos fazer outra.» Anda lá. [Voltando-se para um dos grupos] Discute aí com a [nome da aluna]. Como é que tu achas que vais fazer? Anda lá. Chiu! [Dirigindo-se para outro grupo] Não é cada um faz a sua. Têm que combinar. (A4-1, 15/05/2007)

A professora vai sempre incentivando os alunos a descobrir mais formas e quando uma é descoberta chama o par para mostrar aos outros e explicar como fez e o que obteve. Por vezes quando alguém coloca uma questão, a professora remete-a para a turma toda:

> Aluna 1: Ó professora! Falta fazer assim [Simulando a outra diagonal contrária à que tinha sido realizada no corte do seu quadrado].
>
> Prof. Ó Aluna1! Olha! A Aluna1 disse assim... Olhem meninos! Ouçam aqui uma coisa. A Aluna1 cortou assim. Olhem! Eu peço-vos que cortem isto melhor. Está bem? A Aluna1 cortou assim. Utilizou esta linha [diagonal]. Se ela tivesse usado esta teria obtido uma coisa diferente [referindo-se à diagonal oposta]? (A4-1, 15/05/2007)

Depois de descobrirem cinco hipóteses diferentes Sílvia faz uma síntese, no cartaz, dessas hipóteses, reunindo os alunos à volta deste. Investigam o número de lados do pentágono e a professora dá-lhe o nome. Para motivar a continuação da tarefa, questiona os alunos sobre se alguém conseguiu obter um quadrado:

Prof. Quando cortámos ao meio. Alguma vez aqui conseguimos cortar e arranjar um quadrado? Ficar na mesma com algum?...
A[vários] Não.
Prof. Nunca conseguimos.
Aluna 2: Não. Só nos rectângulos.
Prof. Só com dois rectângulos. Ok. Não conseguimos cortar o quadrado...
Aluno 3: Ó professora! Só se for com dois cortes. (A4-1, 15/05/2007)

Sempre que um par consegue um resultado diferente vai entregar para ir para o cartaz. Isto motiva os alunos, que estão entusiasmados e procuram arranjar o maior número possível de modos de cortar. A professora continua a pedir registos no papel dos cortes obtidos.

Quando surgem os dois cortes pelas diagonais e obtenção de quatro triângulos, a professora aproveita para levar os outros alunos a fazer estes cortes e explorar a situação:

Prof. Então vamos lá. Dois quadrados iguais com essas peças.
Aluno 4: Ó professora [Mostrando os quatro triângulos iguais juntos que formam o quadrado inicial]!
Prof. Está bem. Esse é o quadrado inicial. E agora eu quero aqui dois quadrados iguais.
[...]
Prof. Mas os lados têm que ficar todos encaixadinhos. Olhem! Conseguem fazer aí outra figura só com quatro lados? Mas diferente do quadrado. (A4-1, 15/05/2007)

Resumindo a produção matemática dos alunos nesta aula: Os alunos enumeram algumas características do quadrado: quatro lados, quatro ângulos, quatro vértices. Com o questionamento da professora concluem que os lados têm de ser iguais e os ângulos também. Tinham feito em aula anterior um "medidor de ângulos" que consiste numa folha dobrada e seguidamente dobrada novamente de modo que os bordos coincidam. Esta construção dá origem a um ângulo recto que foi usado para medir e comparar os ângulos do quadrado para verificarem que são congruentes. Conseguem uma classificação inclusiva dos quadrados como pertencendo à família dos quadriláteros.

Prof. É um polígono com quantos lados?
Aluno 1: Quatro.
Prof. [Contando os lados] 1, 2, 3, 4.
Aluna 2: É um quadrilátero.
Prof. [Repetindo] É um quadrilátero. Portanto, todos os polígonos que tiverem quatro lados nós chamámos-lhe...
Aluna 3: É um quadrilátero.

Prof. ... quadrilátero. Então o quadrado é um quadrilátero?
A[vários] [Em coro] É.
Prof. E então em que é que ele é diferente deste quadrilátero?
Aluna 3: Porque ele tem... o quadrado, tem os lados todos iguais e esse já não. (A4-1, 15/05/2007)

Conhecem o significado de diagonal e aprendem a confirmar se duas figuras são geometricamente iguais:

Prof. Calma! Ora bem. Então a Aluna 1 cortou... A Aluna 1 não. Aquele grupo cortou pela diagonal. Aqui também [Referindo-se a outro grupo]. E obtivemos que figuras?
A[vários] Triângulos.
Prof. Triângulos. Estes triângulos serão iguais, diferentes?...
A[vários] [Em coro] Iguais.
Prof. Iguais. Como é que nós sabemos que são iguais?
Aluno 2: Pôr na parte de cima do outro.
Prof. Pôr por cima. Ora põe lá por cima do outro a ver se eles são iguais. Eu ponho por cima um do outro e não me parece! [Sobrepondo os 2 triângulos não os fazendo coincidir] Sobra uns bocados de cada lado! Ora ponham lá um por cima do outro de maneira que eles pareçam iguais, para mostrar que eles são iguais.
[Os alunos sobrepõem os 2 triângulos fazendo-os coincidir.]
Prof. Ah!... Juntamos os lados iguais! (A4-1, 15/05/2007)

O reconhecimento das figuras em diferentes posições é uma coisa que os alunos já interiorizaram; sabem que não perdem o nome. A professora referiu que já anteriormente tinham discutido essa questão, tendo utilizado a imagem: «Então se tu estiveres deitado não és o mesmo de quando estás de pé?».

Na reflexão Sílvia comenta que os alunos excederam as suas expectativas:

E acho que para uma turma do 1.º e 2.º anos de escolaridade conseguirem, principalmente os dois cortes, acho que foi muito... Foi bastante interessante, porque eu não estava à espera de tantas hipóteses. (R4-1, 15/05/2007)

Aproveita para interligar várias áreas:

Aliás, eu tenho feito, ultimamente, trabalhar muita matemática dentro desta problemática de coisas em que eles têm que pensar e eles adoram. Por exemplo, dobrar. No outro dia, dobrar o rectângulo: «Fazer uma dobra, quantas figuras temos? E duas dobras? E três dobras? E quatro dobras?» E eles ficaram encantadíssimos: «Tchiiii!... Tanta coisa!» E depois começámos: «Isto é o dobro.» E era isto. Cada vez era sempre mais, muito mais, muito mais. E eles acharam muito interessante lá o dobrar. O próprio barquinho, que é uma dobragem, não é? Que eu dei o *ar* no 1.º ano. Dei, porque está nos cadernos do 1.º ano. Que eu dei o *ar*. O som *ar*, *er*, *ir*, *or*, *ur*. O *ar* de barco. Para eles dobrarem. Aproveitaram para dobrar e depois fizemos aquelas frases do barco. (R4-1, 15/05/2007)

No relatório da aula refere-se que Sílvia, durante a reflexão, se mostra tão entusiasmada com o trabalho que tem desenvolvido que precisa de contar aquilo que fez, e fá-lo com o maior gosto e desenvoltura:

> E eu assim: «Bem. Nunca falei em estimativas. Deixa ver o que é que isto dá.» Dei-lhes assim a ficha, ao 2.º ano. Eles andaram ali às voltas e não percebiam muito bem. E eu lá lhes dei uma explicação. Mas então peguei, fui à cozinha, trouxe um copo grande cheio de feijões e perguntei-lhes: «Quantos feijões acham que vocês têm aqui?» «Ih!...». Um: «Tem 20.» Outro: «Tem 50.» Quer dizer... E eles não tinham muito a noção da quantidade de feijões. (R4-1, 15/05/2007)

E conta das experiências dos alunos e dos seus sentimentos em relação à matemática:

> E estivemos um dia todo nisto. E chego ao fim e diz assim uma: «Ih! Estivemos o dia todo na matemática e nem me apercebi!» Porquê? Eles estão [...] a mexer e... (R4-1, 15/05/2007)

Distingue estas aulas das outras mais tradicionais mas que também têm o seu lugar. E defende o conhecimento da tabuada:

> Ai, há coisas que tem que ser... Aliás, no outro dia foi o concurso da tabuada também. Tem que ser. Porque senão se eles não souberem tabuadas é como eu digo: «Meus meninos, se não souberem tabuadas não podem fazer as contas direitinhas.»

Em suma, verificou-se que a capacidade de organização e gestão da aula por parte da professora, o seu questionamento insistente e seguro, as oportunidades que deu aos alunos para o desenvolvimento da comunicação matemática e o seu entusiasmo pelos temas trabalhados conduziu a uma muito melhor e mais precoce assimilação dos conceitos.

No portefólio Sílvia é bastante, talvez demasiado, concisa em relação às explorações feitas, mas na síntese não deixa de referir:

> Na escolha da tarefa ponderei o facto de a considerar um pouco difícil para o grupo, mas decidi que iria assumir esse desafio. Apesar de tudo, a maioria dos alunos correspondeu ao desafio, tendo superado mesmo as minhas expectativas. [...] O facto de trabalharem em pares também ajudou, na medida em que tive a preocupação de formar pares de forma que o mais fraco pudesse beneficiar com a ajuda do outro. [...] Era uma tarefa extensa para o tempo disponível (houve necessidade de concluir a tarefa no dia seguinte). [...] Permitiu ainda compreender que é importante propor aos alunos actividades diversificadas e penso que actividades deste género ajudam os alunos a desenvolver uma atitude mais positiva em relação à matemática. (Por1, 05/07/2007)

O desenvolvimento do pensamento algébrico. Procurar-se-á apresentar evidência do desenvolvimento do pensamento algébrico à luz do percurso de *algebrização* da experiência matemática dos alunos recomendado por Blanton & Kaput (2003), descrito pormenorizadamente no Capítulo 3, e concretizado pela categorização de formas de pensamento algébrico de Blanton & Kaput (2005). Escolheu-se em particular para esta síntese o trabalho autónomo, sem prejuízo do restante trabalho de Sílvia ao longo destes dois anos, pois julga-se que aquele, pelas suas características, aproxima-se do seu estilo de ensino, dos seus gostos e interesses, daquilo que reputa de fundamental na sua prática lectiva. Por outro lado, foi um trabalho sujeito a uma reflexão e apresentação mais cuidada. Por estas características tornou-se assim um trabalho de referência da professora, que se pensa poder exprimir de forma significativa o seu sentir na profissão, em particular no ensino da matemática, através das abordagens, tarefas e recursos escolhidos e implementados. Deste modo, pode iluminar melhor a evolução do seu conhecimento matemático e didáctico, pela interpretação do conteúdo das sessões conjuntas de formação e a sua implementação na sala de aula, com as adaptações pessoais que entendeu fazer.

O trabalho autónomo de Sílvia teve como pano de fundo o estabelecimento e a distinção entre os conceitos de perímetro e área mas evoluiu para a descoberta de padrões em sequências figurativas, precisamente no cálculo da medida do perímetro e da área de quadrados e em seguida de dois tipos diferentes de rectângulos. Assim, o pensamento algébrico foi visto como permeando o currículo de matemática mais do que um mero tópico a ensinar (Jacobs et al., 2007). Os alunos, apoiando-se e recorrendo a conceitos acabados de introduzir, os de perímetro e área, tiveram oportunidade, ao trabalhá-los em simultâneo, de efectuar mentalmente a sua distinção de uma forma marcante, e, em paralelo, o ponto de partida geométrico tornou-se num trabalho numérico por consideração das medidas respectivas.

O desempenho dos alunos nas tarefas foi extraordinário. Por análise das sequências figurativas apresentadas, para as quais deveriam indicar a área ou o perímetro, alguns alunos, construindo algumas figuras para além das três primeiras que foram dadas, passaram a uma simples contagem um a um das unidades de perímetro ou de área. Este procedimento é muito restritivo e os alunos aperceberam-se disso: era necessário arranjar um processo que lhes permitisse indicar o número sem contar as unidades e mesmo sem fazer os desenhos. Houve assim em alguns casos uma evolução para a generalização aritmética (Radford, 2006) através de um pensamento de tipo recursivo – os alunos descobriam, por exemplo, que cada quadrado tinha mais quatro unidades de perímetro que o anterior. Contudo, outros alunos fizeram uma passagem directa para a generalização algébrica (Radford, 2006), relacionando a medida do perímetro ou da área da figura com a posição que essa figura ocupava na sequência. A tarefa de descobrir uma regra ou fórmula que relacione a posição da figura na sequência com a medida do seu perímetro ou da sua área começa assim a ser vista como extensão natural do seu trabalho com números, permitindo desenvolver a predisposição para a modelação algébrica (Rivera, 2006). Nesta fase, os alunos começaram por descrever por palavras a generalização obtida e passaram de seguida a utilizar o simbolismo algébrico, usando a letra *N* como variável para representar o *número* de uma figura qualquer que *eu não sei* (*N de número e N de não sei*). Esta imagem, criada pela professora, funcionou eficazmente, tendo os alunos aderido a ela de forma extremamente natural e com total compreensão. O bom desempenho alcançado nestas tarefas deveu-se também a um trabalho prévio de contagens visuais, em que os alunos desenvolveram a sua capacidade de reconhecimento visual; as sequências de figuras trabalhadas, em arranjo rectangular, prestavam-se a essa capacidade de *ver* (Vale et al., 2009). A professora procurou sempre que os alunos justificassem as suas conclusões precisamente com base no que viam, e essa circunstância facilitou o processo de generalização. A Tabela 9 apresenta as ocorrências de formas de pensamento algébrico observadas.

Tabela 9: *Ocorrências de formas de pensamento algébrico na aula de trabalho autónomo de Sílvia*

Categoria	
A	Procura de uma relação recursiva entre os diversos termos das sequências exploradas.
C	Os números das figuras foram tratados como representantes requerendo dos alunos atenção á estrutura mais do que aos cálculos.
E	Abstracção do número para o símbolo N para representar *um número que eu não sei*.
F	Descoberta de relações entre o número da figura e a medida do perímetro ou da área respectiva.
G	Formulação de conjecturas sobre a medida do perímetro ou da área dos termos das sequências.
H	Identificação e descrição dos padrões de crescimento detectados nas sequências.
J	Explicitação e verbalização das descobertas que vão sendo progressivamente refinadas. Discussão e debate com a professora e entre colegas.
K	Descoberta de processos de cálculo da área e do perímetro de quadrados e rectângulos.

As sequências figurativas apresentadas constituíram uma ferramenta inicial que potenciou o pensamento algébrico. As formas de registo foram sempre preocupação da professora. Foram utilizadas diferentes formas de representação – desenhos, tabelas, linguagem corrente, linguagem simbólica – e feita a transição entre essas diferentes formas.

Nas perspectivas da professora sobre a matemática e o seu ensino

Sílvia reconhece que, embora não tenha de modo geral gostado de matemática no seu percurso académico, e tenha sentido receios e frustrações em relação a esta disciplina, tem agora, depois da frequência do complemento de formação e deste programa, uma nova visão da matemática como disciplina que se pode ensinar e aprender de forma lúdica, com prazer e com benefício, desligando-se do peso excessivo da mecanização e valorizando essencialmente a capacidade para pensar. Sílvia reconhece que o seu gosto pelo ensino da matemática se iniciou a partir da frequência do complemento de formação. Considera assim que já veio para esta formação motivada porque "já estava espevitada para este assunto" (E2, 06/03/2007). Começou a adquirir outra visão da disciplina. Agora sente que consolidou essa visão. Desde o início desta formação que a professora a avalia muito positivamente. Refere ainda o seu conhecimento de outras colegas que também estão a gostar desta formação por lhes dar uma perspectiva diferente da matemática, o que defende que vai reflectir-se nos alunos "porque se nós gostamos acho que os alunos também gostam" (E2, 06/03/2007).

> A gente agora também tem uma outra visão das coisas, mesmo quando estamos a falar com os miúdos. Tirar partido daquilo que estamos a fazer. E acho que esta formação da matemática sem dúvida que é excepcional. Aliás, tenho colegas neste agrupamento e noutros agrupamentos que estão a fazer formação de matemática e estão a adorar matemática. (E2, 06/03/2007)

E, no fim desse ano lectivo, reforça esta ideia, explicitando a importância de ter oportunidade e ocasião de aplicar em sala de aula:

> Do meu ponto de vista, eu falo do meu e também um pouco da experiência daquilo que as minhas colegas comentaram, eu acho que foi muito interessante, porque eu já tinha tido aquela formação na ESE. Foi ao encontro daquilo... estava dentro daquilo que eu aprendi na ESE, mas agora teve a parte mais interessante, que foi a parte em que eu tive mais disponibilidade de tempo para poder aplicar. (E3, 12/07/2007)

É de realçar que uma certa angústia por se sentir aquém daquilo que é pedido hoje em dia aos professores de matemática teve um enorme papel no empenhamento desta professora em fazer mais e melhor:

> Eu até às vezes cheguei a questionar: «Jesus! Eu não faço nada disto! Eu não presto para nada, só faço asneiras.» Porque eu tinha a sensação que aquilo que eu fazia era muito pouco comparado com aquilo que é pedido hoje na matemática. E felizmente estou...tenho, pelo menos, as portas abertas para conseguir... e estou alerta a essas situações e acho que isso é importante. Eu acho que foi muito bom a formação a matemática. (E6, 14/07/2008)

Sílvia considera, no final da formação, que a principal característica de um bom professor de matemática é conseguir em primeiro lugar que os alunos gostem de matemática. Esta professora considera esta falta de ligação afectiva à disciplina a causa primordial do insucesso. E como levar os alunos a gostar? Sílvia tem uma convicção forte:

> Aquele que faz com que os alunos gostem da matemática primeiro. [...] E depois, claro, fazer que eles gostem como? Proporcionando actividades que sejam interessantes, desafiadoras, aquelas que lhes faz ir além daquilo que é o cálculo de caneta e papel, sem ser aqueles algoritmos rotineiros. Coisas que os ponham a pensar e explicar como pensaram, porque isso é que é também saber matemática. Não é? Não é só resolver os exercícios. É preciso também saber explicar como, o caminho que seguiu, a metodologia que utilizou ou as estratégias. (E6, 14/07/2008)

Em relação a um bom aluno, e dentro da mesma linha, Sílvia reclama não uma aplicação rotineira de procedimentos mas uma compreensão profunda dos conceitos subjacentes que permita resolver questões que são postas de forma diferente, e simultaneamente a capacidade para comunicar aos outros a sua forma de pensar:

> Também não é só aquele que consegue resolver os exercícios. É aquele que os consegue resolver, mas explicar como é que os resolveu, que estratégias utilizou, porque é que fez assim e explicar. Porque é no explicar que nós entendemos e fazemos entender também os outros. Raciocinar matematicamente. Acho que é mais isso. Porque muitas vezes até se decoram exercícios e faz-se aquilo muitas vezes e consegue-se resolver muito bem. Mas quando as coisas têm... apresentando de uma outra maneira, depois aí é que se vê quem é um bom aluno a matemática. (E6, 14/07/2008)

No fim do primeiro ano, Sílvia confessa sentir um grande entusiasmo em relação ao ensino da matemática e que essa sua postura se reflecte nos alunos:

> Eu ando muito entusiasmada com a matemática. Aliás, na ESE o bichinho começou a crescer e depois este ano acho que, como tive mais tempo para poder proporcionar actividades aos alunos, eu gosto muito. Acho que tenho evoluído muito. Acho que profissionalmente evoluí muito na matemática, mesmo... E acho que os alunos também gostam da matemática. (E3, 12/07/2007)

No fim do segundo ano, a professora defende veementemente a mesma ideia:

> E os miúdos notam quando a gente está entusiasmada. Isso também é outra coisa importante. Tem que haver aqui um... Os alunos têm que sentir em nós que nós gostamos daquilo que estamos a fazer. Porque quando eles sentem que nós gostamos, eu acho que eles também têm outra postura. E torna-se tudo muito mais fácil e muito mais acessível. (E6, 14/07/2008)

No fim do segundo ano, fazendo uma retrospectiva do seu percurso profissional desde antes da formação e ao longo destes dois anos, Sílvia reconhece que anteriormente seguia essencialmente os manuais, podendo uma vez ou outra fazer uma experiência diferente, mas sempre com receio de fazer coisas erradas pois não sentia segurança e não tinha, além disso, garantias de ser esse um bom caminho. A formação deu-lhe essa segurança, mesmo em termos científicos, e com ela a vontade de inovar com fundamento, de arriscar novas experiências de ensino:

> Mas antes da formação, mesmo a que fiz da matemática da ESE, eu, pronto, seguia os manuais, usava aqui ou ali. Mas tinha medo muitas vezes, porque eu não me sentia segura e não sabia se estava a seguir o bom caminho. E o meu medo também era errar. Estar a transmitir coisas erradas. Quando fui... quando estive na ESE aqueles dois anos também me deram para perceber que há muitas coisas que nós também podemos fazer. Temos é que também ser... atirarmo-nos um bocado, ser um bocado ousados e experimentar, porque... também não podemos ser assim completamente assim à toa, porque também temos que saber o caminho que vamos seguir. Mas acho que daí para aqui eu tive uma evolução muito grande. Primeiro adquiri conhecimentos específicos na área dos conteúdos a trabalhar que me permitiram consolidar melhor os meus conhecimentos e depois só assim é que eu sou capaz de os transmitir aos outros. [...] Porque eu digo, eu tinha medo de... eu preparei-me, pesquisei... [...] É um desafio. Vamos lá ver o que é que isto vai dar! Também esse desafio, essa adrenalina de a gente: «Eu não sei onde é que isto vai parar! Mas vamos tentar. Vamos experimentar.» Eu acho que é aí que está o interessante da matemática. Arriscar um bocado. (E6, 14/07/2008)

Nas atitudes e aprendizagens dos alunos

Sílvia verifica nos seus alunos, já no fim do primeiro ano, um aumento do gosto pela matemática provocado essencialmente pela utilização de tarefas menos rotineiras e mais desafiadoras, que permitem encarar a matemática de um ponto de vista lúdico, agradável, que os faz sentirem-se bem e sobretudo, que os faz sentirem-se capazes de fazer alguma matemática por si próprios:

> Os alunos gostam e entusiasmados com aqueles... sempre que se lhes dá aquelas actividades menos triviais, eles adoram e... Porque depois até dizem: «Isto até nem parece matemática! A gente está aqui a brincar! Isto nem parece matemática!» Acho que também é fundamental eles desmistificarem esta ideia de que a matemática é uma disciplina inacessível ou então só acessível a um grupo restrito de pessoas. Eles são capazes de ser tão bons matemáticos como outros, depende das actividades que nós lhes vamos propondo... e do desenvolvimento que eles vão levando ao longo da escolaridade, não é? Porque, claro, não se fazem... não se faz uma casa assim do nada. É preciso ir começar aos pouquinhos, não é? E é o que nós estamos a fazer. (E3, 12/07/2007)

No final do segundo ano reitera o gosto dos seus alunos pela disciplina, defendendo que o trabalho inovador por si realizado teve uma continuidade, não se confinando às aulas assistidas:

> Mas acho que eles gostam muito mais da matemática… esta matemática que os põe a pensar, esta matemática que a gente trabalhou nas aulas e nas outras aulas que não foi só nas aulas assistidas. Eles gostam muito mais dessa matemática, porque é como eles dizem: «Nós até nos esquecemos que estamos na matemática. Nós até parece que estamos aqui a brincar e a descobrir coisas.» Eu acho que isso é bonito e é notório na minha turma. (E6, 14/07/2008)

Notou-se, ao longo do tempo, que os alunos vão estando progressivamente mais envolvidos e mais autónomos, formando equipas de trabalho. Do relatório:

> Os alunos dialogam à-vontade entre eles e com a professora. Levantam questões, dizem que não conseguem, apoiam-se por vezes no trabalho do vizinho, muitas vezes para "acusar " ou "fazer queixa" (ó professora, ele não…) mas muitas vezes também para dialogar com ele (ó fulano, já fizeste o triângulo? Mostra!) O trabalho é em pares e como só têm um geoplano para dois têm mesmo que seguir o trabalho do outro, ajudá-lo e esperar que ele acabe. (RelA2-1, 15/02/2007)

Sílvia defende um grande contributo da formação e da mudança das suas práticas nas aprendizagens dos alunos. O motor é, na sua opinião, o interesse e o entusiasmo que lhes nota, também por influência do seu próprio entusiasmo, e que os leva a querer sempre descobrir mais, ir mais além, e muitas vezes também a envolver os pais:

> E quando a gente os põe a pensar sobre um número, às vezes, aparece um número no quadro: «Ei! Este número não nos diz nada?!» E eles: «Ai, é capicua e tal.» «Ah! Pois. Estão a ver?» E depois pensam em casa: «Olhe, professora! Eu já descobri!» Eu tenho lá uma lista das capicuas: números e palavras. E eles lá descobrem. Às vezes enganam-se, não é? Mas descobrem: «Olhe! Eu descobri uma capicua.» «Vai lá então escrevê-la.» E eles lá vão escrever à lista. Acho que isso é interessante e eles estão sempre…Depois até põem os próprios pais a pensar! Isso também é importante. (E2, 06/03/2007)

A propósito das capicuas, sobre as quais se explorou uma tarefa numa sessão de formação em grupo, Sílvia conta o seguinte episódio: Numa aula conversava com os alunos do 2.º ano sobre os números entre 800 e 899 e a professora propôs que contassem a partir do 800 em saltinhos de coelho de 5 em 5. E uma aluna diz logo muito depressa: «Não vamos encontrar nenhum número capicua». A professora questionou o porquê dessa afirmação e a aluna respondeu: «Porque tinha de acabar em 8. Não dava…». A ideia foi depois explicitada com os colegas de turma. E a professora verifica que os alunos captam a informação (neste caso a das capicuas, que tinha sido trabalhada anteriormente) e conseguem, já no 2.º ano, relacionar vários conceitos matemáticos.

No fim desse ano lectivo afirma que o programa contribui seguramente para o desenvolvimento da competência matemática dos alunos, e considera até que todos os professores deviam frequentar esta formação:

> Portanto, ainda só foi aplicado um ano, não podemos avaliar já, dizer: «Foi óptimo!» Mas eu estou crente de que está a contribuir e muito. Acho que estamos num bom caminho! E acho, aliás, que o programa da matemática era um programa para continuar e todas as pessoas deviam fazer este programa, esta formação. (E3, 12/07/2007)

Na reflexão da última aula do segundo ano reflecte também sobre a evolução dos alunos:

> E trabalharam muito. Isto é matemática em que eles estão ali... da pesada. [...] Aquele exercício... Eu achei tão interessante, fiquei tão contente quando eles me disseram logo: «Então? Não pode ser! Então? O 15 é um número em que a soma[19]...» Estabelecer estas relações da estrutura da coisa... Exacto. Isto é muito importante. É sinal que eles estão muito bem metidos nisto, estão num bom caminho e começam a pensar mesmo em pormenores, por exemplo, na área eles estão ali já e «Já sei.»... Ainda ontem abri ali um exerciciozinho de área em que eu ainda não tinha feito nenhum. Só sempre com unidades de quadradinhos. E havia dois triângulos, em forma de triângulo... e eles: «Ai! Isto não há problema nenhum! Porque estes dois triângulos juntos formam um quadrado e a área é igual.» E não sei quê. Quer dizer, é isto, o serem capazes também de não estarem à espera que eu lhes explique tudo. Eles também são capazes de descobrir e deduzir as coisas. Acho que isso é interessante. (RA5-2, 27/05/2008)

Relata que os seus alunos adquiriram já um "olhar matemático" que os leva a estabelecer relações entre os vários tópicos trabalhados:

> Quer dizer, as várias maneiras de obter um resultado utilizando as várias estratégias. Eu costumo dizer: «A matemática é uma brincadeira. É tu olhares para lá e pensares: Eu vou descobrir aqui qualquer coisa.» E descobre-se! Se puser a olhar para os números... Eu acho engraçado que os meninos da turma às vezes põem-se: «Olha, eu estou a ver ali uma sequência!» Quer dizer, já vêem sequências ali. [...] Eu acho engraçado! «Olha, aquele número é par. Ah, pois! Dá aquilo porque eu somei aqueles dois números que são pares ou ímpares e deu assim.» Quer dizer, isto é já um... Acho que já atingiram aqui um nivelzinho muito razoável de conhecimento... que lhes permite fazer estas relações com as coisas. Com as matérias à medida que elas vão surgindo. (E6, 14/07/2008)

A professora considera também que os alunos gostam de matemática e evoluíram bastante nas aprendizagens devido ao facto de terem sido usadas várias formas de

[19] Tratava-se de um problema em que era preciso reparar que os números eram todos pares e portanto o 15 não podia fazer parte do grupo.

representação diferentes. Referindo-se à tabela dos cem, que foi uma representação muito utilizada e a que se reconhecem muitas potencialidades no desenvolvimento do sentido do número, Sílvia defende que é um recurso útil para a professora e os alunos explicarem muitos raciocínios:

> A tabela dos cem é muito interessante. Ponho a tabela dos cem à frente [afixada na parede], porque às vezes eles vão... Estou a explicar qualquer coisa e não conseguem: «Olhem, eu vou ali à tabela.» Estão de volta... «Eu faço assim e assim.» E rabiscam e cortam e vão para... Quer dizer, às vezes quando têm mais dificuldade a explicar o raciocínio deles, eles vão lá e explicam por setas e riscam para aqui e é muito bom. Isso só demonstra que eles sabem o que estão a fazer. (E6, 14/07/2008)

Outro dos aspectos que refere é a questão da exigência, do desafio e da capacidade de correr riscos, aliada ao aumento de expectativas sobre aquilo que os alunos podem na realidade compreender e fazer:

> Mas estas duas últimas deste ano e aquela dos números pares e ímpares acho que foi... uma agradável surpresa. Por um lado eu achava que eles eram capazes. Mas sinceramente não pensava que eles fossem tão longe. E lá está! As poucas expectativas que nós depositamos nos alunos às vezes são condicionantes do sucesso educativo. Nós achamos que eles não são capazes, por isso não propomos. E acho que nós não perdemos nada em propor, sabendo minimamente aquilo que estamos a fazer, é lógico! Arriscar também é um bocadinho... porque às vezes também o momento não é o ideal e às vezes é o... mas, de uma maneira geral, acho que se deve é arriscar. Tem que se arriscar um bocado, porque eles são capazes. E este ano eles são... Eu também já cheguei a essa conclusão. (E6, 14/07/2008)

Sílvia acrescenta ainda outro aspecto interessante que se prende com uma mudança qualitativa na utilização de materiais manipuláveis. A professora conta que anteriormente os alunos usavam os materiais mais como passatempo, mas agora, a brincar, vão explorando e relacionando conceitos matemáticos:

> É engraçado que eles antes brincavam por brincar. Pegavam no geoplano e... faziam casinhas, faziam cercas e não sei quê. E agora não. «Ei! Vamos ver quem consegue fazer o quadrado maior. O quadrado que tem a maior área, que tem... O quadrado que tem maior perímetro.» E isso já não é brincar uma brincadeira qualquer. Já estão ali os conceitos matemáticos a ser trabalhados. (E6, 14/07/2008)

Aspectos menos conseguidos

Quando foi questionada sobre este particular, Sílvia teve algumas dificuldades em enumerar aspectos menos conseguidos, já que, como confessa, gostou sinceramente de frequentar este programa e não tem termo de comparação por esta ter sido a única formação contínua ligada à matemática que frequentou. Refere apenas a importância e necessidade de apetrechar as escolas com mais materiais didácticos; apesar de já haver alguns, considera ainda o seu número insuficiente, dada a importância que lhes atribui na criação do gosto pela disciplina e na melhoria das aprendizagens dos alunos do 1.º ciclo.

Perspectivas para o futuro

Já durante o primeiro ano de formação Sílvia sente um grande entusiasmo pelo ensino da matemática e afirma que este trabalho agora iniciado não poderá perder-se, já que teve oportunidade não só de aprender mas também, e sobretudo, de aplicar o que aprendeu. De facto, Sílvia exprime esta ideia afirmando que por vezes, quando a formação é teórica, os professores acabam por não utilizar as sugestões, "porque acham muito complicado e acham que perdem tempo" (E2, 06/03/2007). Mas se tiverem mesmo de as utilizar, como é o caso deste programa pela sua componente de acompanhamento em sala de aula, acabam por perder o medo inicial e reconhecer o valor das tarefas sugeridas. Além disso, realça um aspecto muito importante: é a própria intervenção dos alunos que, ao terem gostado dessas inovações, requerem do professor a continuação dum trabalho nos mesmos moldes:

> E depois as próprias crianças pedem-nos para fazer esse tipo de matemática. Que eles chamam-lhe a matemática moderna [rindo]. Os miúdos chamam-lhe a matemática moderna. [...] Para eles a matemática tradicional é as continhas... os números, fazer aquelas coisas todas maçadoras. Que para eles são maçadoras. (E2, 06/03/2007)

No final do segundo ano, quando é questionada sobre o investimento nas aulas assistidas por comparação com as outras em que estava só com os alunos, reconhece que despendeu mais tempo na preparação das aulas assistidas que das outras, mas que faz sempre pelo menos um esboço de planificação das suas aulas todas, escolhendo as tarefas e testando-as de antemão, de modo a que os alunos se mantenham motivados e a trabalhar com gosto:

> Se me disser assim: «Mas você planifica todos os dias tal e qual como planifica... o rigor?...» O rigor tem que haver sempre, não é? «Mas com os pormenores todos como quando é uma aula assistida?» Provavelmente não, porque isto não acontece todos os dias. Mas a maioria das vezes tem que acontecer. Tem que haver sempre uma planificação, nem que seja um esboço. Mesmo a orientação... As tarefas. A escolha das tarefas. É. As tarefas têm que ser escolhidas. Isso eu escolho sempre e testo-as primeiro. As tais desafiadoras que... para desenvolver o gosto pela matemática. Porque se são sempre coisas rotineiras, iguais, é mais do mesmo, é mais do mesmo e os alunos acabam por saturar. (E6, 14/07/2008)

E na reflexão sobre as suas disposições para o futuro, Sílvia defende que se sente empolgada e tudo fará para continuar na perspectiva ganha pela mudança de concepções sobre a matemática enquanto disciplina e consequentemente na mudança das práticas. Dá também conta que o mesmo se passa com as suas colegas de formação, mas realça um aspecto muito importante: é que não poderão ser abandonadas. Terá de haver de tempos a tempos algum mecanismo que reavive esta vontade, para que não esmoreça. E refere também a necessidade da ultrapassagem do medo da matemática, que ela própria já sentiu:

> É assim, naquilo que me toca... eu não posso prever o futuro, mas, pela ideia que tenho agora, eu é para continuar. Pelas minhas colegas de formação também estão todas entusiasmadas e acho que sim. Estamos num bom caminho e é assim que se deve ir, é por aqui que se deve ir. Agora, também é bom que de vez em quando nos dêem um abanão. Umas formações. «Venham cá.» Tipo uma reciclagem. «Venham cá. Ora vamos lá ver. Vamos pensar outra vez sobre isto.» Mas a opinião geral é que as pessoas estão muito consciencializadas de que assim sim, assim é que é a matemática. O resto também faz falta. Aqueles exercícios rotineiros, aquelas... têm que ser feitos. Mas não podemos ficar por aí. A matemática é ir mais além e este mais além é pôr os alunos a pensar, olhar para a matemática doutra maneira. E desmitificar este medo da matemática que não é nenhum bicho papão. Eu também já o tive! (E6, 14/07/2008)

Deste modo, poderá concluir-se sobre a forte convicção desta professora de que a suas práticas actuais são melhores do que as anteriores e que conduzem a melhores resultados, e a sua firme vontade de as prosseguir no futuro.

Síntese

Sílvia é uma professora com bastante experiência mas que nos seus primeiros anos de profissão andou bastante afastada das novas tendências do ensino da matemática, disciplina com a qual não tinha grandes afinidades, em parte devido a um percurso académico algo conturbado. Contudo, nos últimos anos frequentou um curso de complemento de formação que lhe proporcionou esse contacto e que a despertou para uma visão diferente da matemática escolar. Este facto constituiu a motivação inicial para a frequência deste programa de formação, já que Sílvia pretendia aprofundar alguns tópicos mas sobretudo levar à prática novas ideias e sugestões de trabalho. Desde o início da formação que se envolveu fortemente, revelando grande empenho e vontade de aprender nas sessões de formação e uma atitude de grande entusiasmo, iniciativa e vontade de experimentar ideias novas na sala de aula. É uma pessoa optimista e positiva, cujo entusiasmo pela matemática é contagiante para os seus alunos, que passam a revelar também um grande gosto pela disciplina.

Considera a reflexão como o aspecto mais importante da formação, não por desvalorizar os outros mas por constituir o culminar de todo um processo em que pôde aprofundar os conceitos matemáticos, aprender novas formas de explorar esses mesmos conceitos e explorá-los com os seus alunos.

A partilha de experiências com os colegas contribuiu para ultrapassar a situação de isolamento que sentia por trabalhar numa escola pequena, de apenas dois lugares, em que o colega tinha precisamente os outros dois anos e em que, portanto, os interesses eram algo diferentes.

Em particular, valorizou o trabalho autónomo, que realizou com mais duas colegas, por constituir uma oportunidade de trabalho em conjunto em que trabalhavam com um objectivo concreto ao ter de planificar e aplicar em sala de aula o tema da área, reflectir em conjunto sobre os resultados obtidos e ainda apresentar aos outros colegas do grupo de formação o seu trabalho. Nessa apresentação, um desafio colocado aos colegas onde ocorreu um lapso, já que o problema não tinha solução, acabou por se revelar uma surpresa positiva pois foi uma oportunidade de reflectir sobre as causas da impossibilidade proporcionando assim um aprofundamento do conhecimento matemático. O portefólio foi o aspecto que menos valorizou, confessando a sua dificuldade em traduzir para o papel o trabalho efectivamente realizado. Este ponto foi também constatado pela formadora na sua apreciação do trabalho escrito, que na verdade não reflectia o empenhamento e entusiasmo de Sílvia no seu papel de professora de matemática.

No acompanhamento em sala de aula, embora tivesse sentido inicialmente algum receio pela perspectiva da presença de uma pessoa exterior, desde cedo aceitou com naturalidade esta situação, já que a boa relação com a formadora a levou a considerar a presença desta não como a de alguém que está ali para detectar erros e fazer críticas mas como uma ajuda e colaboração no enriquecimento da sua prática. Sentia mesmo uma maior segurança pela presença da formadora, pois sabia que, se necessário, esta poderia fazer algum reparo ou sugestão breve que poderia contribuir para ultrapassar alguma situação menos conseguida; sentia como se as duas trabalhassem em equipa para o mesmo fim, que era efectivamente a melhoria do ensino e consequentemente das aprendizagens dos alunos.

Ao longo dos dois anos foi notória a evolução desta professora nos desafios propostos aos alunos, na valorização do cálculo mental, no questionamento e comunicação e, sobretudo, no domínio do pensamento algébrico, que era um tema que Sílvia não conhecia e que lhe foi proposto no início do segundo ano como tema de trabalho autónomo. Já durante o primeiro ano de formação tinha dado aos alunos oportunidades de reconhecerem, predizerem, continuarem e construírem padrões de repetição em configurações diferentes, compararem padrões explicitando as diferenças, identificarem o motivo de repetição e abstraírem dos objectos para identificarem a estrutura do padrão. Trabalharam também um padrão de crescimento mas sem conduzir a uma generalização algébrica. Tinha também iniciado os alunos no raciocínio funcional através de um trabalho com máquinas transformadoras em que as diversas operações aritméticas funcionavam como agentes de mudança, e que possibilitou também a aplicação de propriedades das operações como a existência de elemento neutro. Mas foi no segundo ano de formação que este trabalho se tornou mais notório. A professora reconheceu que o desempenho dos seus alunos do 2.º e 3.º ano neste tema foi muito positivo, tendo mesmo excedido as suas expectativas, já que os alunos conseguiram realizar o processo de generalização na exploração de padrões em sequências quer em linguagem corrente quer em linguagem simbólica; para esta última fase, que Sílvia decidiu arriscar explorar mesmo sem ter a noção clara de qual seria a reacção dos alunos, contribuiu uma estratégia de clarificação inventada pela professora em que explicou aos alunos que se a posição da figura tivesse um número qualquer, "um número que eu não sei", poderiam usar a letra N de "Número" e de "Não sei" para a representar. Os alunos aceitaram a sugestão e fizeram a generalização para N com a maior naturalidade. Foram observados, e também relatados por Sílvia, com grande pujança de pormenores, vários outros episódios de sala de aula em que é notável o seu envolvimento e o dos alunos em tarefas matemáticas ricas, caracterizadas pela compreensão de conceitos e estabelecimento de relações, pela argumentação e pela comunicação.

Em conclusão, Sílvia é uma professora que se caracteriza pela positiva, não lamentando o que não fazia no passado mas sentindo-se gratificada pelo que já consegue no presente, e sente-se altamente motivada e entusiasmada com a nova visão do ensino da matemática que foi adquirindo ao longo dos últimos anos, em que acredita fortemente, e que a fez, de forma inequívoca, ir modificando a sua postura e prática profissional.

Cansamo-nos de tudo menos de compreender.
Virgílio

Capítulo 11

DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Neste capítulo começa por fazer-se uma sistematização e discussão dos principais resultados relacionados com o percurso profissional dos quatro participantes durante a frequência do programa de formação contínua. Dá-se de seguida realce ao conhecimento matemático e didáctico evidenciado por estes professores, e em particular ao pensamento algébrico, analisado este com incidência especial no trabalho autónomo desenvolvido. Analisam-se na continuidade as perspectivas dos professores bem como as aprendizagens dos alunos. Na parte final retiram-se algumas conclusões e é feita uma reflexão global sobre o trabalho.

O problema no seu contexto

Este estudo decorreu no âmbito de um programa de formação contínua em matemática para professores do 1.º ciclo do ensino básico realizado em todo o país por iniciativa ministerial. A investigação tinha em vista estudar e compreender a possível influência do programa de formação contínua nos conhecimentos dos professores, na sua visão sobre a matemática enquanto disciplina escolar, nas suas práticas de sala de aula e no desenvolvimento de capacidades matemáticas dos alunos envolvidos. Concretamente, procurou dar-se resposta às seguintes questões:

- Em que medida o programa de formação contínua contribui para incrementar o conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de quatro professores do 1.º ciclo?
- Como se caracterizam as práticas lectivas dos professores do 1.º ciclo em estudo?
- Qual o impacto do referido programa

  - nas práticas destes professores, designadamente quanto às dinâmicas produzidas e quanto à natureza das tarefas seleccionadas?

  - nas perspectivas dos professores participantes sobre a matemática e o seu ensino e aprendizagem e como se articulam com as suas práticas?

  - nas atitudes e aprendizagens dos alunos envolvidos?

Para concretizar o estudo acompanharam-se de perto durante dois anos quatro professores que frequentaram este programa, com sede numa Escola Superior de Educação de um dos distritos do país. Dada a opção metodológica por um paradigma de investigação qualitativo e interpretativo, assumindo a forma de estudo de caso múltiplo, em que não se pretende uma generalização de resultados mas antes a compreensão e análise de algumas facetas e repercussões de um programa em larga escala, foi feita uma selecção criteriosa dos participantes baseada na variedade. Estes professores tinham percursos académicos e profissionais diferentes, idades variadas, experiências de ensino diferentes, prática profissional em meios diversos e diferentes funções, e ainda perspectivas sobre o ensino e aprendizagem da matemática e necessidades de formação diferenciadas, como se sintetiza na Tabela 10:

Tabela 10: *Síntese de características dos participantes*

	Ana	Guilherme	Leonor	Sílvia
Formação matemática inicial	11.º ano. Magistério Primário.	12.º ano. Curso de Professores do Ensino Básico – variante de Educação Física de uma ESE.	12.º ano. Magistério Primário.	12.º ano. Magistério Primário.
Relação com a matemática enquanto estudante	Nunca foi uma disciplina que a seduzisse.	Embora no ensino secundário as coisas se tenham complicado, gostava de matemática.	Sempre gostou de matemática.	“Relação de paixão e ódio” conforme os professores que tinha e os resultados escolares obtidos.

Tabela 10 (cont.): *Síntese de características dos participantes*

Formação complementar e auto-formação	Complemento de Formação com uma disciplina de Matemática.	_	Complemento de Formação sem Matemática. Cooperante da prática pedagógica numa ESE.	Complemento de Formação em Matemática e Língua Portuguesa.
Idade e experiência de ensino no 1.º ciclo	48 anos, 24 anos.	30 anos, 1 ano.	40 anos, 19 anos.	42 anos, 18 anos.
Programa de formação contínua	Iniciação.	Iniciação.	Continuação.	Iniciação.
Funções	Titular de turma.	Professor de apoio socioeducativo.	Titular de turma.	Titular de turma.
Turma 1.º ano de participação 2.º ano de participação	Um nível. Meio rural com características diversificadas.	Um nível. Meio rural com características diversificadas. Dois níveis. Meio rural.	Um nível. Meio suburbano. Um nível. Meio urbano.	Dois níveis. Meio rural.
Perspectivas sobre a matemática e o seu ensino e aprendizagem	Via a matemática como uma ciência sem relações com o dia-a-dia, perfeita, que os alunos tinham de assimilar. Por influência do curso de complemento de formação faz um esforço de adaptação mas considera que ainda não o consegue completamente.	Considera que a principal finalidade da aprendizagem da matemática é o cálculo, pelo seu valor prático na vida do dia-a-dia.	Antes de iniciar a formação já trabalhava de modo diferente do tradicional, numa perspectiva de desafios e resolução de problemas. Gosta e tem grande facilidade em construir os seus próprios materiais de apoio às aulas.	Defende que o papel mais importante da matemática enquanto disciplina escolar é desenvolver nos estudantes a capacidade de pensar e de organizar o seu pensamento, para a resolução de problemas futuros.
Necessidades de formação	Reconhecimento de que a formação inicial não a preparou para os novos desafios do ensino da matemática e corre o risco de ensinar como aprendeu.	Pouca experiência no ensino da matemática e reconhecimento de que a formação inicial não o preparou para ser professor de matemática.	Aprofundar alguns aspectos e ter acesso a algumas novidades para enriquecimento profissional. Avivar noções e reforçar a segurança científica.	Pôr em prática o que aprendeu no curso de complemento de formação. Tirar partido dos materiais. Quebrar o isolamento, não cair na rotina, trocar experiências com colegas.

Deste modo, embora haja alguns pontos comuns, pode considerar-se que foi cumprido o requisito metodológico de selecção criteriosa baseada na variedade de características destes quatro professores participantes. De facto, o professor Guilherme tem uma formação inicial distinta das outras participantes e, embora as três professoras tenham uma formação inicial idêntica, tiveram percursos de formação complementar e auto-formação diferenciados. As perspectivas sobre o ensino da matemática vão desde a mais tradicional, encarando a disciplina como um conjunto de regras que os alunos têm de assimilar – caso de Ana, ou a valorização quase exclusiva do cálculo – caso de Guilherme, até uma maior relevância do aspecto formativo – caso de Sílvia, ou uma perspectiva de uma disciplina desafiante e marcada pelo uso de materiais – caso de Leonor. As necessidades de formação vão desde um reconhecimento de impreparação na formação inicial aliada à diminuta experiência de ensino – Guilherme, até ao suprir de carências de formação – Ana e Sílvia, e à procura de aprofundamento e inovação – Leonor.

O percurso profissional ao longo do Programa

Procura-se nesta secção fazer uma síntese do percurso dos quatro professores ao longo do programa de formação nas suas várias vertentes: sessões conjuntas de formação, acompanhamento em sala de aula e reflexão e partilha de experiências.

As sessões de formação

O retrato e a dinâmica das sessões conjuntas de formação foi já descrita pormenorizadamente no Capítulo 6. Todos os quatro professores as frequentaram com assiduidade e empenho e utilizaram nas suas aulas as propostas nelas apresentadas, com as adaptações devidas e por vezes enriquecidas com a sua pesquisa e criatividade. Deram realce à brochura editada pela equipa de formadores como fonte importante de recursos e complemento de informação. Ana valoriza a tomada de consciência do valor didáctico das tarefas e dos materiais manipuláveis, considerando que o aprofundamento de conceitos possibilitado foi direccionado para a sua prática diária efectiva. Guilherme recolhe e organiza toda a informação possível dada a sua pouca experiência e necessidades de formação, valorizando a selecção das tarefas mais apropriadas para a exploração dos temas matemáticos, ao mesmo tempo que tem gosto pessoal na resolução de problemas. Leonor procura genericamente um aprofundamento científico e a diversificação de estratégias de ensino com vista à inovação e ao enriquecimento profissional. Sílvia valoriza a aprendizagem do uso de materiais para o enriquecimento da exploração de conceitos matemáticos e reconhece a vantagem de as propostas serem apresentadas nas sessões do mesmo modo que se espera que venha a trabalhar com os seus alunos.

Resumem-se na Tabela 11 a postura dos professores, as suas opiniões sobre o que valorizam nas sessões e a justificação da importância atribuída, bem como a utilização das propostas feitas nas sessões de formação na sua sala de aula.

Tabela 11: *As sessões de formação vistas pelos participantes*

	Ana	Guilherme	Leonor	Sílvia
Assiduidade e interesse	Participação muito empenhada.	Muito gosto e empenhamento.	Muito entusiasmo. Sugestões úteis aos colegas.	Empenho, vivacidade e entusiasmo.
O que mais valoriza nas sessões	Materiais manipuláveis. Compreensão do valor didáctico das tarefas.	Recolha e organização. Desenvolvimento curricular.	Aprofundamento de conceitos. Novas ideias e estratégias de ensino.	Uso de materiais manipuláveis na exploração dos conceitos.
Utilização das propostas na sala de aula	Sim, para além das aulas observadas. Adaptação à turma.	Sim, para além das aulas observadas. Pesquisa complementar.	Sim, para além das aulas observadas. Criatividade na adaptação à turma.	Sim, para além das aulas observadas. Pesquisa complementar.
Justificação da importância atribuída	Aprofundamento de ideias e conceitos matemáticos virados para a sua prática.	Pouca experiência. Necessidade de formação.	Abertura de horizontes. Inovação.	Aplicação directa daquilo que aprende e do modo como aprende.

A ideia subjacente à simultaneidade das acções de desenvolvimento do conhecimento matemático e do desenvolvimento do ensino da matemática valorizada por estes professores é consistente com Ma (1999) quando recomenda que o desenvolvimento do conhecimento dos professores não deve preceder necessariamente a promoção da aprendizagem dos alunos, mas que devem ocorrer simultaneamente para que possam apoiar-se mutuamente. Além disso, a oportunidade para melhorar o ensino fornece a motivação para o fazer e o modo como é desenvolvido o conhecimento matemático para ensinar deve ser, como o foi, também objecto de discussão.

O acompanhamento em sala de aula

Quanto a esta componente do programa de formação há duas perspectivas algo distintas, provocadas por interpretações diferentes, uma de Leonor e outra partilhada de forma semelhante pelos outros três professores. Leonor considera positivo este acompanhamento pois pode ser uma ajuda e é o aspecto mais distintivo em relação a outras formações. No entanto, coloca, sobretudo inicialmente, algumas reservas em relação à presença de uma pessoa exterior pois entende que existe uma grande exposição do professor observado que não está isenta de riscos. É de notar que estas opiniões foram recolhidas em pleno período de lançamento das novas disposições do Ministério da Educação sobre avaliação do desempenho dos professores. Leonor refere que, em conversa com colegas, faziam uma associação entre essas disposições ministeriais e o programa de formação contínua. Mas gradualmente foram-se apercebendo de que os dois processos eram independentes e que a presença da formadora na sala de aula não tinha um cariz de inspecção mas essencialmente de colaboração. Ana considera que é o acompanhamento que torna esta formação diferente das outras em que tem participado. Entende que nas formações "de cadeira", mesmo que sejam boas, o que se ouve, mesmo que interessante e passível de aplicação posterior, muitas vezes acaba por esquecer. Nesta modalidade a pessoa tem mesmo que aplicar, "quer queira quer não", já que tem as aulas observadas, e Ana considera que este esforço constituiu uma motivação para fazer mais e melhor, e foi justamente o que impulsionou a mudança das suas práticas. E, no fim do processo, ao seriar a importância das várias componentes do programa de formação, Ana coloca em primeiro lugar o acompanhamento em sala de aula, pois continua a achar que é essa dimensão que marca a diferença para as outras formações. Guilherme exprime uma ideia muito semelhante quando afirma que o acompanhamento "obriga" o professor a aplicar realmente na prática o que recebe na formação, não se limitando a ouvir, e deste modo influencia positivamente a sua prática. Sílvia realça a importância de este acompanhamento em sala de aula não ter como fim último a avaliação do professor para efeitos de progressão na carreira mas sim o aspecto formativo e a colaboração com vista à melhoria do ensino. Considera ainda fulcrais as achegas e sugestões que lhe são dadas pela formadora no momento oportuno na aula.

Cabe aqui também referência ao papel da formadora e ao modo como foi interpretado pelos diversos intervenientes. A formadora e investigadora assumiu o papel de observadora participante, não se limitando, nas aulas, a observar e tomar notas mas circulando pela sala e intervindo de forma natural para dar apoio aos alunos sempre que necessário e mesmo, por vezes, dando ao professor sugestões de questões a colocar, e ainda de pequenos acrescentos ou alterações na dinâmica da aula. Assim, procurou ser uma colaboradora e também que a sua intervenção fosse um desafio quer para o professor quer para os alunos. Os participantes de modo geral confessaram algum receio inicial pela presença de uma pessoa exterior. Ana regista alguma ansiedade no início da aula que acaba por se diluir. Encara a formadora como uma colaboradora e valoriza a boa relação estabelecida entre a formadora e os alunos. Guilherme não demonstra essa ansiedade, por estar mais próximo da sua prática pedagógica enquanto estudante, e sente-se à-vontade com a formadora, aceitando-a como pessoa mais velha e experiente com quem podia conversar esclarecendo e problematizando algumas questões e também como incentivo e motivação para o trabalho. Refere que a presença da formadora foi sempre bem acolhida pelos alunos. Leonor sempre teve um relacionamento afável com a formadora e esta foi sempre muito bem recebida pelos alunos. No entanto, não houve tanta proximidade como com os outros participantes, e um dos motivos que podem explicar esta situação é o facto de, contrariamente aos outros três professores, esta professora ter tido uma formadora diferente no primeiro ano de frequência do programa, o que causou alguma instabilidade pela necessidade da adaptação a um estilo diferente. Este facto coloca a questão da importância da continuidade do formador durante os dois anos. Outro factor é a circunstância de Leonor estar já fora da formação no seu segundo ano de colaboração. Sílvia confessa que se sentiu algo assustada por ter na sala alguém exterior que poderia ter a intenção de detectar falhas no desempenho. Reconhece contudo, desde o meio do primeiro ano, que essa impressão se desvaneceu, mostrando o seu agrado por ter tido a possibilidade de receber, no momento, algumas achegas e sugestões, e realçando no papel da formadora os aspectos de motivação, sensibilização e colaboração. Afirma também que as sessões de acompanhamento eram sempre muito desejadas pelos alunos.

Sintetizam-se na Tabela 12 as perspectivas dos participantes em relação ao acompanhamento em sala de aula, atendendo também ao aspecto da relação com a formadora.

Tabela 12: *O acompanhamento em sala de aula visto pelos participantes*

	Ana	Guilherme	Leonor	Sílvia
Perspectivas	É o que torna esta formação diferente das outras. O ter de aplicar "quer quisesse quer não" fê-la ultrapassar a inércia e foi o verdadeiro factor de mudança.	"Obriga" o professor a aplicar na prática as propostas da formação, influenciando positivamente a prática.	Receio inicial da exposição e riscos inerentes, que se diluiu com o tempo. Aspecto distintivo em relação às outras formações. Ajuda.	Valoriza o aspecto formativo mais do que avaliativo, traduzido na participação com achegas e sugestões no momento oportuno.
Presença da formadora	Ansiedade no início que desapareceu. Parceria, colaboração e apoio. Muito querida pelos alunos.	Apoio no esclarecimento, incentivo, motivação e reflexão. Acolhida com entusiasmo pelos alunos.	Colaboração. Menor proximidade em comparação com os outros. Bem recebida pelos alunos.	Motivação, sensibilização e colaboração. Dá segurança. Muito desejada pelos alunos.

A reflexão e a partilha de experiências

Realçam-se neste ponto as opiniões dos professores intervenientes sobre a reflexão proporcionada pelo programa, englobando os aspectos pessoais e individuais com a formadora e a partilha em grupo na sessão conjunta. Incluem-se aqui também, como se mostra na Tabela 13, as opiniões relativas à elaboração do portefólio, já que se pretende que este seja mais um momento de reflexão pessoal.

Tabela 13: *A reflexão e a partilha de experiências vistas pelos participantes*

	Ana	Guilherme	Leonor	Sílvia
Reflexão com a formadora no fim da aula	Importante quer para ajustar o desenrolar da tarefa em aula posterior quer para intervenções futuras.	Pode aprender com as indicações da formadora superando carências de formação e inseguranças.	Troca de impressões informal. A professora vai-se interrogando autonomamente sobre a sua prática e sobre o valor daquilo que faz.	Confronto pessoal com os seus medos, incertezas e dúvidas e uma oportunidade para as esclarecer e ultrapassar.
Reflexão com o grupo na sessão conjunta de formação	A partilha de experiências permite a troca de ideias útil na prática.	É uma mais- valia ouvir os colegas no grupo de formação e beneficiar da sua experiência.	As trocas de impressões e de experiências quer com os colegas quer com a formadora são enriquecedoras.	Focam-se pormenores importantes na troca de sugestões com pessoas com experiências e práticas diferentes,
Apreciação global	A reflexão sobre a sua prática, concreta, daquele dia, acaba por valorizar a própria prática.	Aponta a reflexão como fonte de conhecimento. Elege este aspecto como o principal da formação.	Valoriza as trocas de impressões no grupo mas considera-as, por vezes, um pouco superficiais.	Fundamental para o reconhecimento e superação de pontos fracos. É o culminar de todo o processo de formação.
O portefólio	Falta de gosto na sua elaboração. Reconhece que pode levar à reflexão sobre a acção. Discorda que seja instrumento de avaliação.	Gostou de o fazer e reconhece-lhe utilidade. Oportunidade para reflectir sobre as suas práticas.	Não consegue passar para um papel a sua vivência das aulas. Discorda de a avaliação se centrar no portefólio.	Falta de gosto e dificuldade em exprimir-se por escrito. É de opinião que o importante é aquilo que faz e não o que está no papel.

Ana, Guilherme e Sílvia são unânimes em valorizar o papel da reflexão como propiciadora de ajustes e superação de pontos fracos. Guilherme considera-a ainda como fonte de conhecimento. Ana, em particular, refere que também reflectiu com os seus alunos sobre as aulas de matemática, o seu desempenho nas aulas e as suas impressões relativamente a esta área em vários momentos diferentes ao longo destes dois anos de formação. Já Leonor não dá destaque especial a este aspecto da reflexão.

A partilha de experiências no grupo de formação é considerada muito importante por todos os professores intervenientes. Também proporcionou que houvesse trabalho conjunto e troca de recursos e materiais entre professores da mesma escola e mesmo de escolas diferentes. Todos reconhecem a necessidade de trabalhar com colegas, sair do isolamento, discutir ideias, partilhar abordagens didácticas.

A questão da elaboração do portefólio, sobretudo como instrumento da avaliação, é polémica e é contestada de forma veemente por Leonor, mas também por Ana e Sílvia. Guilherme foi o professor que reagiu melhor a este aspecto, tendo tido gosto na sua elaboração e tendo-o considerado fonte de reflexão. Nos casos de Leonor e Sílvia, em particular, não se verificou congruência entre o seu desempenho na sala de aula e o seu portefólio, que não espelhava essa mesma realidade, fazendo crer um desempenho muito inferior ao que foi verificado através da observação.

Algumas ilações

Do exposto pensa-se poder concluir que, pese embora a importância e o papel fundamental do trabalho realizado nas sessões conjuntas de formação, quer em termos de propostas de trabalho ricas e diversificadas para a planificação de aulas quer em termos de reflexão e partilha de experiências, o acompanhamento em sala de aula é a vertente mais inovadora deste programa e aparentemente condição da sua eficácia. Todos os participantes reconhecem este aspecto como distintivo em relação a outras formações que frequentaram anteriormente, confirmando o seu valor e importância na mudança das práticas para o desenvolvimento profissional dos docentes e para a melhoria das aprendizagens matemáticas dos alunos. A formadora reflecte também, no diário de campo, sobre as diferenças entre esta formação e um curso de formação complementar, realçando a importância do acompanhamento em sala de aula e de este ser pessoal e directo, isto é, realizado com aquela pessoa, face a uma necessidade concreta, no momento oportuno:

> Eu dantes achava que a frequência dum curso de formação complementar produzia nos professores uma mudança nas práticas e verifiquei este ano que não é assim – eles gostam mas não aplicam. Ficaram sensibilizados na altura mas tudo caiu com o tempo. As próprias sessões de formação deste programa, embora com mais impacto, também não são perfeitas – porque são para um grupo. Aqui o professor tem mesmo de aplicar. Além disso, na aula, a sugestão é na hora certa e *in loco*. Tem assim um impacto muito maior porque é personalizado e directo. (DC, 17/04/2007)

Estes resultados são congruentes com Ball et al. (2008) quando recomendam que seja analisado o discurso do professor na sala de aula, isto é, em situação de prática, de modo a proporcionar a aprendizagem de modos de ensinar.

Paralelamente, no que se refere ao acompanhamento em sala de aula, os participantes salientam no papel da formadora os factores de motivação, sensibilização, apoio e colaboração. Estes aspectos vão de encontro à supervisão clínica definida em Glickman et al. (1998): é sistemática, cria uma tensão produtiva entre as intenções e a realidade e exige uma relação de confiança mútua entre formador e formando.

O conhecimento matemático e didáctico na prática de sala de aula

Nesta secção discutem-se os possíveis reflexos do programa de formação contínua no conhecimento matemático e didáctico em situação de sala de aula dos professores envolvidos. Começa-se por enumerar características genéricas da prática de sala de aula de cada um dos participantes durante a frequência do programa. Faz-se de seguida, para cada um dos professores, uma súmula do seu trabalho autónomo, que foca em particular a sua adesão ao tema novo que lhes foi proposto do pensamento algébrico, por forma a iluminar a evolução do conhecimento matemático e didáctico destes professores. Por fim, faz-se uma síntese dos aspectos mais notórios da evolução do conhecimento e crescimento profissional dos participantes.

A prática de sala de aula

A Tabela 14 sintetiza algumas características da prática ligadas ao enquadramento e ambiente da sala de aula, às tarefas e recursos utilizados e aos papéis do professor e dos alunos.

Tabela 14: *A prática de sala de aula*

Ana	Guilherme	Leonor	Sílvia
Disposição em U. Mesa ao centro com os alunos com maior necessidade de apoio.	No 1.° ano, disposição tradicional. No 2.° ano, disposição em grupos.	Disposição variável conforme o tipo de actividade previsto.	Disposição variável conforme o tipo de actividade previsto.
Tarefas de tipo predominantemente exploratório, baseadas nas sessões e adaptadas. Utiliza adequadamente materiais.	Tarefas de tipo predominantemente exploratório, baseadas nas sessões, completadas com pesquisa e criatividade. Uso de materiais motivadores.	Tarefas de tipo predominantemente exploratório, baseadas frequentemente nas sessões, enriquecidas com criatividade. Recursos inventados e construídos.	Tarefas de tipo predominantemente exploratório, baseadas nas sessões, com elevado grau de desafio. Usa adequadamente materiais.
Contextualização das tarefas. Interdisciplinaridade. Bom questionamento. Preocupação crescente com a autonomia e comunicação. Aumento gradual do grau de desafio das tarefas.	Esforço suplementar por não ser o titular da turma. Discurso bem humorado. Não dá muitas indicações no início da tarefa, dando pistas em caso de impasse. Sínteses frequentes. Incentivo à comunicação.	Facilidade de expressão e comunicação altamente motivadora. Questionamento eficaz. Deixa os alunos fazer as suas descobertas. Eficiente na gestão do tempo. Usa metáforas que facilitam a compreensão.	Tarefas com alto grau de desafio. Bom ritmo de trabalho. Questionamento pensando de antemão de modo a activar o pensamento matemático dos alunos. Sínteses finais.
Os alunos mostram-se em todas as aulas muito interessados e motivados para o trabalho e para as surpresas que lhes estão reservadas. Trabalham com empenho e entusiasmo. Revelam autonomia crescente.	No 1.° ano os alunos estão interessados e participam com empenho e autonomia crescente. No 2.° ano, embora haja alguns alunos problemáticos, a turma mostra-se de modo geral interessada e entusiasmada com o trabalho.	Sempre entusiasmados, primeiro com a história contada e depois com as descobertas que são conduzidos a fazer. Todos querem participar.	No início da formação é uma turma medianamente participativa, notando-se um progressivo interesse e entusiasmo pelo trabalho em matemática. Os alunos gostam dos desafios que lhes são propostos e envolvem-se de forma persistente e concentrada.

Como pode verificar-se, os professores intervenientes seleccionam de modo geral as tarefas a desenvolver na sala de aula com base nas propostas feitas nas sessões de formação, embora haja uma maior autonomia nesse trabalho no caso de Leonor. Estas tarefas são diversificadas mas de tipo predominantemente exploratório, podendo, em muitos casos, ser resolvidas de várias formas diferentes de modo a proporcionarem a partilha de raciocínios, suscitando múltiplas representações e exigindo dos alunos a interpretação, o estabelecimento de conjecturas, a generalização e a justificação. Todos utilizam, quando adequado, materiais manipuláveis comerciais ou construídos por si ou pelos alunos. Quanto ao papel do professor, no caso de Leonor e Ana, particularmente, há uma preocupação em enquadrar as tarefas em histórias e enredos seleccionados ou inventados no sentido de motivar o trabalho e promover a interdisciplinaridade. Gradualmente os alunos envolvidos vão ganhando uma maior autonomia no trabalho, sendo capazes de fazer as suas próprias descobertas com a orientação inicial do professor. Verifica-se uma preocupação com o questionamento de modo a levar os alunos a relacionar ideias e conceitos e aprofundar a compreensão, especialmente em Sílvia. Todos se preocupam com a explicitação de raciocínios e descobertas de cada aluno e a sua exposição à turma, com o consequente desenvolvimento da capacidade de comunicação. Leonor e Sílvia são particularmente eficientes na gestão do tempo e na colocação de desafios exigentes. Em Ana nota-se uma tendência gradual para o aumento do grau de desafio das tarefas propostas. Guilherme e Sílvia, em especial, preocupam-se com a elaboração de sínteses do trabalho realizado. Os alunos são em todos os casos receptivos às propostas feitas, envolvendo-se em actividade entusiasmada e empenhada. Nota-se, particularmente nas turmas de Ana e Sílvia, uma forte progressão nesse sentido, fazendo os alunos um trabalho gradualmente mais sério, empenhado e persistente no sentido do desenvolvimento da sua competência matemática. De notar que são estas duas professoras que mantêm a mesma turma ao longo dos dois anos de formação.

Como se referiu, as tarefas utilizadas foram, na sua maioria, provenientes das propostas feitas pela formadora nas sessões conjuntas de formação. Houve a preocupação, por parte da equipa de formação, da sua selecção criteriosa de modo a constituírem experiências ricas de construção da aprendizagem matemática pelos alunos. Poderá questionar-se se, nesta passagem para a sala de aula, houve empobrecimento do poder matemático das tarefas (Palhares et al. 2009). De facto, tal não foi genericamente observado, e um dos factores que pode ter contribuído para esta preservação é o formato das sessões conjuntas obedecer ao princípio do isomorfismo, em que os professores deveriam explorar as tarefas apresentadas do mesmo modo que se esperava que viessem a trabalhá-las com os seus alunos, utilizando, por exemplo, os mesmos materiais manipuláveis, aprofundando as questões matemáticas mais elementares envolvidas e organizando-se da forma considerada melhor para os diferentes tipos de tarefas, discutindo naturalmente essa organização. Também a formadora procurava actuar como se esperava que os formandos actuassem como professores, permitindo a exploração autónoma das tarefas, tomando como base que, se estas eram de cunho exploratório e muitas vezes problemas e investigações, não era de esperar que as respostas certas aparecessem instantaneamente, sendo necessário tempo para o raciocínio e a reflexão. No fim, a síntese em grande grupo permitia recolher e apresentar as várias estratégias utilizadas, refinando-as e seleccionando justificadamente as melhores por mais elegantes ou eficazes. Era também nesse contexto que eram explorados os conceitos matemáticos envolvidos nas tarefas, que deviam ser desocultados, isto é, tornados evidentes ao professor, e relacionados com outros temas matemáticos.

Este trabalho desenvolvido nas sessões de formação, explicitando em detalhe e concretizando acções por vezes sequenciais do professor na sala de aula, vai ao encontro dos trabalhos mais recentes de Ball (2009) quando aponta que o ensino da matemática é um trabalho intrincado, não natural, que precisa de ser aprendido e, como tal, ensinado. Sendo um trabalho de alta precisão, o estilo e as preferências individuais não podem sobrepor-se ao reconhecimento da sua natureza profissional.

Por último, é de referir que as fichas de trabalho utilizadas por estes professores, quando existentes, foram colocadas em anexo. Estas foram, em boa medida, inspiradas nos materiais produzidos pela equipa de formação e trabalhados nas sessões conjuntas de formação. Contudo, a simples análise dessas fichas de trabalho, sem a descrição dos episódios de sala de aula a que deram origem, dá uma perspectiva muito redutora do trabalho realizado. De facto, com o seu conhecimento da observação das aulas e ao analisar essas fichas de trabalho por si sós, a investigadora apercebe-se com surpresa que a melhor parte da aula não está ali. As fichas são apenas a parte visível do *iceberg*, que não evidencia e não permite apreciar toda a riqueza do trabalho desenvolvido.

O trabalho autónomo e o desenvolvimento do pensamento algébrico

O trabalho autónomo foi pedido a cada professor durante o seu segundo ano de formação e as respectivas linhas fundamentais estão discriminadas no Capítulo 6.

Em cada caso, apresentou-se no capítulo respectivo evidência do desenvolvimento do pensamento algébrico à luz do percurso de *algebrização* da experiência matemática dos alunos recomendado por Blanton & Kaput (2003), descrito pormenorizadamente no Capítulo 3, e concretizado pela categorização de formas de pensamento algébrico de Blanton & Kaput (2005).

Escolheu-se em particular para esta síntese o trabalho autónomo, sem prejuízo do restante trabalho de cada professor ao longo destes dois anos, pois julga-se que aquele, pelas suas características, se aproxima do estilo de ensino de cada um, dos seus gostos e interesses, daquilo que reputam de fundamental na sua prática lectiva. Por outro lado, foi um trabalho sujeito a uma reflexão e apresentação mais cuidada. Por estas características tornou-se assim um trabalho de referência de cada professor, que se pensa poder exprimir de forma significativa o seu sentir na profissão, em particular no ensino da matemática, através das abordagens, tarefas e recursos escolhidos e implementados. Deste modo, pode iluminar melhor a evolução do conhecimento matemático e didáctico de cada professor, pela interpretação por cada um do conteúdo das sessões conjuntas de formação e a sua implementação na sala de aula, com as adaptações pessoais que entenderam fazer. Em todos os participantes se revelaram várias formas de pensamento algébrico trabalhadas com os seus alunos. No entanto, a opção por uma amostra do trabalho realizado sobre este tema no âmbito de todo um ano acabou por limitar a descrição de formas de pensamento algébrico que, não obstante, ocorreram e foram observadas como pode ver-se na descrição das aulas nos capítulos dedicados a cada um dos participantes. Fez-se esta opção de escolha de uma aula por limitações de espaço e também por se pensar que retrata mais fielmente as preferências e interpretações pessoais de cada participante no que diz respeito a este tópico particular do pensamento algébrico, que era novo para todos eles.

Contudo, e apesar das razões aduzidas, julga-se necessário fazer uma breve referência a três tipos de tarefas desenvolvidas noutras aulas e que se verificou terem fortes potencialidades no desenvolvimento do pensamento algébrico. As primeiras são as tarefas de contagens visuais usadas por Ana e Sílvia e descritas nos capítulos dedicados a estas professoras. De facto, verificou-se que estas tarefas, sugeridas nas sessões conjuntas de formação, podem ajudar os alunos a descobrir outros modos de contagem diferentes dos habituais, ao agrupar números de modo a tornar os cálculos mais simples e, ao mesmo tempo, descobrirem padrões e simetrias para simplificar as situações. Estas tarefas permitem ainda trabalhar as expressões numéricas de modo compreensivo e reconhecer a equivalência de expressões diferentes, dando sentido às operações e suas relações e propriedades (Vale et al., 2009). Os alunos foram incentivados a escrever a expressão numérica correspondente a cada contagem efectuada acompanhada com um desenho traduzindo esse pensamento. Ora, este uso das expressões numéricas é uma componente importante do pensamento relacional, salientando-se algumas ordens de razões: (a) por consideração das expressões aritméticas dum ponto de vista estrutural; (b) pela concepção das expressões como totalidades susceptíveis de serem comparadas; (c) pelo uso de representação horizontal; e (d) por favorecer a exploração do sinal de igualdade como uma representação de uma relação não só estática entre duas expressões como também a interpretação bi-direccional (Molina, 2007). Familiarizam assim os alunos desde cedo com o uso do sinal de igual, não como directiva para escrever a resposta à direita do cálculo mas como relação entre duas quantidades (Kieran, 2004; Schifter at al., 2008).

As segundas são tarefas de estabelecimento de conjecturas acerca de números pares e ímpares usadas por Ana e Sílvia. De facto, algumas das conjecturas não são inteiramente óbvias para as crianças e o seu estabelecimento envolve alguma exploração. Por outro lado, estas conjecturas podem ser justificadas a vários níveis diferentes (Carpenter et al., 2003). São portanto uma boa oportunidade para iniciar uma familiarização dos alunos com o que significa justificar uma conjectura.

As terceiras, finalmente, são tarefas de iniciação ao raciocínio funcional usadas por Ana, Guilherme e Sílvia. Tradicionalmente não se dava valor às relações e transformações como objecto de estudo no 1.º ciclo. Mas o poder da matemática situa-se justamente nas relações e transformações que fazem surgir os padrões e generalizações. O raciocínio funcional, actuando numa quantidade variável na sua relação com outra quantidade variável, é importante para estudos futuros na compreensão das funções, mas também ajuda os alunos a explorar a aritmética como mudança, a fazer conexões entre as várias operações, e a proporcionar oportunidades de conjecturar e justificar desde muito novos (Warren & Cooper, 2005). É de realçar que nas tarefas exploradas por estes professores os valores de entrada surgiam aleatoriamente de modo a evitar um pensamento sequencial, muito mais simples, e promover o pensamento relacional, tal como preconizam Carraher & Schliemann (2007).

É de realçar também que, globalmente, todos os participantes fizeram uma abordagem ao pensamento algébrico através da exploração do campo numérico, desenvolvendo genericamente o sentido do número com o apoio da descoberta, partilha e ensino explícito de estratégias de cálculo mental. Este foi valorizado e trabalhado de forma intensiva por todos os professores, tanto *de per se* como no contexto de situações problemáticas. Contudo, esta abordagem não tinha como fim último o trabalho com números mas procurava sempre que os alunos abstraíssem das situações concretas para uma grande atenção à estrutura numérica implícita, na descoberta de padrões e na formulação de conjecturas conduzindo a processos de generalização.

Feitos estes reparos adicionais, procura agora fazer-se uma sistematização do trabalho autónomo realizado por estes professores ao nível do pensamento algébrico, e mesmo correndo o risco de que esta implique uma simplificação redutora da riqueza do trabalho desenvolvido, pode registar-se uma incidência especial num aspecto do campo numérico em três destes professores, provocado eventualmente pelo nível de escolaridade e pelas características dos alunos com quem trabalhavam mas a que não são certamente alheias preferências e circunstâncias pessoais:

- Ana dedicou-se mais ao desenvolvimento do sentido do número, salientando a generalização de propriedades de números pares e ímpares, múltiplos de 5, etc.;

- Leonor trabalhou de forma mais intensiva o cálculo mental, valorizando a generalização de resultados para a soma e diferença de um número inteiro de dezenas, de 11, de 9, etc.;

- Sílvia centrou a sua exploração na descoberta de padrões em sequências figurativas, realçando processos de generalização aritmética e algébrica com apoio da visualização;

- Guilherme trabalhou de forma integrada e em paralelo todos estes aspectos, sem reforçar nenhum deles em particular.

De facto, pelo conhecimento que tem dos professores, a investigadora, para além de outros aspectos mais objectivos, conjectura as seguintes razões de ordem pessoal: Ana procurou ultrapassar e refinar a visão tradicionalista que tinha do ensino em contextos numéricos; Guilherme resolveu aplicar tudo a que tinha tido acesso e que organizou com todo o cuidado, não tendo feito nenhuma escolha específica; Leonor decidiu-se por aquilo que foi para ela uma das grandes novidades da formação, a valorização do cálculo mental; e Sílvia foi a mais radical, a que arriscou mais em termos de inovação, chegando ao uso de simbolismo algébrico. A incidência num destes aspectos traduz a interpretação pessoal do professor da solicitação que lhe foi efectuada pela formadora e investigadora para preparar autonomamente uma aula incidindo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico. E, de facto, todos os aspectos referidos, como se vê pela caracterização adaptada de Blanton & Kaput (2005) e pela revisão da literatura efectuada (Mason, 1996; Kieran, 2004; Cai & Moyer, 2008; Carraher & Schliemann, 2007; Usiskin, 1999; Schliemann et al., 2007; Warren & Cooper, 2005; Warren & Cooper, 2008; Jacobs et al., 2007; Fujii & Stephens, 2001, 2008; Rivera, 2006; Radford, 2006; Radford et al., 2007; Schifter et al., 2008) estão em estreita relação com o desenvolvimento de formas de pensamento algébrico.

A exploração de relações entre números inteiros conduzida por Ana, designadamente nas sequências dos algarismos das unidades em contagens por saltos, promove o sentido do número, desenvolvendo uma boa intuição acerca dos números e a sua visualização em vários contextos (Howden, 1989; McIntosh et al., 1992). Simultaneamente, com estas acções, ultrapassa o trabalho aritmético tradicional, mecânico e rotineiro, descobrindo padrões e relações na estrutura numérica, nomeadamente no uso intuitivo das propriedades das operações e na formulação de conjecturas e generalizações sobre a soma de pares e/ou ímpares, que conduzem a uma visão generalizada da aritmética (Kaput, 1998) e consequentemente à emergência do pensamento algébrico.

Guilherme, por seu lado, desenvolve um trabalho que conduz à descoberta e exploração de padrões numéricos na tabela dos cem, utilizando estratégias de cálculo mental de forma integrada para poder chegar às descobertas pretendidas, particularmente de padrões de crescimento (e.g. soma das sucessivas linhas ou colunas), e desenvolvendo concomitantemente o sentido do número no ensino explícito de estratégias de cálculo que envolvem raciocínio e utilização de propriedades das operações (Rivera, 2006). O segundo conjunto de tarefas envolve um maior grau de abstracção na análise de relações, já não propriamente entre números concretos mas entre células que funcionam como representantes de qualquer número, promovendo assim o processo de generalização da aritmética na detecção da estrutura (Kieran, 2004).

A exploração de relações entre números inteiros e propriedades das operações que Leonor orienta, conduzindo à descoberta de estratégias de cálculo mental que são comunicadas aos colegas (Threlfall, 2002), ou ao seu ensino explícito nalguns casos (Reys et al., 2007) possibilita que os alunos se envolvam de forma flexível com os números e operações e descubram padrões e propriedades inerentes à sequência de contagem (McIntosh et al., 1992), proporcionando do mesmo modo a iniciação ao pensamento algébrico. De facto, quando um aluno descobre que adicionar 9 a um número qualquer é o mesmo que adicionar-lhe 10 e subtrair 1 está a produzir generalizações sobre a estrutura numérica, gerando uma ponte entre a aritmética e a álgebra (Fujii & Stephens, 2008; Schifter et al., 2008).

A identificação e descrição de padrões de crescimento em sequências numéricas e figurativas, que inclui construção e observação dos primeiros termos usando eventualmente materiais manipuláveis, mais explorada por Sílvia, está em ligação directa com o processo de generalização distante ou algébrica (Radford, 2006) que conduz ao pensamento funcional. Para além da descrição verbal das relações funcionais trabalhadas, esta professora experimentou ainda, pela primeira vez na sua carreira e de forma muito positiva, a representação simbólica dessas mesmas relações funcionais, típica do ensino da álgebra em anos de escolaridade muito mais avançados – o uso da letra N como variável para representar *um número qualquer que eu não sei*, na imagem que criou para os alunos para a ordem desconhecida de uma qualquer figura da sequência, e a consequente expressão em função de N da relação encontrada. Apesar de esta não ser uma questão fulcral, já que não surge como objectivo em qualquer dos Programas de Matemática (o que está ainda em vigor e o novo) e por outro lado o pensamento algébrico poder ser desenvolvido sem o recurso ao simbolismo da álgebra (Kieran, 2004), o certo é que se verificou que os alunos encararam a introdução do conceito de variável na forma simbólica dum modo natural – detectou-se que a fase difícil é a da generalização e não a da sua notação simbólica – e fizeram a sua apropriação em casos que não exigissem ferramentas matemáticas para além do seu conhecimento. Estes resultados são consistentes com Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest (2006) e Schliemann, Carraher & Brizuela (2007).

Uma operação reflexiva sobre o desenvolvimento deste trabalho conduziu à elaboração de um esquema, apresentado na Figura 77, que procura, por um lado, ilustrar a relação dialógica detectada entre o sentido do número e o cálculo mental. Na verdade, quanto maior é o sentido do número que o aluno possui, traduzido pela compreensão das relações e propriedades dos números, mais estratégias de cálculo mental pode descobrir e, reciprocamente, o desenvolvimento, espontâneo ou dirigido, de estratégias de cálculo mental produz na mente da criança uma maior flexibilidade na forma de lidar com os números e as operações, ou seja, um maior sentido do número. Por outro lado, o esquema pretende relacionar as vias complementares para o pensamento algébrico detectadas neste trabalho, designadamente:

- o sentido do número;
- o cálculo mental;
- a descoberta de padrões;
- a generalização.

O esquema ajusta-se perfeitamente para representar a actuação de Ana, Guilherme e Leonor no seu trabalho autónomo. De facto, estes professores partiram de explorações numéricas e do cálculo mental nos quais incentivaram a descoberta de padrões e deram uma dimensão de generalidade. No caso de Sílvia, verifica-se que esta professora, embora tendo anteriormente trabalhado com insistência o sentido do número e o cálculo mental, já partiu no trabalho autónomo dum patamar diferente, focando-se não na 'periferia' mas em aspectos centrais de descoberta de padrões e generalização.

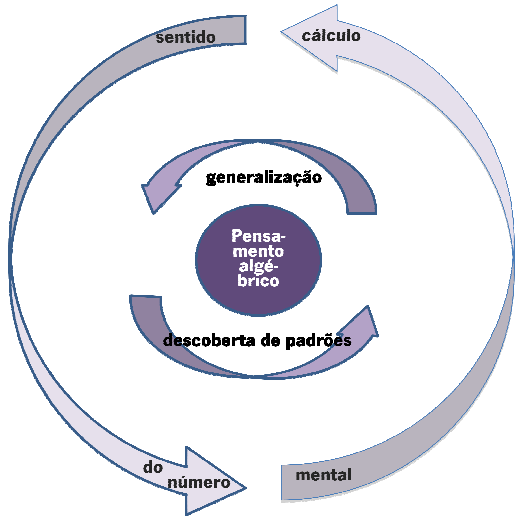


Figura 77. Relacionamento das vias complementares para o pensamento algébrico

É de salientar que o sentido do número e o cálculo mental mantêm esta relação dialógica, alimentando-se mutuamente, mas, por si sós, podem não constituir uma via para o pensamento algébrico, mantendo-se em circuito, a gravitar numa órbita paralela. É o aspecto crucial da explicitação e concretização pelo professor de processos de descoberta de padrões numéricos e/ou figurativos e consequente generalização, que emana e faz uso do sentido do número e do cálculo mental, que atinge verdadeiramente o cerne do pensamento algébrico.

Em síntese

A prática de sala de aula destes professores revelou acções que são função do seu conhecimento matemático e didáctico. Com base nos trabalhos de Schoenfeld (2008) e Ball et al. (2008), que procuram dar visibilidade a facetas do papel e discurso do professor em situação de prática, procurou-se sintetizar num esquema funcional, apresentado na Tabela 15, aspectos importantes da prática de sala de aula denotando o conhecimento matemático e didáctico do professor. Na primeira linha da tabela estabelecem-se acções gerais e na segunda discriminam-se aspectos mais específicos dessas acções.

Tabela 15: *Acções dos professores na sala de aula que são função do seu conhecimento matemático e didáctico*

Contextualiza e fundamenta o tópico matemático em estudo.	Convida a turma a pronunciar-se sobre o tópico.	Orienta as respostas dos alunos para a compreensão e interpretação de conjecturas.	Gere a avaliação de afirmações.
Usa contextos motivadores. Usa terminologia matemática.	Suscita o aparecimento de questões e conjecturas. Usa formas de representação adequadas.	Fomenta a comunicação com o uso de linguagem adequada.	Promove a tendência para a justificação. Faz sínteses, esclarecendo, se necessário, aspectos particulares da questão à turma.

Todos os participantes neste estudo manifestaram estas acções na sua prática, tal como foi descrito anteriormente nos capítulos dedicados a cada um, ainda que uns o possam ter feito de forma mais sistemática e experiente do que outros. As práticas observadas alinharam-se com o objectivo de proporcionar aos alunos uma melhor compreensão da matemática e compreender o seu pensamento. De facto, todos estes professores foram ao longo do tempo de observação e formação adquirindo ou aprofundando competência nos seguintes aspectos-chave: (a) usam linguagem matemática correcta e contextualizam as propostas de trabalho; (b) interagem com os alunos e promovem a interacção aluno-aluno; (c) pedem sistematicamente aos alunos que expliquem as suas opções de trabalho e as suas estratégias de resolução; (d) disponibilizam, quando necessário, um "andaime" (Bruner, 1986) baseado, designadamente, em materiais manipuláveis e no questionamento dirigido de modo a levar os alunos à descoberta de estratégias mais sofisticadas; e (e) promovem, em várias situações, a justificação das conjecturas feitas. Pensa-se deste modo poder concluir que houve uma forte evolução do conhecimento matemático e didáctico destes professores, em particular ao nível do pensamento algébrico, mas no sentido em que este se relaciona com ideias matemáticas fortes e estruturantes. Estes resultados são consistentes com Jacobs et al. (2007) quando afirmam que a incidência e o envolvimento dos professores em discussões acerca do pensamento algébrico durante o programa de formação foram uma motivação para uma mudança fundamental no ensino, não só da álgebra, mas da matemática em geral, tendo-se revelado fundamentais para a aprendizagem de professores e alunos.

Por fim é necessária uma referência à própria organização e formato do trabalho autónomo tal como foi desenvolvido pela equipa de formação, apresentado aos formandos que frequentaram o segundo ano de formação em 2007/08 e descrito no Capítulo 6. Este tipo de trabalho contribuiu não só para o desenvolvimento do conhecimento matemático e didáctico dos professores mas também para os colocar, pelo menos parcialmente, em situação de construtores de currículo – por terem de desenvolver uma experiência curricular com certa autonomia – e também "formadores" dos colegas – por imperativo da apresentação formal requerida, envolvendo, inclusivamente, desafios matemáticos para professores – promovendo assim uma diferença qualitativa essencial. Estes resultados são consistentes com Hodgen (2003) embora a uma escala diferente, já que a professora referida nesse estudo tornou-se ela própria tutora dos colegas. Mas o repto lançado por este investigador consistia não em replicar essa experiência, demasiado difícil e cara, mas encontrar formas de oferecer experiências menos intensivas de desenvolvimento profissional que, não obstante, proporcionassem imperativos, mais do que oportunidades, para reflectir e se envolver profissionalmente.

Efectivamente, poderá concluir-se que o formato delineado para o trabalho autónomo dos formandos no distrito correspondeu a esse repto, uma vez que, como se observou, ao longo e depois desta abordagem exigente, os três[20] professores desenvolveram uma motivação suplementar para o trabalho por se sentirem orgulhosos e satisfeitos com os resultados obtidos.

Perspectivas sobre a matemática e o seu ensino e aprendizagem

As perspectivas destes professores mudaram, eles próprios o dizem, e pode-se também ter essa percepção comparando os dados de entrevistas no início e no fim dos dois anos de formação. Os testemunhos mais explícitos e apaixonados são os de Ana e Sílvia. Ambas tinham uma visão tradicionalista da matemática devido ao seu próprio percurso escolar. Mais tarde, ambas frequentaram um curso de complemento de formação que veio mostrar-lhes que a matemática pode ser encarada de forma diferente e, deste modo e por influência desse curso, já possuíam outra linguagem, mais adaptada às novas tendências do ensino da matemática. Mas o que se verificou é que essa mudança se mantinha apenas ao nível discursivo. Ou seja, estas professoras *sabiam* que as coisas estão a mudar no ensino e na aprendizagem da matemática, sabiam até a direcção da mudança – o novo papel do professor, o foco na resolução de

[20] Como foi referido anteriormente, Leonor não foi abrangida por este formato de trabalho autónomo que foi implementado apenas no segundo ano de contacto em que esta professora já não se encontrava na formação.

problemas, a importância dos materiais manipuláveis no início de uma exploração, etc. O que elas na verdade *não sabiam* era como integrar esse conhecimento na sua prática.

No fim destes dois anos de formação, Ana refere um aspecto interessante: o facto de ter tido de mudar as suas práticas por imperativo da frequência do programa, devido ao acompanhamento em sala de aula, já que aquelas não se adequavam ao espírito da formação, e de ter em consequência visto os frutos doutro tipo de trabalho no entusiasmo, no gosto pela matemática e no desempenho dos seus alunos é que a levou a concluir que este era o caminho certo, que era importante a mudança, tendo ganho uma grande motivação para esse investimento. Um dos seus comentários sobre a matemática é elucidativo desta mudança de crenças, em que afirma a sua perspectiva inicial de que a matemática era um saber acabado e imutável, e restava ao professor transmiti-lo e aos alunos assimilá-lo: "[Achava que a matemática] era aquilo, era aquilo. E afinal não é aquilo" (cfr. Capítulo 7). Para esta professora, também, os materiais manipuláveis descobertos foram motivadores porque são concretos e aliciantes, e acabaram por arrastar uma mudança de atitude em relação aos métodos de ensino e aos próprios conceitos matemáticos.

Sílvia tem um percurso semelhante, e considera que uma certa angústia por se sentir aquém daquilo que é hoje exigido a um professor de matemática contribuiu para espicaçar a sua vontade de mudança. Ao fim dos dois anos de formação sente um enorme entusiasmo em relação ao ensino da matemática, já que uma maior segurança lhe permite hoje arriscar sem medo a realização de tarefas mais abertas e desafiadoras que lhe dão muita satisfação e que tiveram grande adesão por parte dos alunos. Valorizou também a sua própria descoberta da exploração séria de materiais manipuláveis.

Guilherme considerava no início do estudo que a matemática era essencialmente cálculo, reflectindo uma visão utilitária muito comum sobre esta disciplina. No entanto, ao fim de dois anos de formação este professor realça a importância da compreensão, mesmo durante a utilização dos cálculos, bem como outras competências tais como o raciocínio e a resolução de problemas.

Leonor é a que menos altera a sua visão sobre o ensino da matemática, uma vez que já possuía uma perspectiva diferente, com realce para a necessidade de situações de descoberta num contexto de resolução de problemas. Dada a sua recusa da rotina, ia recolhendo em pesquisas pessoais e experimentando novas metodologias baseadas em tarefas novas e motivadoras para os alunos, onde o imprevisto é sempre valorizado. Contudo, valoriza na formação o contacto com novas estratégias e, ainda, a garantia de que o seu percurso estava de acordo com os novos objectivos do ensino da matemática, o que lhe dá segurança para continuar.

O caso de Sílvia é o mais emblemático pois é dos quatro professores a que se empenha duma forma mais entusiástica e sentida na transformação das suas próprias práticas. Reconhece racionalmente essa necessidade de mudança, pelas razões já apontadas, mas sente--se também nela uma reacção muito emocional, de uma pessoa que está a gostar verdadeiramente daquilo que faz e está a sentir-se gratificada pelos resultados que observa nos alunos. Não se quer significar com isto que não tenha existido nos outros professores este sentimento, mas Sílvia extravasa-o duma forma manifestamente mais forte.

Estes resultados estão sintetizados na Tabela 16.

Tabela 16: *Perspectivas sobre a matemática e o seu ensino e aprendizagem, o bom professor e o bom aluno*

	Ana	Guilherme	Leonor	Sílvia
A matemática e o seu ensino e aprendizagem	Afinal não é um saber acabado, é descoberta. Os materiais manipuláveis são um bom meio de exploração de conceitos.	A matemática é cálculo, mas com compreensão. E é também raciocínio e resolução de problemas.	Sempre gostou de trabalhar a matemática contextualizada com tarefas de descoberta e há muito que valoriza a resolução de problemas.	Anteriormente seguia essencialmente os manuais. Hoje sente um enorme entusiasmo pelo ensino com a aplicação de tarefas inovadoras. Descobriu a importância dos materiais manipuláveis como veículo para o conhecimento matemático.
Papel do bom professor	Trabalho e criatividade para criar as melhores condições para que as aprendizagens se concretizem. Dar espaço aos alunos, ao pensamento, à comunicação.	Bom domínio dos conteúdos. Levar os alunos a pensar e a comunicar. Reflectir sobre a sua prática. Dinamismo, criatividade e tolerância.	Mais do que transmitir conceitos deve transmitir o gosto, aliciar os alunos para a descoberta.	Fazer com que os alunos gostem de matemática, propondo tarefas interessantes e desafiadoras e promovendo a comunicação.
Características do bom aluno	Questiona, raciocina, reflecte e comunica com auto-confiança.	É um estudante. Compreende os conceitos e sabe utilizá--los. Utiliza a teoria para formular hipóteses, justificá-las e resolver problemas.	Capacidade para ligar e relacionar tópicos aprendidos de modo a poder fazer face a situações novas e resolvê-las.	Profunda compreensão dos conceitos e tópicos matemáticos envolvidos nas tarefas que realiza. Capacidade de comunicação do raciocínio.

Não há congruência entre estes resultados e os de Olson & Barrett (2004) que, após um programa de desenvolvimento profissional delineado para ajudar professores do primeiro ano de escolaridade a seguir as recomendações da reforma, concluíram que os instrumentos utilizados, baseados no uso de tarefas ricas, na modelação do ensino pelo formador nalguns casos, na colaboração durante a planificação e a instrução e na reflexão sobre as aulas não produziu quaisquer efeitos de mudança, tendo os investigadores, no fim do processo, assistido ao regresso dos três professores-caso aos métodos tradicionais. No presente estudo, que tem bastantes pontos de semelhança com o referido, não se verificaram os mesmos resultados desanimadores, e uma explicação poderá estar no modo como a formação foi organizada e as etapas foram sendo percorridas, durante um período alargado de tempo, respeitando a progressão natural e o ritmo próprio dos participantes, não ambicionando saltos qualitativos bruscos e, sobretudo, não esperando que fossem aplicar na sala de aula tarefas “demasiado” desafiadoras, de tal modo que eles próprios se sentissem constrangidos ou inseguros na sua abordagem.

Atitudes e aprendizagens dos alunos

Ana considera uma coincidência feliz que o acompanhamento proporcionado aos seus alunos tenha ocorrido desde o primeiro ano de escolaridade e testemunha uma grande motivação e entusiasmo dos alunos pela matemática, que se tornou a disciplina preferida da generalidade da turma no fim do segundo ano. O facto de ter dado mais tempo aos alunos para pensarem nas propostas de trabalho e a valorização que fez, em particular, do aspecto da comunicação dos seus raciocínios entre si e com a professora desenvolveu neles uma maior autonomia e auto-estima. Simultaneamente, as tarefas exploradas ao longo dos dois anos levaram a um bom domínio do cálculo mental e ao desenvolvimento do sentido do número e da capacidade de resolução de problemas.

Guilherme refere também os aspectos de motivação e adesão dos alunos, em ambas as turmas, às propostas de trabalho por si efectuadas, que iam além dos habituais “resolve” ou “determina”, suscitando capacidades cognitivas mais elevadas. Em testemunhos de alunos observa-se o seu gosto pelo trabalho em matemática. Em termos de desempenho houve uma evolução em ambas as turmas, notada também pelos professores titulares de turma. É de fazer aqui um reparo necessário: uma vez que Guilherme não era o titular da turma em nenhum dos anos teve como consequência a impossibilidade de um trabalho tão sistemático e controlado como nos outros três casos. Embora Guilherme tenha tido sempre uma atitude de grande empenhamento e envolvimento pessoal em relação ao trabalho matemático dos alunos, esta circunstância condicionou, como é natural, o trabalho do professor e a extensão dos resultados.

Leonor realça o facto de os seus alunos se sentirem muito entusiasmados com os desafios que lhes propõe, reconhecendo um gosto generalizado das turmas pela matemática. A tendência desta professora para fazer exploração dos temas até onde os alunos chegarem, não se restringindo às indicações dos manuais que, na sua perspectiva, infantilizam a actividade matemática, reduzindo-a ao conhecimento dos números até 20 no 1.º ano, por exemplo, fez com que os alunos pudessem progredir de acordo com os seus ritmos próprios e capacidades, ganhando uma progressiva autonomia no trabalho desde muito pequenos. Em termos de cálculo mental, particularmente, os alunos experimentaram uma grande variedade de representações e recursos que foram progressivamente abandonando à medida que interiorizavam os padrões inerentes, e com a ajuda de metáforas criadas pela professora.

Sílvia reconhece que os seus alunos tiveram uma enorme evolução no seu gosto e entusiasmo pela matemática, também por influência do seu próprio entusiasmo. Com efeito, estes alunos eram até um pouco passivos no início das observações de aulas e houve uma mudança evidente de atitude para um envolvimento activo e mesmo esforçado e persistente. Ao fim dos dois anos de acompanhamento divertem-se, por assim dizer, a fazer descobertas matemáticas. Trabalham com autonomia e em colaboração com colegas, discutindo e comunicando as suas intuições e descobertas, tendo adquirido um "olhar matemático" que os leva a estabelecer relações e conjecturas. Todo este trabalho, faz notar a professora, extravasa largamente as aulas assistidas, já que Sílvia realiza diariamente um trabalho inovador de exploração e inquirição.

A Tabela 17 mostra os aspectos mais distintivos das atitudes e das aprendizagens dos alunos de cada um dos participantes, sobretudo em relação aos tópicos matemáticos valorizados neste estudo, o que não significa que não tenha havido outro tipo de aprendizagens.

Tabela 17: *Atitudes e aprendizagens dos alunos*

	Ana	Guilherme	Leonor	Sílvia
Atitudes dos alunos	Motivação. Entusiasmo. Autonomia. Segurança. Gosto generalizado pela matemática.	Motivação e adesão dos alunos. Gosto pelo trabalho.	Gosto e entusiasmo generalizado. Envolvimento dos pais.	Aumento notório do gosto pela matemática provocado essencialmente pela utilização de tarefas menos rotineiras e mais desafiadoras. Trabalho colaborativo.
Aprendizagens dos alunos	Envolvimento nas tarefas. Raciocínio. Capacidade de comunicação. Cálculo mental. Sentido do número. Resolução de problemas.	Explicitação de raciocínios. Desenvolvimento de capacidades cognitivas elevadas associadas à resolução de problemas. Melhoria no desempenho atendendo aos níveis iniciais.	Descoberta de padrões para aplicação ao cálculo mental. Sentido do número. Uso compreensivo de procedimentos. Raciocínio e comunicação.	Descoberta de padrões. "Olhar matemático" que facilita o estabelecimento de relações. Formulação e justificação de conjecturas. Generalização.

Em síntese, os alunos abrangidos por estes professores sentiram-se genericamente muito entusiasmados com os desafios suscitados pelas tarefas propostas, tendo ganho progressivamente ao longo do ano lectivo – ou dos dois anos – um grande gosto pela área da matemática. Verificou-se uma evolução para uma maior autonomia no trabalho, sendo os alunos capazes de fazer as suas próprias descobertas. Houve uma grande consciencialização da parte dos quatro professores da importância do desenvolvimento de capacidades transversais como a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação. As aprendizagens mais notórias foram, como é natural, ligadas ao cálculo mental e sentido do número, para além da descoberta de padrões, formulação de conjecturas e processos de generalização. A evolução das aprendizagens foi mais manifesta nas turmas de Ana e Sílvia pelo facto de terem mantido a turma ao longo dos dois anos.

Algumas reflexões

Quatro percursos, uma meta

Guilherme está numa fase muito inicial da profissão, e daí que se note, sobretudo no seu 1.º ano, uma certa ausência de espírito crítico. Ele sabe que tem necessidades mas não consegue explicitá-las completamente. Por isso a sua preocupação essencial é recolher e organizar tudo para poder vir a utilizar, mesmo que inicialmente sem grande critério. Há também dois anos disjuntos na sua prática lectiva, em turmas e escolas diferentes, e um papel de professor de apoio, o que dificulta uma visão global da evolução dos alunos. Foi notório, no entanto, o desenvolvimento profissional deste professor pela experimentação com recursos válidos e sobretudo pelo papel que nele teve o processo de reflexão sobre a prática apoiado pela formadora e pelo professor titular da turma do segundo ano. Esta capacidade de reflexão é uma característica do professor mas foi-se alargando com o conhecimento dos materiais curriculares, que era no início da formação muito incipiente; este resultado está de acordo com Alarcão (1996) e Serrazina (2002).

No caso de Ana e Sílvia há uma centelha deixada pela frequência dum curso de complemento de formação que ilumina o seu discurso sobre as novas tendências do ensino da matemática. Nestas duas professoras, em particular, a tensão entre aquilo que *sabiam* ser as novas tendências do ensino da matemática e a sua prática efectiva no início da formação foi um incentivo à mudança. O encontro desse discurso com novas propostas e a prática continuada, numa harmonização de dois anos com a mesma turma, permite observar o impacto positivo do programa de formação nas professoras e nos respectivos alunos. Ana passa a valorizar a dinâmica de sala de aula sobretudo nos aspectos da comunicação, o que não fazia anteriormente, e ganha especial interesse pelo desenvolvimento nos alunos do sentido do número. Sílvia mostra um grande entusiasmo pelas propostas inovadoras, lançando desafios exigentes aos alunos, apoiados por um questionamento eficaz, em particular no âmbito da descoberta de padrões e do pensamento algébrico.

Leonor orientava já a sua prática com base na exploração de situações problemáticas do dia-a-dia, integradas em enredos interessantes, que podiam conduzir ao desenvolvimento de tópicos matemáticos. O programa de formação forneceu-lhe a possibilidade de aprofundamento mais formalizado do conhecimento matemático e enriquecimento a nível de recursos para a sala de aula, que soube aproveitar e adaptar de forma autónoma. Em resultado da formação, deu importância especial ao desenvolvimento do cálculo mental de forma sistemática e continuada, o que produziu frutos assinaláveis observados nos seus alunos do 1.º ano de escolaridade.

Os resultados deste estudo são consistentes com Serrazina (1998) quando afirma:

> Os professores do 1.º ciclo podem promover nos seus alunos a curiosidade, entusiasmo e desejo de aprender matemática se tiverem conhecimento e se sentirem confiantes acerca dos tópicos da matemática escolar que abordam nas suas aulas (pp. 255-256).

Adicionalmente ao programa de formação encarado nas suas características genéricas, o pedido feito a estes professores de centrar o seu trabalho autónomo num tema, o da álgebra, que ao momento nem era objecto do programa em vigor, permitiu uma experiência curricular que no fundo conseguiu integrar todos os aspectos numéricos e mesmo alguns geométricos e ligados às probabilidades, dando aos professores uma visão da matemática como o estudo de padrões e de relações (NCTM, 1991). Na verdade, muitas das situações em que se defende que as crianças estão a iniciar o pensamento algébrico são baseadas em tópicos existentes e trabalhados no programa anterior. O que se torna necessário é que a forma diferente de abordar esses aspectos seja clara para o professor de modo a poder explicitá-los e valorizá-los no trabalho com os seus alunos. E esta condição verificou-se no presente estudo. Implementando práticas de ensino focadas na procura de padrões e descoberta da estrutura numérica e nas relações e propriedades dos números e das operações, num percurso do particular para o geral, os professores puderam não só promover estruturas de pensamento algébrico nos alunos mas também facilitar o desenvolvimento de uma aprendizagem com compreensão (Molina, 2007) e dar profundidade e coerência ao estudo da matemática elementar (Kaput & Blanton, 2001).

O papel da equipa de formação

É também importante recordar o papel da equipa de formação do distrito. A equipa planificava todas as actividades da formação em conjunto, ainda que frequentemente por sugestão prévia de algum dos seus membros, e tinha a enorme vantagem de ser constituída por pessoas com formações e experiências muito diversificadas, o que aportava um grande enriquecimento à acção conjunta. Também as reflexões individuais provenientes do trabalho semanal de cada um eram partilhadas no grupo. A formadora refere, no seu diário de campo:

> Para o seu desenvolvimento profissional, os formadores, como os formandos, devem reflectir sobre as suas práticas. Era isso que fazíamos em equipa às quintas-feiras depois de o fazermos individualmente, já que nas reuniões da equipa se discutiam temas que provinham dessa mesma reflexão individual. (DC, 02/01/2008)

Assim, o trabalho em equipa era o catalisador de sugestões individuais, dava incentivo à manutenção de um bom ritmo de trabalho continuado, por vezes em condições difíceis, e foi um apoio constante às dúvidas e dilemas individuais.

É também de realçar a importância da disponibilização aos professores de materiais curriculares de qualidade que possam servir de base ao seu trabalho. Incluem-se neste aspecto a elaboração de várias brochuras contendo os materiais entretanto construídos e seleccionados, que constam essencialmente de propostas para a sala de aula, boa parte ilustradas com trabalho já realizado por alunos em aulas acompanhadas anteriormente – o que mostra a possibilidade da sua utilização em sala de aula - e alguns apontamentos teóricos, e que puderam constituir uma fonte de consulta e de recursos para o presente e futuro.

Muitos títulos, um todo

A investigadora tem cada vez maior consciência de que os aspectos anteriormente analisados estão tão intimamente ligados que são impossíveis de separar na realidade. Se o foram foi apenas por uma questão de organização do trabalho. De facto, (a) o conhecimento matemático é inseparável do conhecimento didáctico, já que o tipo de conhecimento matemático útil para um professor envolve aspectos de clarividência e compreensão do modo como as crianças aprendem que outra pessoa que use a matemática mas não tenha de ensiná-la não precisa de deter; por outro lado, não faz sentido pensar na didáctica sem ser associada ao conhecimento de conteúdo que lhe dá corpo. Por se ter reconhecido esta fronteira tão fluida é que se fez a opção, no capítulo sobre o conhecimento do professor, de considerar não duas secções mas apenas uma que se designou por "Do conhecimento matemático ao conhecimento didáctico"; (b) O conhecimento matemático tem de estar ligado à prática de sala de aula, sob pena de se estarem a "injectar" nos professores conhecimentos que não produzirão resultados nas aprendizagens dos alunos, ou porque os conhecimentos adquiridos não se adaptam às necessidades reais ou porque o professor não sabe explorá-los em contexto. Daí ter-se optado, na construção dos casos, na secção *Reflexos do Programa*, não por dois pontos mas por um único intitulado *No conhecimento matemático e na prática de sala de aula*; (c) as práticas dependem dos conhecimentos e perspectivas do professor sobre a matemática e o seu ensino, mas estes conhecimentos e perspectivas também podem ser mudados através das práticas; (d) as aprendizagens dos alunos são influenciadas pelos conhecimentos e perspectivas dos professores, mas também os influenciam em larga escala, como acabou de se verificar nos pontos anteriores; (e) o próprio tema do pensamento algébrico que se optou por valorizar de modo especial por ser um tema novo mas contido de modo estrito no elenco de conteúdos, acabou por se revelar um tema integrador do currículo e gerador de interesse quer nos alunos quer nos professores e de dinamismo da sala de aula; e (f) a comunicação dos professores entre si e dos alunos na sala de aula são duas faces da mesma moeda, cuja dinâmica não pode ser esquecida, tais são as suas potencialidades.

Como reflexão final pode dizer-se que o êxito de um programa de formação depende, não deste ou daquele factor, mas da conjugação de vários factores indissociáveis e complementares, como sejam as suas várias vertentes: as sessões conjuntas de formação, o acompanhamento em sala de aula, o trabalho autónomo, a reflexão e a partilha de experiências, desde que todas estas vertentes estejam ancoradas na prática e o trabalho se desenvolva com continuidade no tempo. E depende fundamentalmente da "argamassa" que permite unir e dar sentido a todos estes aspectos: formandos com a humildade de reconhecer que não sabem tudo e com vontade de se superarem e uma equipa de formação coesa, empenhada e motivada para lutar diariamente por mais e melhor. Só tudo, mas absolutamente tudo, é que poderá bastar.

Conclusão

Verificou-se nos professores envolvidos neste estudo que a formação inicial teve um fraco impacto. A formação complementar já constituiu um aspecto importante pois permitiu assumir um novo discurso sobre as tendências recentes sobre o ensino da matemática. A auto-formação pode produzir também os seus frutos desde que o professor esteja atento e motivado e possua meios para a fazer. Mas o que se revelou realmente fundamental no sentido da mudança foi a formação contínua numa modalidade como esta de imersão na prática durante um período longo. A investigação mostra que o desenvolvimento profissional, para ser eficaz, não pode ser visto como um programa de actividades separadas da função de ensinar. Analisar o trabalho de ensinar torna a prática visível e, deste modo, passível de aprendizagem (Day, 2001; Ball et al., 2008). Além disso deve ser alargado no tempo, baseado na escola e no trabalho colaborativo, com ênfase na aprendizagem dos alunos e ligações ao currículo (Prenzel & Ostermeier, 2006). Por outro lado, a formação deve tomar como ponto de partida a experiência dos professores, não se perspectivando como qualquer coisa a substituir o conhecimento existente mas a construir sobre uma plataforma útil (Day, 2001; Warren, Cooper & Lamb, 2006). Doutro modo, o discurso da formação não será significativo para os professores e estes tenderão a voltar aos hábitos antigos, tendo a formação constituído apenas um movimento de "cosmética". Por isso, Day (2001) defende a participação dos professores no próprio processo de formação:

> Os professores não podem ser formados (passivamente). Eles formam-se (activamente). É, portanto, vital que participem activamente na tomada de decisões sobre o sentido e os processos da sua própria aprendizagem (p.17).

Eis aqui um ponto particularmente sensível. Os professores têm cada um a sua história de conhecimento e experiência, que deve ser integrada no processo de formação tanto atendendo aos seus pontos fortes como às suas fragilidades. Warren (2006), fazendo a analogia com a zona de desenvolvimento proximal de Vygotsky (2000), analisa o impacto de um programa de desenvolvimento profissional em pensamento e compreensão algébrica numa professora do primeiro ciclo, concluindo que, como a formação estava fora da sua zona de desenvolvimento proximal, houve pouca aprendizagem a respeito das ideias algébricas. Conclui sobre a importância da sensibilidade a este aspecto. Ao quererem desenvolver ao máximo a compreensão e a aprendizagem dos alunos, os responsáveis pela formação podem correr o risco de ultrapassar aquilo que os professores estão preparados para, ou são capazes de, fazer. Assim, é crucial a atenção personalizada dada a cada professor em formação. De facto, por vezes é grande a tentação de saltar etapas e evoluir rapidamente para níveis muito altos de sofisticação. Mas é necessário ter em mente que a formação matemática dos professores do 1.º ciclo não é a dum matemático, que os professores são generalistas e têm de dar atenção a todas as áreas, e que a evolução e a mudança não pode ser, nem é natural que seja, demasiado rápida e depende primordialmente da sua apreensão do valor e da importância da aprendizagem com compreensão que será o catalisador do seu entusiasmo e empenhamento. Ligado a estes aspectos realça-se a preocupação presente de ouvir os professores identificando sempre os seus pontos fortes mais do que as suas fragilidades numa atmosfera de respeito mútuo, o que favoreceu a reflexão e consequentemente a adaptação (Cooney & Krainer, 1996).

Verificou-se, de forma consistente com Serrazina (1998), que alguns dos factores que provocaram a mudança nas práticas foram o ganho de auto-confiança e a possibilidade de reflexão sobre a prática. Contudo, inversamente, também a mudança de perspectivas e atitudes dos professores foi mediada pela sua observação da evolução na aprendizagem dos alunos provocada pela mudança das práticas. De facto, este ponto é particularmente importante e relaciona-se com a existência de acompanhamento em sala de aula; este "obriga" os professores a darem o primeiro passo na quebra das rotinas e a prepararem da melhor forma as suas aulas, transcendendo-se enquanto profissionais.

As características deste programa de formação, designadamente o acompanhamento em sala de aula, a reflexão pessoal e também com a formadora e a partilha de experiências com colegas, proporcionaram uma perspectiva de formação mais centrada no professor, na sua experiência prévia, nas suas necessidades e anseios, na sua prática diária, e, deste modo, poderá dizer-se que constituíram um marco de relevo na sua carreira. Um esquema que se julga adequado para ilustrar a intervenção do programa de formação no conhecimento profissional dos professores é o que se apresenta na Figura 78:

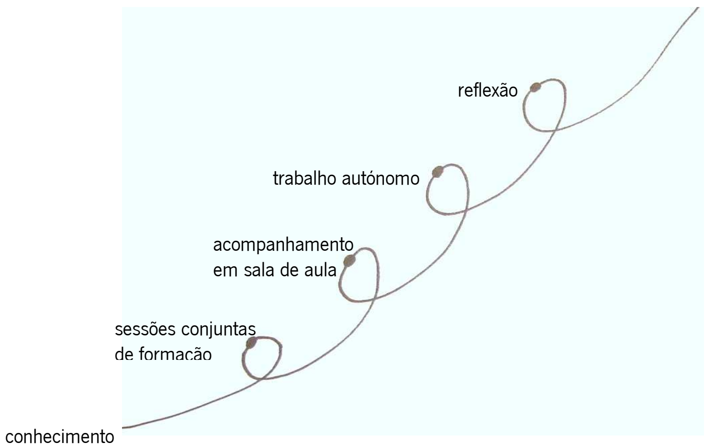


Figura 78. Intervenção do programa de formação no conhecimento profissional dos professores

A aprendizagem e desenvolvimento profissional neste percurso não linear parece ter ocorrido, de modo consistente com Warren (2006), devido a quatro interacções fundamentais: (a) professor–formador; (b) professor–professor (quando trabalhavam em pares); (c) professor–alunos; e (d) professor–grupo (nas sessões conjuntas de formação).

O que se fez neste programa de formação permite discutir e compreender de modo concreto o ensino e a aprendizagem da matemática, já que se propuseram acções concretas, tarefas concretas, questionamento concreto, e analisaram-se resultados. As propostas de trabalho apresentadas nas sessões conjuntas de formação, e que estes professores genericamente adoptaram, tiveram a preocupação de conjugar o aprofundamento de conteúdos matemáticos com o conhecimento do pensamento dos alunos. Para isto contribuiu o formato das sessões, em que os temas eram abordados com pormenor e obedecendo ao princípio do isomorfismo, levando os professores a explorar os temas nas sessões do mesmo modo que se pretendia que viessem a trabalhá-los com os seus alunos, e complementados com a reflexão sobre as aulas. Assim, neste percurso, os professores envolvidos tiveram uma aprendizagem *geradora*, no sentido de Franke et al. (2001), na medida em que souberam integrar o novo conhecimento no conhecimento existente e aplicá–lo e reavaliá-lo continuamente, tornando-o mais rico em estrutura e conexões em consequência duma aprendizagem com compreensão.

A estes resultados não é alheio o facto de este ter sido um estudo que se prolongou ao longo de dois anos, permitindo uma visão longitudinal do conhecimento do professor e de como ele vai mudando ao longo do tempo (Mewborn, 2001).

Por seu lado, a existência de trabalho autónomo durante o segundo ano de formação levou os professores a um trabalho de pesquisa e sistematização mais pessoal e aprofundado. A modalidade que a formadora e investigadora propôs à equipa visava não só a planificação e execução de uma aula em trabalho autónomo mas a sua posterior apresentação pública ao grupo, o que levou os formandos a descentrarem-se dessa condição, assumindo também o papel de formadores, e incentivou em consequência um trabalho de qualidade. Neste domínio revelou-se muito positiva para estes quatro professores a focalização desse trabalho autónomo no tema do pensamento algébrico. Este resultou numa experiência curricular rica e inovadora para professores e alunos, tendo dado aos professores o ensejo de desenvolver o seu conhecimento matemático e didáctico num tópico que não lhes era familiar e, propondo a organização de aulas à volta de ideias motivadoras e acessíveis para os alunos, criou-se, como salientam Schifter et al. (2008), um ambiente de sala de aula no qual as crianças se envolvem em actividade muito próxima da prática dos matemáticos – formular, testar e provar afirmações de generalidade. Nesta perspectiva poderá afirmar-se a possibilidade e a vantagem da abordagem precoce de ideias algébricas.

Verificou-se também um facto interessante: os professores participantes neste processo de investigação foram dos que mais evoluíram de todo o grupo de professores em formação da responsabilidade da investigadora. Como pode ver-se no diário de campo:

> Será que o facto de participarem numa investigação é *de per se* um factor de desenvolvimento profissional? O investimento foi maior? O facto de terem uma atenção mais personalizada com conversas pessoais e maior reflexão ajudou a empenharem-se mais no trabalho de pesquisa e aprofundamento de metodologias? (DC, 16/01/08)

Esta conclusão encontra eco nos trabalhos de Cooney & Krainer (1996) e principalmente de Jaworski (2003), em que, defendendo-se neste último que "A investigação promove o desenvolvimento" (p.249), se coloca a investigação em formação de professores como directamente relacionada com a atitude de inquirição dos professores acerca das suas práticas por forma a melhorá-las.

Recomendações

O reconhecimento de que a mudança nos professores é um processo mais que um evento foca a necessidade de se manterem programas multianuais de desenvolvimento profissional como este. Com efeito, é de realçar a constatação de que um primeiro ano de formação permite despertar e iniciar um trabalho mas verificou-se nestes professores um grande crescimento e consolidação sobretudo no segundo. Daí a importância do segundo ano de formação.

Este programa de formação funcionou com sucesso para estes professores. É certo que um estudo com estas características não permite generalização. Contudo, pensa-se poder afirmar que um modelo de formação contínua em matemática deve estar completamente imerso na prática e permitir que se entrecruzem e interajam as suas vertentes fundamentais: as sessões conjuntas de formação, o acompanhamento em sala de aula, a reflexão, a partilha de experiências e o trabalho autónomo.

Ainda em relação ao trabalho autónomo, é de salientar que este não deve ser apenas "o trabalho de casa" mas ter visibilidade pública: o terem de apresentar formalmente aos colegas o seu trabalho implementado na sala de aula e colocar ainda aos colegas desafios adicionais exige uma maior pesquisa e fundamentação, desenvolvendo nos professores uma postura profissional de brio, cuidado e preocupação de qualidade.

Por outro lado, a formação de professores é um processo cíclico (Warren, 2006), pelo que é de importância crucial o envolvimento destes mesmos professores em processos de formação contínua em fases posteriores da sua carreira, tal como os participantes deste estudo realçaram.

Simultaneamente, os professores consideram que precisam de incentivo para manter a motivação, a "chama acesa". Há necessidade de um apoio especializado e continuado de modo a promover a pesquisa, a reflexão e a partilha de experiências, mantendo viva a dinâmica criada pelo programa de formação.

Em relação à questão da elaboração do portefólio como único instrumento de avaliação, para além da opinião negativa de três dos quatro professores, verificou-se não haver em duas das professoras congruência entre o que escreveram no portefólio e o seu desempenho, que foi muito superior. Assim, será de repensar um modelo de avaliação exclusivamente baseado no portefólio dos formandos.

O benefício que os participantes confessaram ter obtido da opção feita pela investigadora de lhes proporcionar o visionamento do registo vídeo de uma das suas aulas para posterior reflexão conjunta sugere a vantagem de serem utilizados estes meios em futuros programas de formação contínua. Poderia mesmo ir-se mais além, apresentando nas sessões de formação registos em vídeo ou narrativos de episódios de aulas de professores exteriores ao grupo, tal como refere o estudo de Silver et al. (2007) com resultados promissores.

Outro aspecto a referir é que este programa de formação contínua, nos seus princípios orientadores, realça a importância de "Promover o trabalho em rede entre escolas e agrupamentos em articulação com as instituições de formação inicial de professores". Ora, de todos os princípios enunciados, este foi talvez o menos observado. De facto, embora tenham sido evidenciados pontualmente trabalhos de colaboração entre colegas de diferentes escolas, não se assistiu a uma dinâmica institucional de trabalho em rede entre escolas e agrupamentos. Será necessário accionar outros mecanismos que possibilitem a consecução deste objectivo. Apontam-se como exemplo as dinâmicas de desenvolvimento profissional designadas por *lesson study* (Silver et al., 2007; Kelly, 2002), com cujo formato o trabalho desenvolvido neste programa de formação se assemelha, mas não de forma tão estruturada e sistemática.

Futuras investigações

A continuação dum estudo desta natureza com os mesmos professores dentro de alguns anos seria relevante de modo a poder responder às seguintes questões: O que permaneceu? Que mudanças se consolidaram? Quais os aspectos que acabaram por ser abandonados? Que atitudes regrediram? Na verdade, poucos trabalhos têm estudado sistematicamente os efeitos a longo prazo destes programas de formação contínua (Franke et al., 2001).

Num momento de transição para a implementação generalizada do novo Programa de Matemática do Ensino Básico, colocam-se também questões a que seria importante dar resposta: Que intervenção poderá ter o novo Programa nas interrogações acima formuladas?

Em relação aos alunos seria interessante haver estudos de acompanhamento posterior, eventualmente durante a frequência do 2.º ciclo e analisando resultados de provas de aferição, por forma a poder verificar se a evolução nas suas aprendizagens reconhecida e observada neste estudo tem consequências nas suas aprendizagens e desempenho futuro.

Duma forma mais específica, em relação às aprendizagens matemáticas, este estudo pode considerar-se exploratório na medida em que dá indicadores da forma como trabalham alunos do 1.º ciclo. O estudo concluiu sobre um forte envolvimento dos alunos em experiências matemáticas significativas pela procura de integração entre a aritmética e a álgebra, valorizando o cálculo mental, o sentido do número e aspectos de descoberta de padrões e de generalização. Seria interessante estudar as implicações desta abordagem sobretudo numa época como a que atravessamos de mudança curricular, analisando particularmente o impacto a médio e longo prazo da introdução do pensamento algébrico em alunos do 1.º ciclo.

Nota final

Em suma, os professores envolvidos neste estudo desenvolveram o seu conhecimento profissional, como resultado das sessões de formação, do seu trabalho autónomo de pesquisa, selecção, adaptação e produção de materiais, da implementação pessoal e criativa na sua sala de aula das propostas apresentadas nas sessões conjuntas de formação, da reflexão sobre as suas próprias aulas, e em particular sobre o trabalho dos seus alunos, da partilha de experiências entre colegas proporcionada pelo Programa e ainda do seu envolvimento num estudo de investigação.

Para a investigadora este estudo representou também um forte desenvolvimento profissional na medida em que ganhou uma maior intuição e fundamentação sobre aquilo que realmente funciona na sala de aula e sobre o apoio requerido pelos professores durante a sua formação e os modos de o proporcionar respeitando a sua experiência profissional. A sua postura foi sempre de colaboradora e simultaneamente de desafio para que os professores pudessem melhorar as suas práticas produzindo um melhor ensino e, consequentemente, melhores aprendizagens nos seus alunos.

Com este trabalho pensa-se ter dado um contributo para a análise e compreensão dos processos de formação contínua em matemática de professores do primeiro ciclo.

REFERÊNCIAS

Academia das Ciências de Lisboa (2001). *Dicionário da Língua Portuguesa Contemporânea* (João Malaca Casteleiro, Coord.). Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa e Editorial Verbo.

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 359-381.

Adler, J., Davis, Z., Kazima, M., Parker, D. & Webb, L. (2005). Working with learners' mathematics: Exploring a key element of mathematical knowledge for teaching. In Chick, H.L. & Vincent, J.L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.2, pp.1-8. Melbourne: PME.

Adler, P. A. & Adler, P. (1994). Observational Techniques. In N. Denzin e Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 377-392). Thousand Oaks: Sage Publications.

Alarcão, I. (1996). Reflexão crítica sobre o pensamento de D. Schön e os programas de formação de professores. In I. Alarcão (Org.), *Formação reflexiva de professores. Estratégias de supervisão* (pp. 9-39)*.* Porto: Porto Editora.

Alarcão, I. & Tavares, J. (1987). *Supervisão da Prática Pedagógica: Uma Perspectiva de Desenvolvimento e Aprendizagem*. Coimbra: Almedina.

Almeida, L. & Freire, T. (2000). *Metodologia da Investigação em Psicologia e Educação*. Braga: Psiquilíbrios.

Amaral, M.J., Moreira, M.A. & Ribeiro, D. (1996). O papel do supervisor no desenvolvimento do professor reflexivo. Estratégias de supervisão. In I. Alarcão (Org.), *Formação reflexiva de professores. Estratégias de supervisão* (pp. 89-122)*.* Porto: Porto Editora.

Amaro, G. (2000). A Matemática no ensino secundário: perspectivas e realidades. *Noesis, 55,* pp. . DGIDC.

Amaro, G., Cardoso, F., & Reis, P. (1996). TIMSS – Terceiro estudo internacional de Matemática e Ciências: Contextos de aprendizagem (Relatório preliminar nacional policopiado). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

APM & IIE (1998). *Matemática 2001 – Diagnóstico e Recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática*. Lisboa: APM e IIE.

Ball, D. (2009). Making Mathematics learnable in school: What is the work of teaching Mathematics?. Conferência apresentada em *Redesigning Pedagogy – 3rd International Conference.* National Institute of Education, Singapore, 1 June. Acedido Novembro, 17, 2009 em http://www-personal.umich.edu/~dball/

Ball, D., Bass, H., Sleep, L. & Thames, M. (2007). A Theory of Mathematical Knowledge for Teaching [CD-ROM]. *Proceedings of the 15th ICMI Study, The Professional Education and development of Teachers of mathematics*, Águas de Lindóia, Brasil, 15-21 May 2005. Unesp.

Ball, D., Lewis, J. & Thames, M. (2008). Making Mathematics Work in School. *Journal for Research in Mathematics Education. A Study of Teaching – Multiple Lenses, Multiple Views. Monograph No 14*, 13-44. Reston: NCTM.

Ball, D., Lubienski, S. & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching (4th ed.)* (pp. 433-456). New York: Macmillan.

Berbaum, J. (1993). *Aprendizagem e formação*. Porto: Porto Editora.

Bergen, T., Engelen, A. & Derksen, K. (2006). The Quality of Coaching in Relation to the Professional Development of Teachers. In F. Oser, F. Achtenhagen & U. Renold (Eds.), *Competence Oriented Teacher Training* (pp. 97-114). Rotterdam: Sense Publishers.

Blanton, M. & Kaput, J. (2001). Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part II: Transforming Practice on a District-Wide Scale. *Proceedings of the ICMI-Algebra Conference*. Melbourne, Australia, Dec.2001.

Blanton, M. & Kaput, J. (2003).Developing Elementary Teachers' "Algebra Eyes and Ears". *Teaching Children Mathematics, 10(2)*, 70-77.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36(5),* 412-446.

Boavida, A., Paiva, A.L., Cebola, G., Serra, I., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no 1.º ciclo do ensino básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Boero, P., Dapueto, C. & Parenti, L. (1996). Didactics of mathematics and the Professional development of teachers. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 1097-1121). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Bolhuis, S. (2006). Professional development between teachers' practical knowledge and external demands: plea for a broad social-constructivist and critical approach. In F. Oser, F. Achtenhagen & U. Renold (Eds.), *Competence Oriented Teacher Training* (pp. 237-249). Rotterdam: Sense Publishers.

Brocardo, J. & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Orgs.), *O sentido do número – reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 97-115). Lisboa: Escolar Editora.

Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., Rocha, I. & Serrazina, L. (2006). Números e Álgebra: desenvolvimento curricular. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores. Actas do XVI Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE* (pp. 65-92). Lisboa: SEM-SPCE.

Brown, J., Collins, A. & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher,18, (1*), 32-42.

Brown, M., Millett, A. & Askew, M. (2008). O impacto da estratégia nacional de numeracia no ensino e na aprendizagem em Inglaterra. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Orgs.), *O* *sentido do número – reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 61-92). Lisboa: Escolar Editora.

Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge and London: Harvard University Press.

Bruner, J. (1986). *Actual minds, possible worlds*. Cambridge and London: Harvard University Press.

Cai, J. & Moyer, J. (2008). Developing Algebraic Thinking in Earlier Grades: Some Insights from Internacional Comparative Studies. Em Carole Greenes & Rheta Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics – Seventieth Yearbook* (pp. 169-180). Reston: NCTM.

Calderhead, J. (1988). Conceptualizaçión y investigación del conocimiento professional de los profesores. Em Luis Angulo (Dir.), *Conocimientos, creencias e teorias de los profesores. Implicaciones para el curriculum y la formación del profesorado* (pp. 21-37). Alcoy: Editorial Marfil.

Callingham, R. (2005). A whole-school approach to developing mental computation strategies. In H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*, Vol..2, pp. 201-208. Melbourne: PME.

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In Frank Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*,, 2 (pp. 669-705). Reston: NCTM.

Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Clandinin, D.J. & Connelly, F.M. (1988). Conocimiento practico personal de los profesores : imagen y unidad narrativa. In Luis Angulo (Dir.), *Conocimientos, creencias e teorias de los profesores. Implicaciones para el curriculum y la formación del profesorado* (pp. 39-62). Alcoy: Editorial Marfil.

Cobb, P. (1999). Onde está o espírito? Uma coordenação de perspectivas construtivistas socioculturais e cognitivas. In C. T. Fosnot (Ed.), *Construtivismo e educação: Teoria, perspectivas e prática*. Lisboa: Instituto Piaget.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education.* New York: Routledge.

Cooney, T. & Krainer, K. (1996). Inservice teacher mathematics education: the importance of listening. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 1155-1185). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Crain, W. (1992). *Theories of development – Concepts and applications*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Davis, P. & Hersch, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Day, C. (1993). Avaliação do desenvolvimento profissional dos professores. In A. Estrela & A. Nóvoa (Orgs.), *Avaliações em Educação: Novas perspectivas* (pp. 95-114). Porto: Porto Editora.

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores. Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto: Porto Editora.

Devlin, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Dolk, M. (2009). Looking at numbers - Young children developing number sense. In C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (Orgs.), *Números e Estatística – Reflectindo o presente, perspectivando o futuro. Actas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática* [CD-ROM].. SEM-SPCE.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: a study of practical knowledge*. London: Croom Helm.

English, L. (2004). Mathematical end analogical reasoning in early childhood. In Lyn English (Ed.), *Mathematical end Analogical Reasoning. of Yougn Learners* (pp.1-22). Mahwaw, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Equipa do projecto *Desenvolvendo o Sentido do Número: Perspectivas e Exigências Curriculares* (2005). *Desenvolvendo o sentido do número, Materiais para o educador e para o professor do 1.º ciclo*. Lisboa : APM.

Erickson, F. (1989). Metodos cualitativos de investigación sobre la ensenanza. In Merlin Wittrock (Ed.), *La investigación de la ensenanza II* (pp. 195-301). Barcelona: Ediciones Paidós.

Estrela, A., Eliseu, M., Amaral, A., Carvalho, A. & Pereira, C. (2005). A investigação sobre formação continua de professores em Portugal (1990-2004). *Investigar em Educação, 4*, 109-148. Revista da SPCE.

Evertson, C. & Green, J. (1989). La observación como indagación y metodo. In M. Wittrock (Ed.), *La Investigación de la ensenanza II* (pp. 303-421). Barcelona: Paidós.

Fenstermacher, G. (1994). The knower and the known: the nature of knowledge in research on teaching. *Review of Research in Education, 20*, 3-56.

Fernandes, D. (2005). *Avaliação das aprendizagens: desafios às teorias, práticas e políticas.* Lisboa: Texto Editores.

Fevereiro, I. & Belchior, M. C. (1999). Programa Ajustado de Matemática do Ensino Secundário. *Informat, 4*, p.1. ME-DES.

Fosnot, C. (1999). Construtivismo: uma teoria psicológica da aprendizagem. In C. T. Fosnot (Ed.), *Construtivismo e educação: Teoria, perspectivas e prática*. Lisboa: Instituto Piaget.

Fosnot, C. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work. Constructing number sense, addition, and subtraction.* Portsmouth: Heinemann.

Franke, M., Carpenter, T., Levi, L. & Fennema, E. (2001). Capturing teacher's generative change: A follow-up study of professional development in mathematics. *American Education Research Journal, 38(3)*, 653-690.

Franke, M.L., Kazemi, E. & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In Frank Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Vol.1 (pp. 225-256). Reston: NCTM.

Fujii, T. & Stephens, M. (2001). Fostering an Understanding of Algebraic Generalization through Number Expressions: The Role of Quasi-variable. *Proceedings of 12th ICMI Study Conference, The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 259-264). Melbourne, Australia.

Fujii, T. & Stephens, M. (2008). Using Number Sentences to Introduce the Idea of Variable. Em Carole Greenes & Rheta Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics – Seventieth Yearbook* (pp. 127-140). Reston: NCTM.

Garcia, C.M. (1999). *Formação de professores. Para uma mudança educativa.* Porto: Porto Editora.

GAVE (2004). *PISA 2003 – Resultados do estudo internacional*. Lisboa: GAVE.

Gimeno Sacristán, J. (1992). El curriculum: los contenidos de la enseñanza o un analisis de la practica? In J. Gimeno Sacristán & A.I. Perez Gomez (Eds.), Compreender y transformar la enseñanza (pp.137-170). Madrid: Morata.

Glickman, C., Gordon, S. & Ross-Gordon, J. (1998). *Supervision of instruction. A developmental approach.* Boston: Allyn and Bacon.

Goetz, J.P. & LeCompte, M.D. (1984). *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research.* Orlando: Academic Press.

Gomes, A. (2003). *Um estudo sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo. O problema dos conceitos fundamentais em geometria.* (Tese de Doutoramento, Universidade do Minho).

Goodman, N. (1978). *Ways of world making*. Boston: Harvester.

Guba, E. & Lincoln, Y. (1994). Competing Paradigms in Qualitative Research. In N. Denzin e Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 105-117). Thousand Oaks: Sage Publications.

Guerreiro, A., Fernandes, M. D., Costa, S., Assunção, C. & Ramos, S. (2004). Investigações na Sala de Aula do 1.º Ciclo. *Educação e Matemática, 78*, 43-45.

Guimarães, H. (1992). Concepções, práticas e formação de profesores. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos & J. P. Ponte (Eds.), *Educação Matemática* (pp. 249-255). Lisboa: IIE/SEM-SPCE.

Hartnett, J. (2007). Categorisation of Mental Computation Strategies to Support Teaching and to Encourage Classroom Dialogue. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), Mathematics Essential Research, Essential Practice. (Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, pp. 345-352). Brisbane: MERGA.

Heirdsfield, A. (2002). Inaccurate mental addition and subtraction: Causes and compensation. In B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuch, and M. Thomas (Eds.), *Proceedings Mathematics Education in the South Pacific*,, pp. 334-341. Auckland, NZ.

Heirdsfield, A. M. (2004). *Putting research into practice: A case in mental computation*. Paper presented at Discussion Group 2 at the 10th International Congress on Mathematics Education. Copenhagen: Denmark.

Heuvel-Panhuizen, M. (2005). Can scientific research answer the "what" question of mathematics education?. *Cambridge Journal of education, 35(1),* 35-53.

Heuvel-Panhuizen, M. & De Goeij, E. (2007). Offering primary school teachers a multi-approach experience-based learning setting to become a mathematics coordinator in their school [CD-ROM]. *Proceedings of the 15th ICMI Study, The Professional Education and development of Teachers of mathematics*, Águas de Lindóia, Brazil, 15-21 May 2005. Unesp.

Higgins, J. (2005). Pedagogy of facilitation: How do we best help teachers of mathematics with new practices? In Chick, H.L. & Vincent, J.L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.3 (pp. 137-144). Melbourne: PME.

Hill, H., Ball, D. & Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39 (4)*, 372-400.

Hodgen, J. (2003). Reflection, identity and belief change in primary mathematics. *Proceedings of CERME 3: Third Conference in the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria: Italy. Acedido Setembro, 18, 2007 em http://edr.sagepub.com/cgi/framedreprint/15/2/4

Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher, 36(6)*, 6-11.

Huberman, M. & Miles, M. (1994). Data Management and Analysis Methods. In Norman Denzin e Yvonna Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 428-444). Thousand Oaks: Sage Publications.

Infante, M.J., Silva, S. & Alarcão, I. (1996). Descrição e análise interpretativa de episódios de ensino. Os casos como estratégia de supervisão reflexiva. In I. Alarcão (Org.), *Formação reflexiva de professores. Estratégias de supervisão* (pp. 151-169). Porto: Porto Editora.

Jacobs, V, Franke, M., Carpenter, T., Levi, L. & Battey, D. (2007). Professional Development Focused on Children's Algebraic Reasoning in Elementaty School. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38 (3)*, 258-288.

Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 249-282.

Kaput, J.J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics & Mathematical Sciences Education Board (Eds.), *The nature and role of algebra in K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium*. Washington, DC: National Academy Press.

Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part I: Transforming Task Structure. *Proceedings of the ICMI-Algebra Conference*. Melbourne, Australia, Dec.2001. Acedido Outubro, 1, 2007 em http://www.scps.k12.fl.us/scctm/TextFiles/Educational%20Articles/Algebrafying%20elementary%20mathematicsPart%20I.pdf

Kaput, J, Carraher, D. & Blanton, M. (Eds.) (2008). *Algebra in the early grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kelly, K. (2002). Lesson study: Can Japanese Methods Translate to U.S. Schools? *Harvard Education Letter,vol.18, n.º3*. Acedido Dezembro, 28, 2007 em

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it?. *Mathematics Educator, Vol.8*, *No.1*, 139-151.

Kilpatrick, J. & Silver, E. (2004). Uma tarefa inacabada: Desafios aos educadores matemáticos para as próximas décadas. *Educação Matemática, 80*, 79-85.

Kriegler, S. (2001). *Just what is Algebraic Thinking?*. Submitted for Algebraic Concepts in the Middle School, a special edition of Mathematics Teaching in the Middle School. Department of Mathematics, UCLA. Acedido Outubro, 16, 2008 em http://www.math.ucla.edu/~kriegler/pub/algebrat.html

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching.* New Haven, CT: Yale University Press.

Lesh, R. (2002). Research design in mathematics education: Focusing on design experiments. In Lyn English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 27-49). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Lewis, J. (2008). Through the looking glass: A study of teaching. *Journal for Research in Mathematics Education. A Study of Teaching – Multiple Lenses, Multiple Views. Monograph No 14*, 1 - 12. Reston: NCTM.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental Constructs in Mathematical Education*. London: Routledge-Falmer and The Open University.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St Albans, UK: Tarquin/The Open University.

Mason, J., Drury, H. & Bills, L. (2007). Studies in the zone of proximal awareness. *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Acedido Junho, 11, 2008 em http://www.merga.net.au/documents/keynote42007.pdf.

Matos, J.F. & Carreira, S. (1994). Estudos de caso em Educação Matemática – Problemas actuais. *Quadrante*, *3 (1),* 19-53.

McIntosh, A. (1998). Teaching mental algorithms constructively. In L. Morrow & M. Kenney (Eds.), *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics – 1998 Yearbook* (pp. 44-48). Reston: NCTM.

McIntosh, A., Reys, B. & Reys, R. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics 12 ,* 2-8.

Merriam, S. (1988). *Case Study Research in Education*. San Francisco: Jossey - Bass Publishers.

Mewborn, D. (2001). Teacher's Content Knowledge, Teacher Education, and their Effects on the Preparation of Elementary Teachers in the United States. *Mathematics Education Research Journal, 3*, 28-36.

Ministério da Educação - Departamento da Educação Básica [ME-DEB] (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: ME-DEB.

Ministério da Educação - DGIDC (2007). *Programa de matemática do Ensino Básico.* Acedido Janeiro 7, 2008, em http://www.min-edu.pt/outerFrame.jsp?link=http%3A//www.dgidc.min-edu.pt/

Ministério da Educação – Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular [ME-DGIDC] (2007). *Proposta de Reajustamento do programa de matemática do Ensino Básico.* Acedido Outubro 7, 2007, em http://www.min-edu.pt/outerFrame.jsp?link=http%3A//www.dgidc.min-edu.pt/

Ministério da Educação [ME] (1990). *Ensino Básico 1.º ciclo. Reforma Educativa*. Lisboa: ME-DGEBS.

Ministério da Educação [ME] (2005). *Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do primeiro ciclo*. Acedido Fevereiro 27, 2007, em http://www.eb1mat.min-edu.pt/.

Molina, M. (2007). La integración de pensamento algebraico en educación primaria. In M. Camacho, P. Flores & P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 53-69). Actas do XI Encontro da Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Tenerife: SEIEM.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: NCTM. [Tradução portuguesa: Normas *para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.* Lisboa, APM/IIE, 1991].

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional Standards for teaching mathematics*. Reston: NCTM. [Tradução portuguesa: *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática.* Lisboa, APM/IIE, 1994].

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM. [Tradução portuguesa: *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa, APM, 2007].

National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel.* U.S. Department of Education: Washington, DC.

Nóvoa, A. (1991). O passado e o presente dos professores. In A. Nóvoa (Ed.), *Profissão professor* (pp. 9-32). Porto: Porto Editora.

Nóvoa, A. (1995). Formação de professores e profissão docente. In A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação* (pp. 15-33). Lisboa: Dom Quixote/IIE.

Oliveira, H. (2004). *A construção da identidade profissional de professores de matemática em início de carreira*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa) Lisboa: APM.

Olson, J. & Barrett, J. (2004). Coaching Teachers to Implement Mathematics Reform Recommendations. *Mathematics Teacher Education and development, Vol.6*, 63-78.

Orton, A. (2009). Reflections on pattern in the mathematics curriculum. In I. Vale & A. Barbosa (Orgs.), *Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática/Patterns: Multiple perspectives and contexts in mathematics education* (pp. 15-28). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação – Projecto Padrões.

Orton, J., Orton, A. & Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. In A. Orton (Ed), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassell.

Pacheco, J. (2001). *Currículo: teoria e praxis*. Porto: Porto Editora.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62(3)*, 307-332.

Palhares, P. (2000). *Transição do pré-escolar para o 1.º ano de escolaridade: Análise do ensino e das aprendizagens em matemática.* (Tese de Doutoramento, Universidade do Minho).

Palhares, P., Gomes, A., Carvalho, P. & Cebolo, V. (2009). From teacher education to teacher practice: A gap affecting the implementation of tasks. In B. Clarke, R. Millman & B. Grevholm (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education - Purpose, Use and Exemplars.* New York: Springer.

Pérez, A. (1992). Los procesos de enseñanza-aprendizage:análisis didáctico de las principales teorias del aprendizaje. In J. Gimeno Sacristán & A. Pérez Gómez (Eds.), *Compreender y transformar la enseñanza* (pp. 34-62). Madrid: Morata.

Pérez, A. (1995). O pensamento prático do professor. In A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação* (pp. 115-138). Lisboa: Dom Quixote/IIE.

Perrenoud, P. (2001). O trabalho sobre o *habitus* na formação de professores: análise das práticas e tomada de consciência. Em P.Perrenoud, L.Paquay, M.Altet, e E.Charlier (Eds.), *Formando professores profissionais – Quais estratégias? Quais competências?* (pp. 161-184). Porto Alegre: Artmed Editora.

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In Frank Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Vol.1 (pp. 257-315). Reston: NCTM.

Piaget, J. (1982). Development and Learning. In J. K. Gardner (Ed.), *Readings in Developmental Psychology* (pp. 276-285). Boston: Little, Brown and Company.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery*. New York: John Wiley & Sons.

Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos profesores de matemática e processos de formação. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos & J. P. Ponte (Eds.), *Educação Matemática* (pp. 185-239). Lisboa: IIE/SEM-SPCE.

Ponte, J.P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, *3 (1),* 3-18.

Ponte, J.P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional*.* In *Investigar e formar em educação: Actas do IV congresso da SPCE* (pp. 59-72). Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ponte, J.P. (2000). A investigação sobre o professor de Matemática. Problemas e perspectivas. *Educação Matemática em Revista, 11*, 10-13. Acedido Março 30, 2006, em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/00-Ponte%20(DIF-Brasil).doc

Ponte, J.P. (2003). A crise no ensino da matemática. *Educação Matemática, 71*, 3-8.

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J.P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores. Actas do XVI Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE* (pp. 5-28). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In Lyn English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education (2nd Edition,* pp. 223-261). New York: Taylor and Francis.

Ponte, J. P. (2009). Uma agenda para investigação sobre padrões e regularidades no ensino-aprendizagem da Matemática e na formação de professores. In I. Vale & A. Barbosa (Orgs.), *Padrões: Múltiplas perspectivas e contextos em educação matemática/Patterns: Multiple perspectives and contexts in mathematics education* (pp. 169-175). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação – Projecto Padrões.

Ponte, J.P. & Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante, 7*(1), 3-33.

Ponte, J.P., Matos, J. & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática. Implicações curriculares.* Lisboa : IIE.

Pope, M. (1988). Anteojos construtivistas: Implicaciones para los procesos de enseñanza-aprendizage. In Luis Angulo (Dir.), *Conocimientos, creencias e teorias de los profesores. Implicaciones para el curriculum y la formación del profesorado* (pp. 149-174)*.* Alcoy: Editorial Marfil.

Popper, K. (2003). *Conjecturas e refutações*. Coimbra: Almedina.

Prenzel, M. & Ostermeier, C. (2006). Improving mathematics and science instruction: A program for the professional development of teachers. In F. Oser, F. Achtenhagen & U. Renold (Eds.), *Competence Oriented Teacher Training* (pp. 79-96). Rotterdam: Sense Publishers.

Putnam, R. & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning?. *Educational Researcher, 21*(1), 4-15.

Radford, L. (1996). The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Elementary Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective – Perspectives for Research and Teaching. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 39-53). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In J. Alatorre, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Vol. 1*, pp. 2-21.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education, 40*, 83–96.

Radford, L., Bardini, C. & Sabena, C. (2007). Perceiving the General: The Multisemiotic Dimension of Students' Algebraic Activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 38 (5)*, 507-530.

Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present and future. *Elementary School Journal, 84(5)*, 546-557.

Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D. & Smith, N. (2007). *Helping Children Learn Mathematics*. Danvers, MA: John Wiley & Sons.

Reys, R., Reys, B., Nohda, N. & Emori, H. (1995). Mental Computation Performance and Strategy Use of Japanese Students in Grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26 (4)*, 304-326.

Rivera, F. (2006). Changing the face of Arithmetic: Teaching Children Algebra. *Teaching Children Mathematics, 12(6)*, 306-311.

Rivera, F. & Becker, J. (2007). Abduction-induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 140-155.

Rocha, I. (1995). A didáctica da Matemática no desenvolvimento profissional dos professores do 1.º ciclo. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Roldão, M.C. (2005). Formação de professores, construção do saber profissional e cultura da profissionalização: que triangulação?. In Luísa Alonso e Maria do Céu Roldão (Coords.), *Ser professor do 1.º ciclo: construindo a profissão.* Coimbra: Almedina.

Roldão, M.C. (2007). Teacher's role: nature and construction of professional knowledge. *Rev. Bras. Educ.*, Rio de Janeiro, v. 12, n. 34. Acedido Julho, 18, 2007 em: http://www.scielo.br/scielo. Pré-publicação.

Sá-Chaves, I. (2000). *Portfolios Reflexivos: Estratégia de Formação e de Supervisão*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Santos, L. (2006). *Portefólio: o quê e para quê?* Conferência apresentada no Seminário final do PFCM. Viana do Castelo, 6 de Julho.

Schifter, D., Monk, S., Russell, S. & Bastable, V. (2008). Early algebra: What does understanding the laws of arithmetic mean in the elementary grades? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 413-447). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schliemann, A., Carraher, D. & Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic. From children's ideas to classroom practice.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. (2002). Research Methods in (Mathematics) Education. In Lyn English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 435-587). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. (2008). On Modeling Teachers' In-the-Moment Decision Making. *Journal for Research in Mathematics Education. A Study of Teaching – Multiple Lenses, Multiple Views. Monograph No 14*, 45-96. Reston: NCTM.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: how professionals think in action*. London: Avebury.

Schön, D. (1995). A formação de professores: novas perspectivas baseadas na investigação sobre o pensamento do professor. In A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação* (pp. 77-91). Lisboa: Dom Quixote/IIE.

Serrazina, L. (1998). *Teacher´s professional development in a period of radical change in primary mathematics education in Portugal* (Tese de doutoramento, Universidade de Londres). Lisboa: APM.

Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. Em AMP (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: APM.

Sfard, A. (2000). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning, 2(3)*, 157-189.

Sfard, A. (2001). Learning mathematics as developing a discourse. In R. Speiser, C. Maher, C. Walter (Eds), *Proceedings of 21st Conference of PME-NA* (pp. 23-44). Columbus, Ohio: Clearing House for Science, mathematics, and Environmental Education.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(2)*, 4-14.

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Silver, E., Mills, V., Castro, A., Ghousseini, H. & Stylianides, G. (2007). Complementary approaches to mathematics teacher professional development: integrating case analysis and lesson study in the BI:FOCAL project. [CD-ROM]. *Proceedings of the 15th ICMI Study, The Professional Education and development of Teachers of mathematics*, Águas de Lindóia, Brazil, 15-21 May 2005. Unesp.

Silver, E.A., & Stein, M.K. (1996). The QUASAR Project: The "revolution of the possible" in mathematics instructional reform in urban middle schools. *Urban Education, 30(4)*, 476-521.

Simon, M. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 26(1)*, 71-94.

Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. In Frank Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Vol.1 (pp. 157-224). Reston: NCTM.

Sprinthall, N. & Sprinthall, R. (1993). *Psicologia educacional*. Lisboa: McGraw-Hill.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20(2)*, 147-164.

Stake, R. (1994). Case Studies. In N. Denzin e Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 236-247). Thousand Oaks: Sage Publications.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 268–275.

Stein, M. K., Remillard, J. & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In Frank Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Vol.1 (pp. 319-367). Reston: NCTM.

Tardif, M. & Gauthier, C. (2001). O professor como "ator racional": que racionalidade, que saber, que julgamento?. In P.Perrenoud, L.Paquay, M.Altet, e E.Charlier (Eds.), *Formando professores profissionais – Quais estratégias? Quais competências?* (pp. 185-210). Porto Alegre: Artmed Editora.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 29-47.

Usiskin, Z. (1999). Doing Álgebra in Grades K-4. In Barbara Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12 – Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*. Reston: NCTM.

Vale, I. (2002). *Didáctica da matemática e formação inicial de professores num contexto de resolução de problemas e de materiais manipuláveis* (Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro). Lisboa: APM.

Vale, I. (2004). Algumas Notas sobre Investigação Qualitativa em Educação Matemática – O Estudo de Caso. In Isabel Vale e José Portela (Eds.), *Revista da Escola Superior de Educação, 5.º Volume.*(pp. 171–202). Viana do Castelo: ESEVC.

Vale, I. & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal do currículo. *Educação & Matemática, 85*, 14-21.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática – propostas curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: ESEVC – Projecto Padrões.

Vale, I., Fão, A., Alvatenga, D., Geraldes, F., Sousa, R. & Pimentel, T. (2008). *Matemática no 1.º e 2.º ciclos: Propostas para a sala de aula.* Viana do Castelo: ESEVC – m1 e m2.

Vale, I., Fão, A., Cabodeira, F., Portela, F., Geraldes, F., Fonseca, L. & Pimentel, T. (2007). *Matemática no 1.º ciclo: Mais propostas para a sala de aula.* Viana do Castelo: ESEVC – m1.

Vale, I., Fão, A., Portela, F., Geraldes, F., Fonseca, L., Gigante, M., Lima, S. & Pimentel, T. (2006). *Matemática no 1.º ciclo: Propostas para a sala de aula.* Viana do Castelo: ESEVC – m1.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I. & Borralho, A. (2006). In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores. Actas do XVI Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE* (pp. 193-212). Lisboa: SEM-SPCE.

Van de Walle, J. (2007). *Elementary and Middle School Mathematics – Teaching Developmentally*. Boston: Pearson.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotsky, L. (2000). *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes.

Warren, E. (2006). Supporting learning in early algebra: a model of professional learning. *Proceedings of MERGA 29, Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 535-542), Camberra, Australia.

Warren, E. & Cooper, T. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: a case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childwood*, *6 (2)*, 150-162.

Warren, E. & Cooper, T. (2008). Patterns That Support Early Algebraic Thinking in the Elementary School. In Carole Greenes & Rheta Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics – Seventieth Yearbook* (pp. 113-126). Reston: NCTM.

Warren, E., Cooper, T. & Lamb, J. (2006). Teacher Professional Development in Patterns and Algebra: Being Sensitive to a Teacher's Zone of Proximal Development. In P. Grootenboer, R. Zevenberger & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, Cultures and Learning Spaces.* (Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, pp. 543-550). Camberra: MERGA.

Wollring, B. (2003). Linking pre-service and in-service teacher training: co-operative design of working environments for primary mathematics. *Proceedings of CERME 3: Third Conference in the European Society for Research in Mathematics Education.* Bellaria, Italy.

Yin, R. (2005). *Estudo de caso. Planejamento e métodos.* Porto Alegre: Bookman.

Yinger, R. e Clarke, C. (1988). El uso de documentos personales en el estudio del pensamento del profesor. In Luis Angulo (Dir.), *Conocimientos, creencias e teorias de los profesores. Implicaciones para el curriculum y la formación del profesorado* (pp. 175-195)*.* Alcoy: Editorial Marfil.

Zeichner, K. (1995). O pensamento prático do professor - A formação do professor como profissional reflexivo. In A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação* (pp. 115-138). Lisboa: Dom Quixote/IIE.

ANEXOS

Anexo A – Instrumentos utilizados na recolha de dados

Guião de observação de aulas e de elaboração do relatório.

Guiões das entrevistas.

Guião de observação de aulas e de elaboração do relatório

Identificação	Professor(a): Ano N° alunos Data: Hora:
Ambiente da aula	Disposição da turma Motivação pelo professor Interesse e envolvimento dos alunos
Tarefas propostas e recursos	Materiais utilizados
Papel do professor	Tipo de intervenção Resposta às solicitações dos alunos Questionamento Gestão do tempo Ritmo Dificuldades
Papel dos alunos	Reacção às tarefas (autonomia, dependência do professor, persistência, curiosidade, ...) Interacções com o professor e com os outros alunos Dificuldades
Produção matemática dos alunos	Raciocínios Descobertas Estabelecimento de relações Processos de generalização Argumentação Comunicação matemática
Comentários	

Guião da 1ª entrevista

- Caracterização da pessoa
    - idade
    - formação académica
    - porque escolheu esta profissão
    - ...
- O que o(a) levou a aderir ao programa?

(se é do 2º ano, caracterize um pouco o 1º ano de formação e diga se considera que houve evolução e em que aspectos)

- Como é a sua relação com a Matemática?
- Na sua opinião, quais os factores que mais contribuem para as dificuldades dos alunos com a matemática?
- Acha que pode ajudar os seus alunos a desenvolverem competências a nível da matemática?
- Descreva uma sua aula de matemática típica ...
- Acha que um professor do 1º ciclo possui conhecimentos suficientes para ensinar Matemática?
- ...

Guião da 2ª entrevista

- Para quê ensinar e aprender matemática, quais as principais finalidades?
- Qual o papel dos problemas, das investigações, dos exercícios e actividades de rotina, no ensino da matemática?
- Os materiais influem na aprendizagem? De que modo?

Quando falo em materiais refiro-me não só aos materiais manipuláveis mas ao manual escolar, fichas próprias ou compradas, pesquisas em livros ou na Internet, ...

- Quais as formas de organização do trabalho que acha mais eficazes, individual, grupo, pares, toda a turma?
- Que formações frequentou anteriores a esta?
- Que balanço faz neste momento deste programa de formação, agora que estamos a meio do ano lectivo?
    - que diferenças para as outras formações
    - quanto às sessões de formação
    - quanto ao acompanhamento em sala de aula
- ...

Guião da 3ª entrevista

Balanço geral deste ano de formação, atendendo aos seguintes aspectos que são as vertentes principais do programa:

- Sessões de formação conjuntas
- Acompanhamento em sala de aula
- Reflexão sobre as aulas
- Partilha de experiências
- Portefólio

Guião da 4ª entrevista

Conversa informal decorrendo de modo fluido sobre:

- a turma
- os manuais escolares
- o trabalho autónomo
- conversa e sugestões sobre a definição do tema a explorar no trabalho autónomo bem como da respectiva calendarização.

Guião da 5ª entrevista

Realizada à luz do visionamento do registo vídeo da aula de trabalho autónomo.

- Pontos fortes e fracos da actuação na aula, no que diz respeito
    - tarefas e recursos apresentados
    - conteúdos matemáticos envolvidos
    - intervenção do professor nomeadamente no questionamento planeado e no que foi efectivamente feito
    - comunicação
    - ambiente da sala de aula
- Análise de produções escritas e de modo geral das reacções e aprendizagens dos alunos.

Guião da 6ª entrevista

1. O que é para si um bom professor de matemática?

2. Qual é, neste momento, o seu posicionamento em relação ao ensino da matemática (em termos de gosto, de à-vontade, de eficácia, ...)? O que é que evoluiu na sua prática profissional?

3. O que é para si um bom aluno a matemática?

4. Qual é, neste momento, a relação dos seus alunos com a matemática (em termos de gosto, de evolução, de aprendizagens, ...)?

5. Ordene por ordem decrescente de valor, em termos de reflexos na sua actividade profissional, as diferentes vertentes do Programa de Formação Contínua (1-maior valor; 6-menor valor):

Sessões de formação conjuntas _____	Acompanhamento em sala de aula _____
Reflexão sobre as aulas _____	Partilha de experiências de sala de aula _____
Trabalho autónomo _____	Portefólio _____

6. Ordene por ordem decrescente de valor, em termos de aprofundamento matemático e didáctico, os diferentes temas tratados no Programa de Formação Contínua (1-maior valor):

Número e operações _____	Cálculo mental _____
Fracções _____	Geometria _____
Probabilidades _____	Estatística _____
Álgebra _____	Resolução de problemas _____
Comunicação e dinâmica de sala de aula _____	Outro(Qual?)_____

7. Em que medida é que sente que o aprofundamento do seu conhecimento matemático e didáctico (se se efectuou) se relaciona com as suas práticas?

8. Recordando as tarefas matemáticas que foi propondo aos alunos nos últimos dois anos, procure escolher a que gostou mais de trabalhar com eles. Quais as razões da sua escolha?

9. Quais foram para si os aspectos mais importantes do Programa?

10. Quais pensa serem e virem a ser os reflexos, a médio e a longo prazo, da sua frequência do Programa de formação contínua? Por outras palavras, sente-se diferente como professor de matemática ou as alterações pontuais tendem a estabilizar?

11. O que pensa que o Programa deveria ter facultado e não o fez?

12. Uma das finalidades do Programa era deixar nas escolas dinamizadores ligados à matemática. Pensa poder ser essa pessoa?

Anexo B - Calendarização das sessões de recolha de dados

Calendarização das sessões de recolha de dados – Ano lectivo 2006/07

	Ana	Guilherme	Leonor	Sílvia
Entrevista 1	23/11/2006	27/11/2006	23/11/2006	12/12/2006
Entrevista 2	07/03/07	05/03/07	01/03/07	06/03/07
Entrevista 3	10/07/07	12/07/07	09/07/07	12/07/07
Aula e reflexão 1-1	08/01/2007	08/01/2007	06/11/2006	30/01/2007
Aula e reflexão 2-1	26/02/2007	26/02/2007	04/12/2006	15/02/2007
Aula e reflexão 3-1	10/04/2007	10/04/2007	05/02/2007	20/03/2007
Aula e reflexão 4-1	04/06/2007	08/06/2007	12/03/2007	15/05/2007
Aula e reflexão 5-1			07/05/2007	

Calendarização das sessões de recolha de dados – Ano lectivo 2007/08

	Ana	Guilherme	Leonor	Sílvia
Entrevista 4	11/12/ 2007	11/12/ 2007	Na escola	03/12/ 2007
Entrevista 5	07/03/2008	07/04/2008	05/05/2008	31/03/2008
Entrevista 6	11/07/2008	15/07/2008	30/06/2008	14/07/2008
Aula e reflexão 1-2	19/11/2007	28/11/2007	23/11/2007	11/12/2007
Aula e reflexão 2-2	21/01/2008	30/01/2008	25/01/2008	29/01/2008
Aula e reflexão 3-2	18/02/2008	05/03/2008	18/04/2008	04/03/2008
Aula e reflexão 4-2	31/03/2008	23/05/2008	12/06/2008	15/04/2008
Aula e reflexão 5-2	05/05/2008	06/06/2008	–	27/05/2008
Validação dos casos	Outubro 2009	Outubro 2009	Outubro 2009	Outubro 2009

Anexo C - Categorias de análise

Apresentação
Percurso académico e profissional
Relação com a matemática enquanto estudante
Formação matemática na formação inicial (e complementar/auto-formação)

Retrato profissional prévio
Perspectivas sobre o ensino e a aprendizagem da matemática
Dificuldades/Necessidades de formação

O percurso profissional ao longo do programa

As sessões de formação		
A prática de sala de aula	Ambiente	
	As tarefas e os recursos	
	Papel do professor	
	Papel dos alunos	
	Produção matemática dos alunos	contagens visuais padrões de repetição em sequências padrões de crescimento em sequências problemas de padrão padrões no cálculo mental propriedades das operações como generalização de factos numéricos relacionamento entre operações; sentido das operações raciocínio funcional descoberta de invariantes numéricos generalização da aritmética.
O trabalho autónomo		
O acompanhamento em sala de aula	Relação com a formadora	
A reflexão	O portefólio	
A partilha de experiências		

Reflexos do programa
No conhecimento matemático e didáctico e na prática de sala de aula
Nas perspectivas do professor sobre a matemática e o seu ensino
Nas atitudes e aprendizagens dos alunos
Aspectos menos conseguidos
Perspectivas para o futuro

Anexo D - Guião para a elaboração do portefólio

Guião para a elaboração do Portefólio

Finalidade: Elemento de avaliação dos formandos.
Objectivo: Apresentar de forma detalhada, sistemática e reflexiva, o trabalho desenvolvido nas sessões de formação e de acompanhamento.

Organização e conteúdo:

1 – Introdução

- Identificação e apresentação (pessoal);

- Apresentação do conteúdo (dependendo dos casos, poderá ser feita pequena fundamentação que explicite a selecção do tema geral ou do tipo de tarefas – p.e., a importância dos projectos, jogos, resolução de problemas, investigações).

2 – As tarefas escolhidas

– Justificação da selecção das duas tarefas preparadas para os alunos e exploradas na sala de aula (por exemplo: ligação aos temas de ensino, experiências de aprendizagem a proporcionar, objectivos a atingir, etc.)

– Apresentação das tarefas;

– Reflexão sobre a realização das tarefas tendo por base a análise das produções dos alunos e a exploração feita pelo professor, podendo contemplar os seguintes aspectos:

- Formas de organização do trabalho (grupo, pares, etc.);
- Reacções dos alunos;
- Diferentes formas de resolução;
- Diálogos/interacções dos alunos entre si e com o professor;
- Aprendizagens matemáticas realizadas;
- Dificuldades sentidas e formas de superação.

– Reflexão do professor sobre o trabalho realizado.

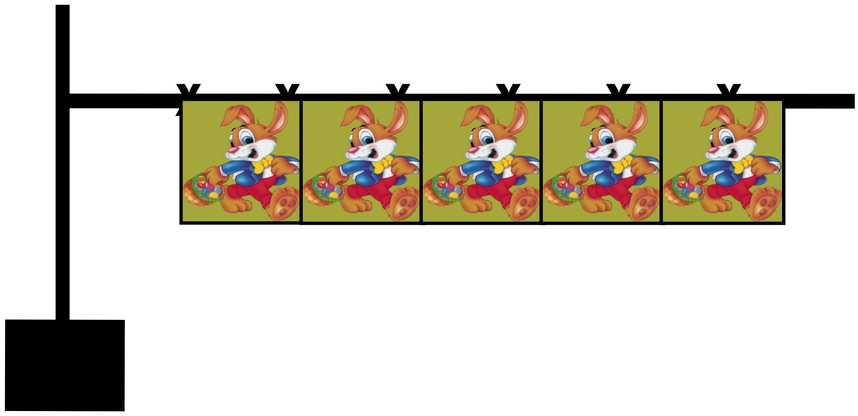
3 – Análise crítica sobre a formação no seu todo, nomeadamente em sessões conjuntas, sessões de acompanhamento e outros aspectos que cada formando entender ser pertinente abordar, analisando de que forma estas diferentes vertentes se articularam.

Anexo E – Tarefas utilizadas por Ana nas aulas descritas no Capítulo 7 apresentadas em suporte de papel

(Algumas imagens foram reduzidas por economia de espaço)

Ana - Aula de 05/04/2007

A mãe da Rita, na Páscoa, usou muitos guardanapos.



Depois de os lavar pendurou-os como se mostra:

Ajuda a Rita a descobrir quantas molas a mãe dela precisa para pendurar os seguintes guardanapos:

- **5** ☐
- **6** ☐
- **7** ☐
- **10** ☐

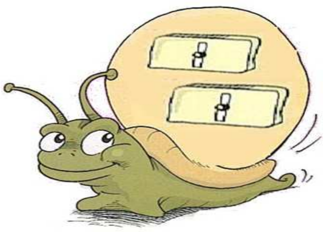
Explica como pensaste.

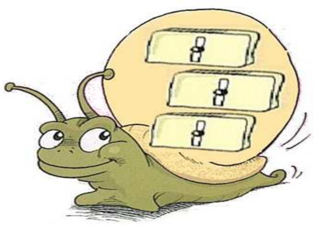
Ana - Aula de 19/11/2007

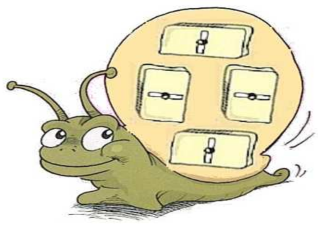
Usando as peças do teu dominó faz com que o caracol tenha 10 pontos.

Encontra diferentes maneiras, utilizando:

2 peças **3 peças** **4 peças**

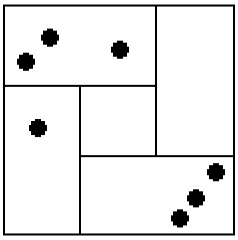






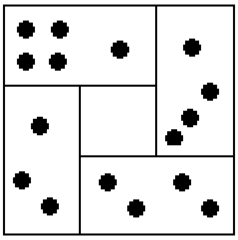
Estas quatro peças de dominó formam um quadrado de dominó.

Chama-se assim porque a soma das pintas em cada lado é a mesma.



Neste caso a soma é três.

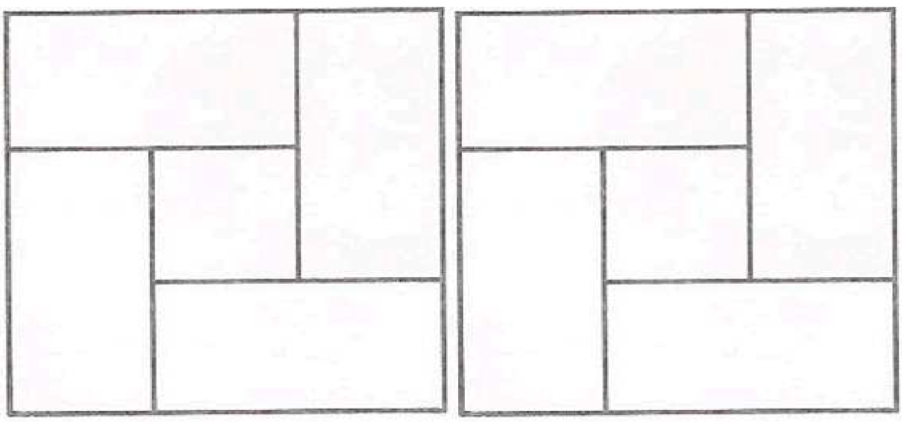
Constrói este quadrado.



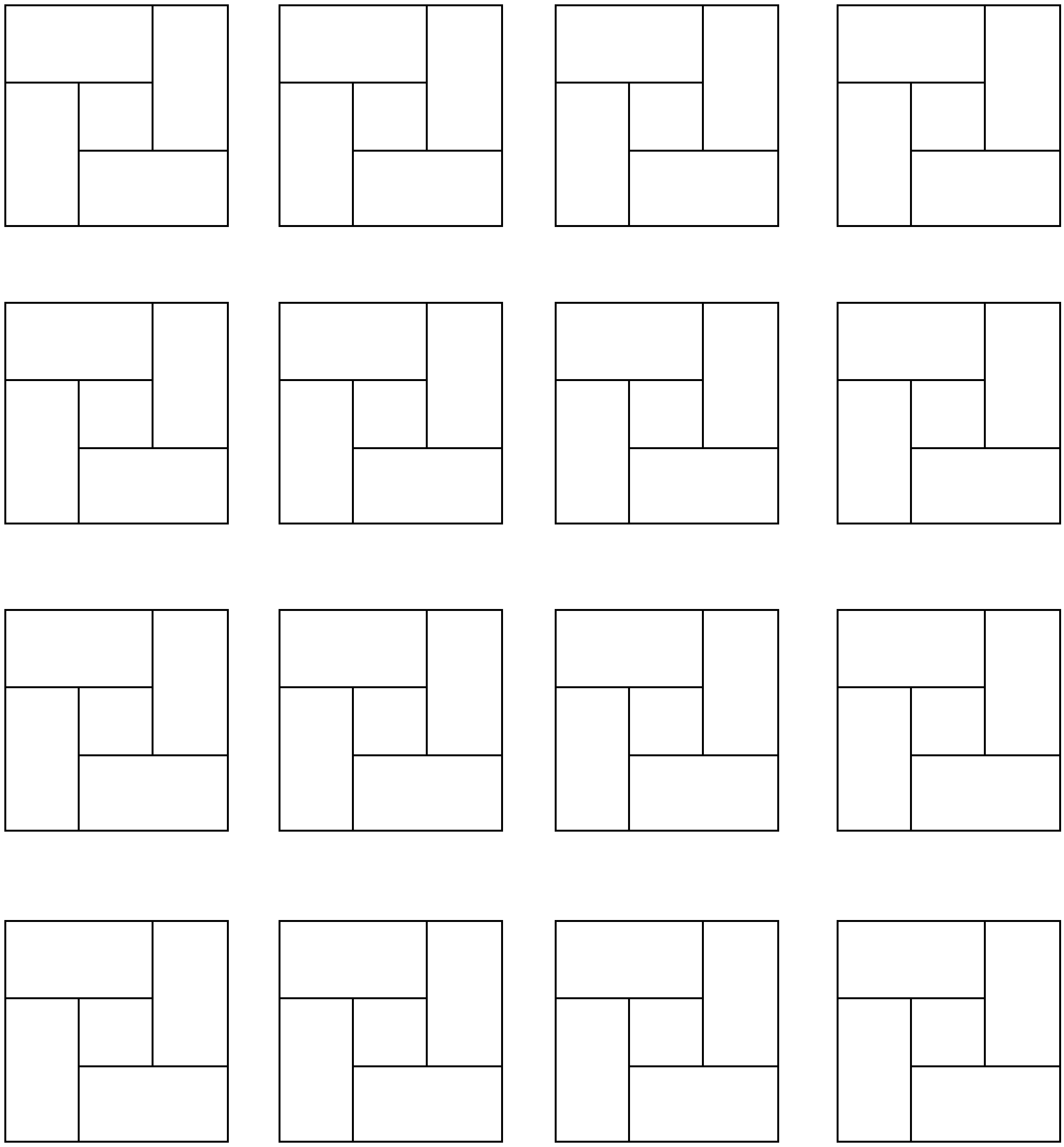
Vês agora outro quadrado de dominó.

Qual é a soma dos lados?

Constrói também este quadrado.



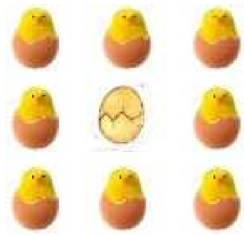
Folha de Registo

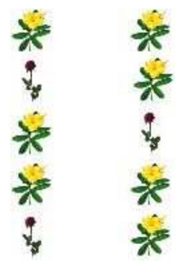


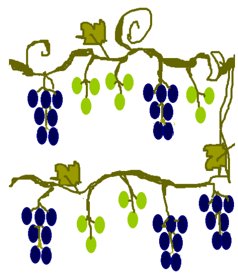
Quantos quadrados mais conseguiste fazer? ________________________________

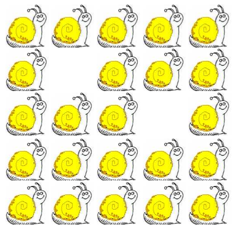
Ana - Aula de 31/03/2008

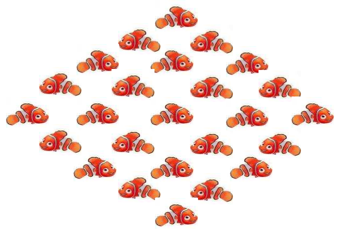
Folha de registo

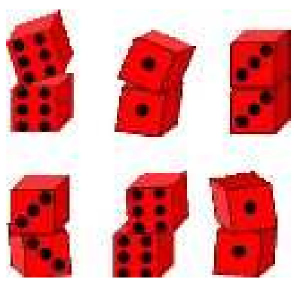






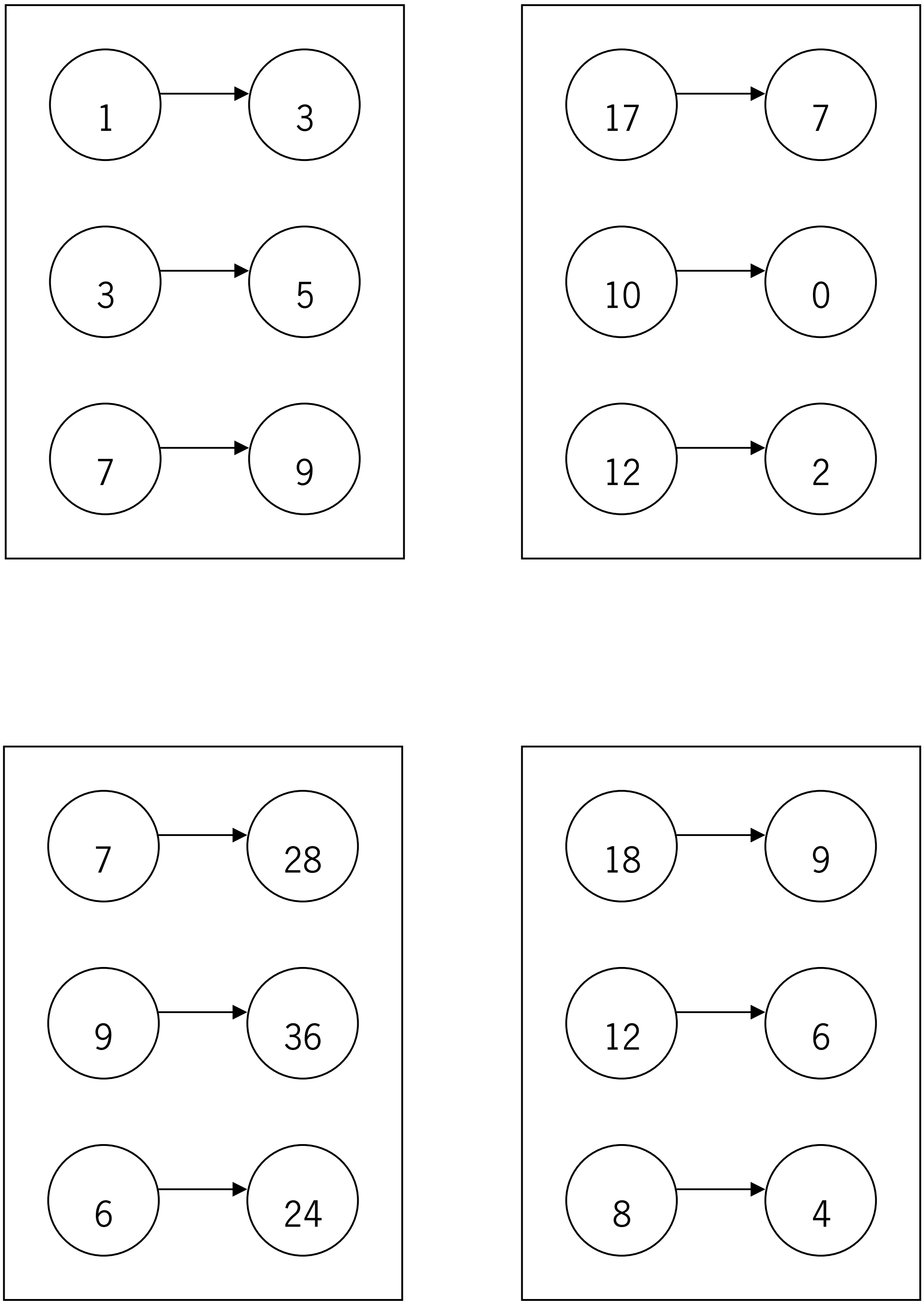




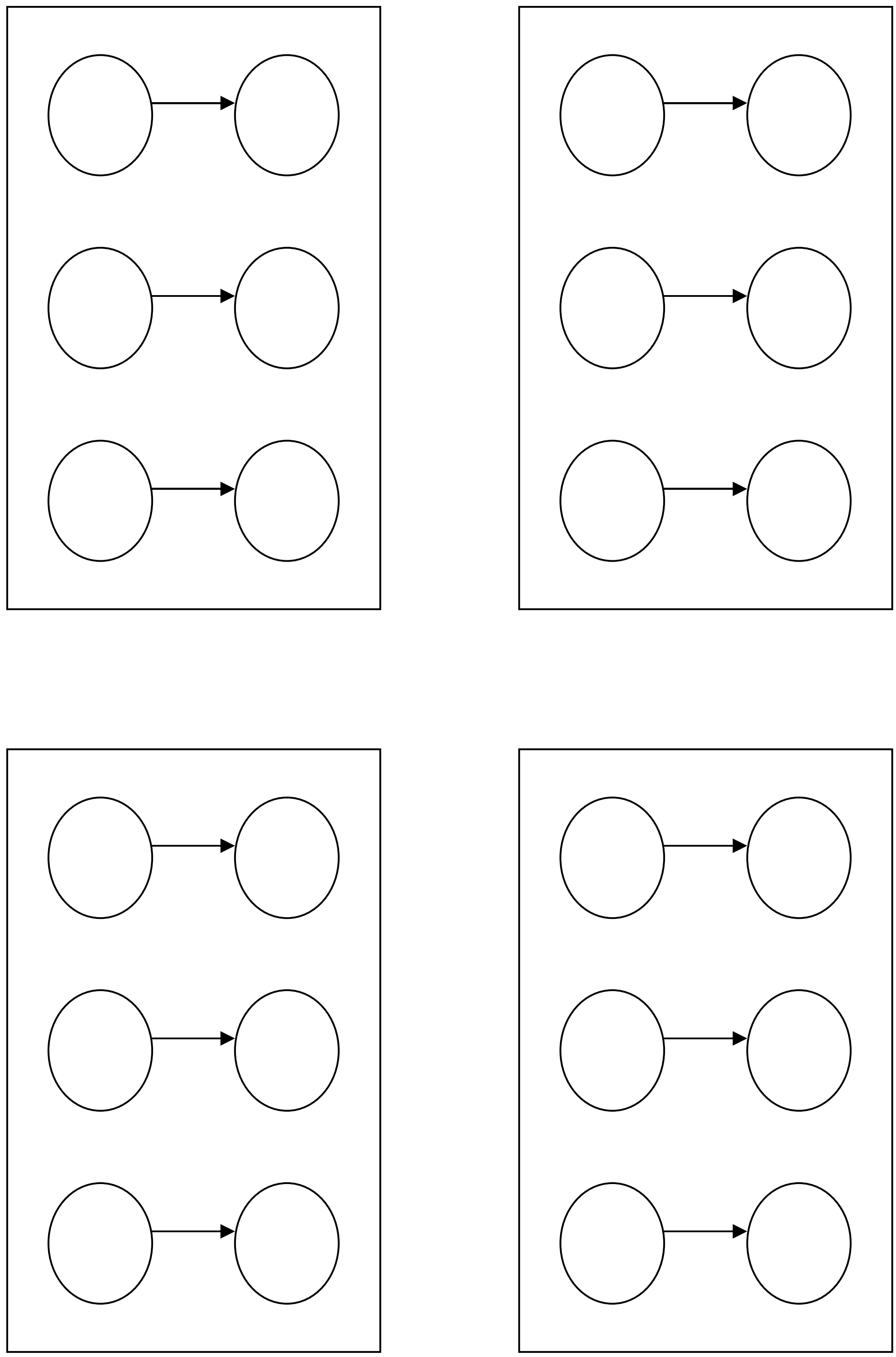


Ana - Aula de 05/05/2008

Descobre o segredo



Mostra os teus segredos



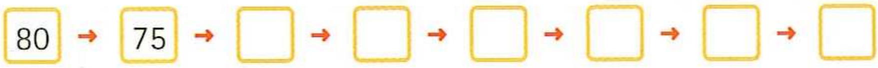
Anexo F – Tarefas utilizadas por Guilherme nas aulas descritas no Capítulo 8 apresentadas em suporte de papel

(Algumas imagens foram reduzidas por economia de espaço)

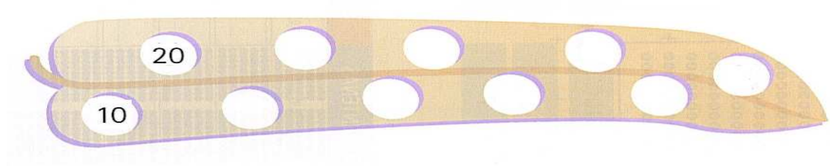
Guilherme - Aula de 26/02/2007

Completa as sequências. Diz qual o <u>Padrão</u>.

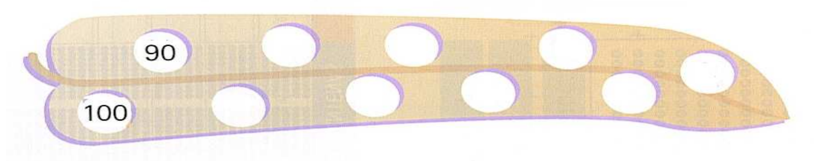
O padrão é: _____.



O padrão é: _____.

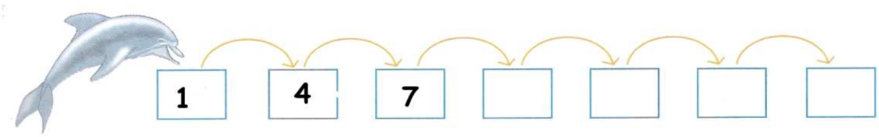


O padrão é: _____.

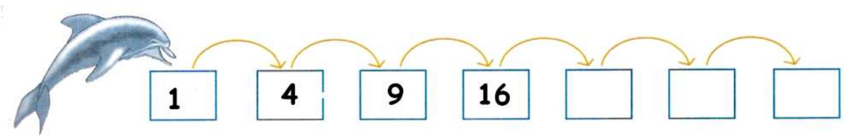


O padrão é: _____.

Completa as sequências. Diz qual o <u>Padrão</u>.



O padrão é: ____



O padrão é: ____

Guilherme - Aula de 10/03/2008

1 – Procurando padrões

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Sobrepõe, em vários sítios do quadrado do 100, cada uma das figuras dadas e tenta explicar o padrão numérico que obténs.

1. 2.

3.

4.

5.

1.

2.

3.

4.

5.

2 – Investigando mais…

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Observa o quadrado, com <u>4 quadrículas</u>, formado pelo n.º 2, 3, 12 e 13. Qual é a soma dos números diagonalmente opostos? _______ e _______. Observas algo particular nessa soma? ___________________________. Observa agora os restantes quadrados. Acontece o mesmo? __________. Porquê? ____.	**Algoritmo** D U	**Algoritmo** D U

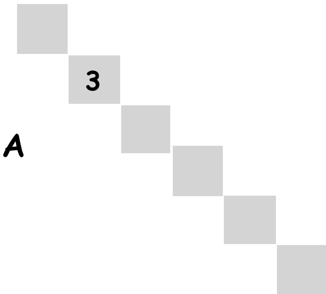
Observa o quadrado formado pelos números 15, 17, 35 e 37. Eles formam um quadrado composto por <u>9 quadrículas</u>. Se somares os números diagonalmente opostos, o que acontece? ________ ____. Porquê? ____.	**Algoritmo** **D U**	**Algoritmo** **D U**

Observa agora o quadrado formado pelos números 21, 24, 51 e 54. Este quadrado é composto por _____ quadrículas. O que observas? ____. E se fosse um quadrado formado por 25 quadrículas? ________________ ____.	**Algoritmo** **D** | **U**	**Algoritmo** **D** | **U**

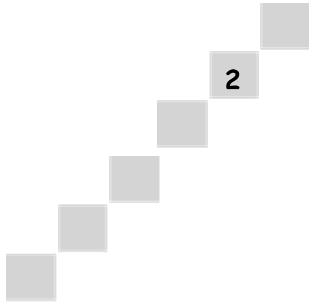
3 – Completando Quadrados do 100…

Abaixo estão representadas várias partes de um quadrado do 100, mas infelizmente faltam alguns números. Consegues descobri-los?

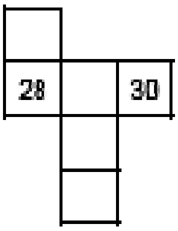
A



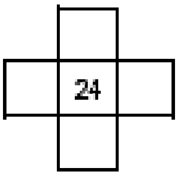
B-



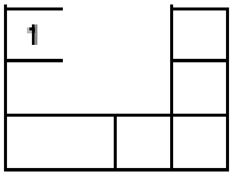
1.



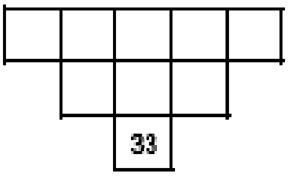
2.



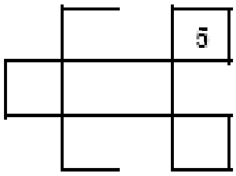
3.



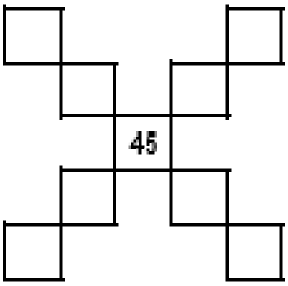
4.



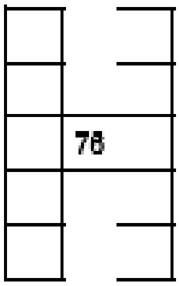
5.



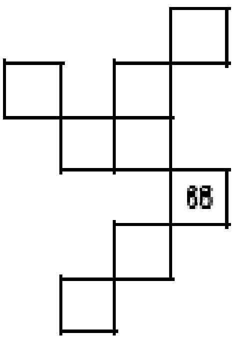
6.



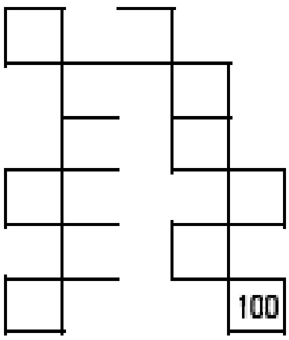
7.



8.



9.



4 – À procura do número escondido

Um quadrado do 100 foi reproduzido em ambos os lados de uma folha, de tal modo que um quadrado está imediatamente atrás do outro.

Qual será o número que está atrás do 100? _______________

E do 59? _____________

E do 23? _____________

E do 28? _____________

E do 19? _____________

E do 72? _____________

E do 45? _____________

E do 01? _____________

E do 84? _____________

Consegues arranjar uma forma que explique como se obtêm estas respostas?

____

____

____

____

____

____

Guilherme - Aula de 23/05/2008

Caixa Mágica

<u>Actividade 1</u>: "*A Regra Escondida*"

- Regista os números que entram e os que saem da *Caixa Mágica*. Descobre a regra escondida: regularidade / padrão.

Jogo 1

Entrada	Saída

Regra: ______________________________

Jogo 2

Entrada	Saída

Regra: ______________________________

Jogo 3

Entrada	Saída

Regra: ______________________________

Jogo 4

Entrada	Saída

Regra: ______________________________

Caixa Mágica

<u>Actividade 2</u>: “***A Regra Inventada***”

- Inventa uma regra e joga com os teus colegas – <u>Será que eles irão descobrir?</u>

Jogo 1		Jogo 2	
Entrada	**Saída**	**Entrada**	**Saída**

Regra: ____________________________

Regra: ____________________________

Jogo 3		Jogo 4	
Entrada	**Saída**	**Entrada**	**Saída**

Regra: ____________________________

Regra: ____________________________

Guilherme - Aula de 06/06/2008

Que dinheiro tenho?

				
_______ €				
_______ €				
_______ €				
_______ €				
_______ €				
_______ €				
_______ €				
_______ €				
_______ €				

De que dinheiro preciso?

			
3 €			
7 €			
11 €			
14 €			
15 €			
18 €			
20 €			
25 €			
26 €			

Anexo G – Tarefas utilizadas por Leonor nas aulas descritas no Capítulo 9 apresentadas em suporte de papel

(Algumas imagens foram reduzidas por economia de espaço)

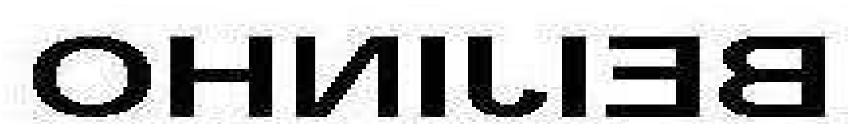
Leonor - Aula de 05/02/2007

CURIOSIDADES DO PLANETA *CARA METADE*

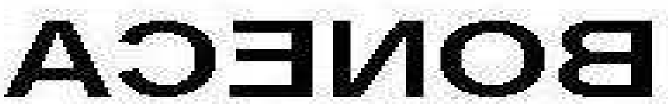
Desenha o Caló e a Milita e usa o espelho para os veres melhor:

Descobre a mensagem que a Milita enviou ao Asdrúbal:

A MILITA MANDA UM…



Sabes qual é o seu brinquedo preferido?



Vê se consegues ler a mensagem seguinte. Depois repete-a rapidamente.

E o teu nome, será que consegues escrevê-lo do outro lado do espelho?

4-Completa, de modo a ficarem imagens simétricas

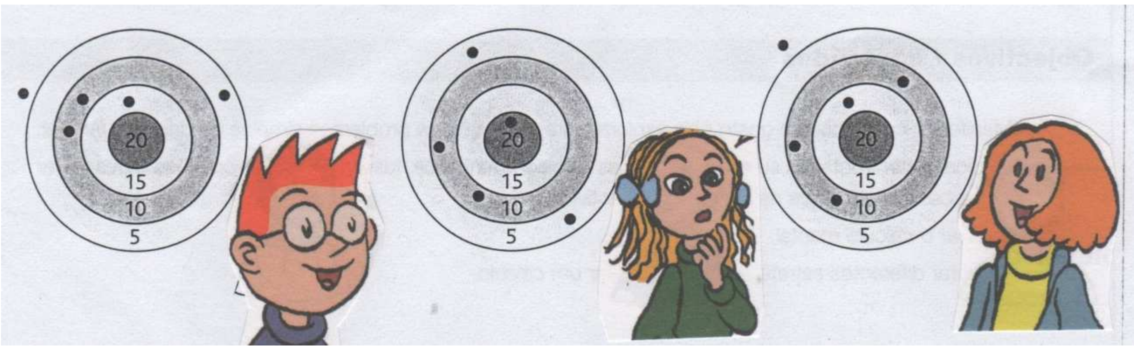
○		○
○		
○		
	○	○

○				○			○
	○	○					
							○

Leonor - Aula de 07/05/2007

ACERTA NO ALVO

Estes amigos, o Tiago, a Ana e a Helena, resolveram jogar ao jogo " Acerta no Alvo ". Repara e calcula mentalmente os pontos que fizeram.



Tiago__________	Ana __________	Helena ________

- Escreve, por baixo de cada menino, o número de pontos que cada um obteve.
- Quem ganhou o jogo?____
- Porquê____

____

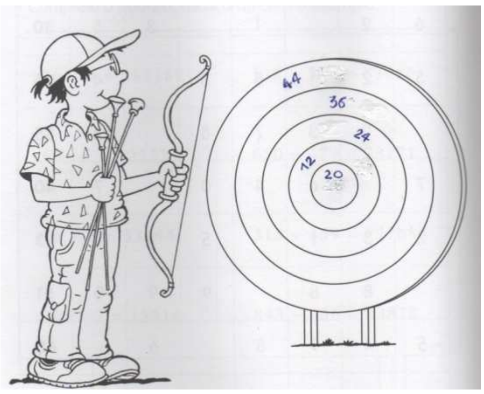
- Quantos pontos faltaram ao Tiago para ter tantos pontos como a Ana?

____

- Se a Helena atirar mais duas setas, e acertar no centro do alvo, quantos pontos extra poderá fazer?

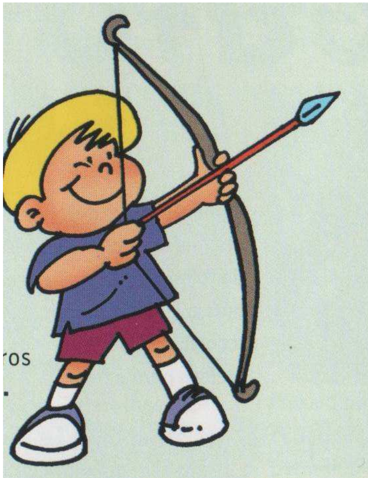
____

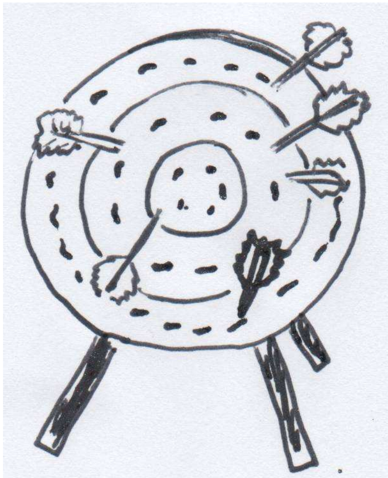
- Como poderá este menino marcar 124 pontos com apenas 3 flechas ?



R: ____________________________

ACERTA NO ALVO





Depois dos teus colegas acertarem no alvo, completa com os números obtidos:

Número	Algarismo da ordem das centenas	Algarismo da ordem das dezenas	Algarismo da ordem das unidades	Quantas dezenas existem no número?	Quantas unidades existem no número?

Cálculo Mental

Marcha dos cem metros

1. A pista onde vais fazer a prova de atletismo em marcha tem 100 metros de comprimento.

1.1 na sala de aulas, regista o número de metros que percorreste em 30 segundos.

NOMES	NÚMERO DE METROS QUE CADA MENINO PERCORREU EM 30 SEGUNDOS	NÚMERO DE METROS QUE FALTAVA PARA TERMINAR A MARCHA DOS 100 M	COLOCAÇÃO POR ORDEM

1.2 regista na tabela o número de metros que cada um dos teus colegas percorreu.

1.3 regista na tabela o número de metros que faltava a cada menino para terminar a marcha.

1.4 em relação ao comprimento percorrido por cada menino ao fim de trinta segundos (meio minuto), em que lugar ficou cada um? Regista na tabela.

1.5 em que lugar ficaste?

____

2. Faz uma estimativa do tempo que te demoraria a percorrer a pista toda (posteriormente podes verificar se fizeste uma boa estimativa).

____

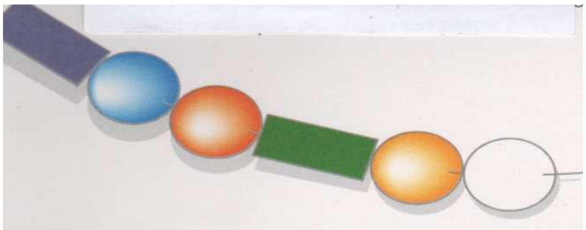
3. Se a pista tivesse 200 metros, quantos metros te faltariam percorrer?

____

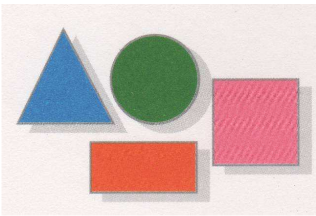
Leonor - Aula de 23/11/2007

1- A Paula fez ontem 6 anos. Como ele gosta muito de colares, a mãe decidiu oferecer-lhe uma caixa para ela construir os próprios colares.

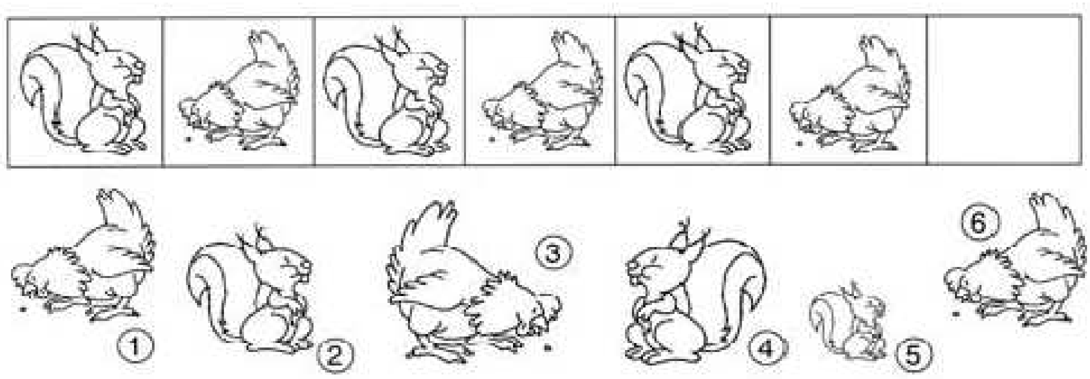
2.-A Paula já começou a construir este colar. Como será que ela o vai completar?



3- Na caixa da Paula existem muitas destas figuras. Vamos ajudá-la a construir outro colar?



4- O que será que vem a seguir?



5- Completa a série de algarismos

1	2	3	4	5	1			4			2			5

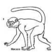
Leonor - Aula de 25/01/2008

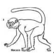
AINDA NÃO ESTÃO CONTENTES ?

DESENHA: **« ALDEIA DOS MACACOS»**

VAMOS RESOLVER A SITUAÇÃO:

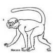
1º PASSO :

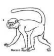
 Almoço : _____ bananas

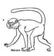
À tardinha: _____ bananas

_______ + _______ = _______

2º PASSO :

 Almoço : _____ bananas

Merenda/lanche: _____ bananas

 Jantar : _____ bananas

_______ + _______ + _______ = _______

3º PASSO :

- Pequeno- almoço. _____ bananas
- Almoço : _____ bananas
- Merenda/Lanche: _____ bananas
- Jantar : _____ bananas

_______ + _______ + _______ + _______ = _______

4º PASSO :

- Pequeno- almoço. _____ bananas
- Almoço : _____ bananas
- Merenda/Lanche: _____ bananas
- Jantar : _____ bananas
- Ceia : _____ bananas

_______ + _______ + _______ + _______ + _______ = _______

A QUE CONCLUSÃO CHEGASTE?

____

____

____

1-Imagina que és o tratador dos macacos e que, em vez de vinte bananas por dia, tens que distribuir, a cada macaco, 14 bananas, várias vezes ao dia.
Como poderias resolver a situação ?

1.1-E se fossem 18 bananas?

Leonor - Aula de 18/04/2008

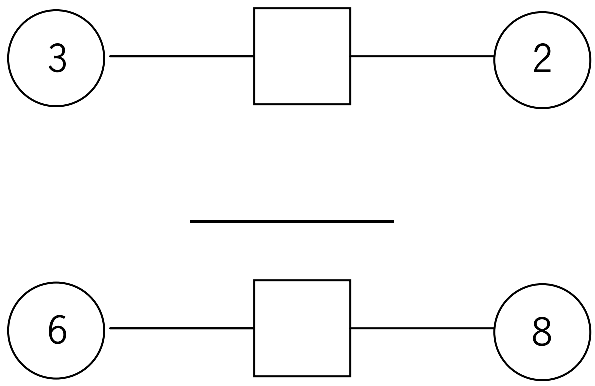
O CÓDIGO

Para abrires o baú pequeno tens que:

1ºSaber jogar o “ ARITMÓGONO”

2º Acertar em todas as pistas.

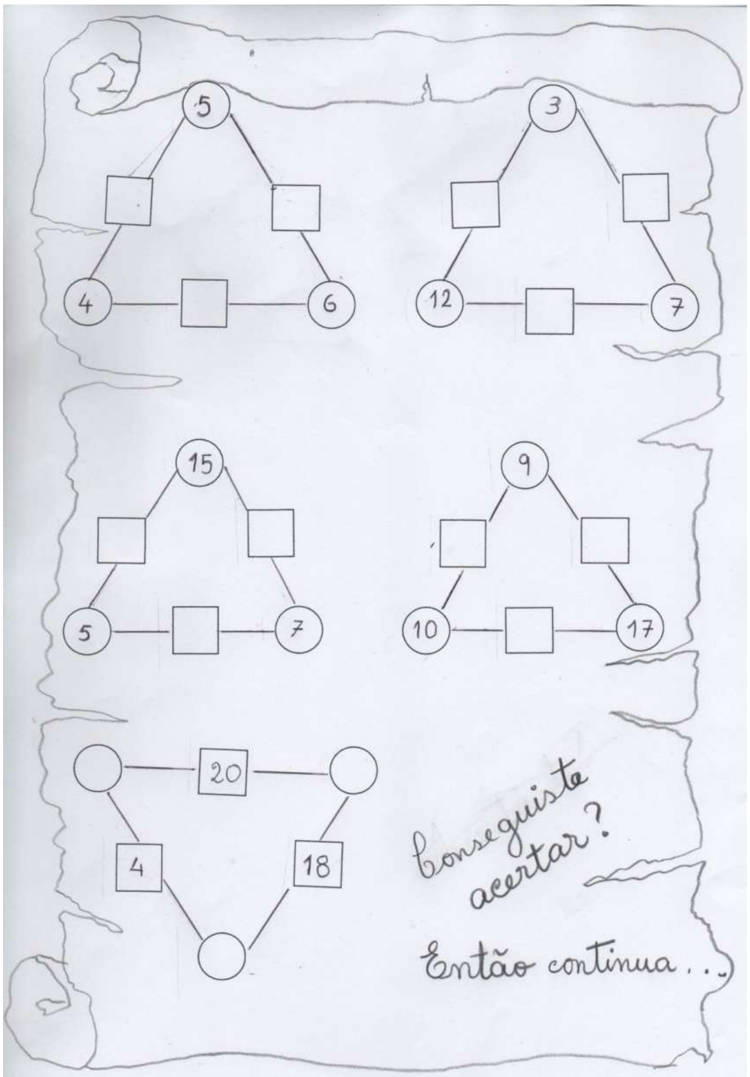
3º Decifrar mensagens como a seguinte:



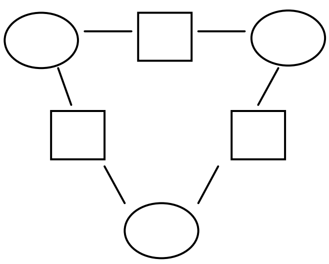
Código	Chave		Código	Chave
☺	A		1	A
◁	B		2	B
★	C		3	C
△	D		4	D
▷	E		5	E

▲	F		6	F
☒	G		7	G
◀	H		8	H
▶	I		9	I
⊙	J		10	J
⊗	L		11	L
●	M		12	M
■	N		13	N
♥	O		14	O
☹	P		15	P
◇	Q		16	Q
◆	R		17	R
🕛	S		18	S
▼	T		19	T
◖	U		20	U
◗	V		21	V
◓	X		22	X
✚	Z		23	Z

Resolve e segue todas estas pistas:



Agora preenche, com números a teu gosto, os círculos e em seguida calcula os valores dos quadrados.



Depois soma os valores dos círculos:

_____ + _____ + _____ = ____

E dos quadrados:

______ + ______ + ______ = _____

Existe alguma relação entre os resultados?

____

Com a ajuda do código, consegues descobrir que palavra é esta?

12	14	5	4	1	18

Usa o código de números para descobrires que palavra é esta.

♥	◖	◆	♥

És capaz de inventar novas palavras com este código?

Leonor - Aula de 12/06/2008

O senhor Joaquim tem 50 moedas nos dois bolsos das calças. Quantas moedas poderá ter em cada bolso?

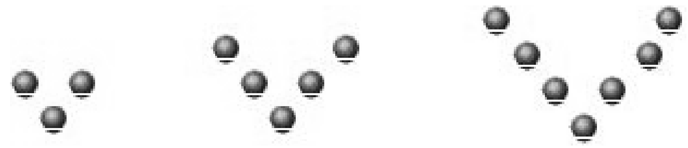
Anexo H - Tarefas utilizadas por Sílvia nas aulas descritas no Capítulo 10 apresentadas em suporte de papel

(Algumas imagens foram reduzidas por economia de espaço)

Sílvia - Aula de 30/01/2007

As bolas em V

Observa cada um dos V da sequência.



- Desenha os dois termos seguintes.
- Quantas bolas terá o V nº 7?
- Existirá um V com 48 pontos?

  Diz como pensaste.

Com as figuras que já recortaste, constrói o teu próprio padrão.

Sílvia - Aula de 13/03/2007

1º ano

Um problema de patas

A Inês é uma menina muito boa. Sempre que encontra algum animal abandonado na rua, a Inês leva-o para casa.

Neste momento, a Inês tem em sua casa um cão, um gato, um peixinho, uma pomba e um galo.

Como a Inês mora numa casa pequenina e sem quintal, a mãe disse-lhe que só queria «6 patas» lá em casa e que teria, por isso, de escolher só alguns dos animais.

Queres ajudar a Inês a escolher as combinações possíveis?

Explica como pensaste. Utiliza desenhos, palavras, esquemas ou números.

2º ano

Vamos Jogar aos dados

Actividade 1

Com o teu colega, vais lançar (à vez) o dado duas vezes.
À medida que os números vão saindo, vai anotando nas casinhas.
Mas atenção às regras.

O número obtido deverá ser:

- o maior número
- o menor número
- número par
- número ímpar

Actividade 2

Neste jogo tens três casinhas. Ganhas um ponto se conseguires o maior número. Se empatares é um ponto para ti e outro para o teu colega.
Faz como no jogo anterior. Quando sair o primeiro número, anota-o onde quiseres, depois o segundo e depois o terceiro.
Ganha o que primeiro totalizar cinco pontos.

Faz os teus registos

Jogos	Números obtidos	Nº de pontos
1º		
2º		
3º		
4º		
5º		

Actividade 3

Vais lançar os dados quatro vezes.

À medida que os números vão saindo, coloca-os nos espaços.

Atenção: ganha quem conseguir a maior soma.

Experimenta:

Continua:

Quem conseguir a maior soma ganha um ponto. Se houver empate cada jogador ganha um ponto. O jogo termina quando o primeiro jogador fizer dez pontos.

Regista os pontos obtidos:

Jogos	Soma obtida	Nº de pontos
1		
2		
3		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Sílvia - Aula de 11/12/2007

Letras e Números

1 - Quantos pontos vale o teu nome?

TOTAL

2 - Preenche a tabela com os pontos de todos os teus colegas:

Nomes	**Total de Pontos**

a) Quem obteve maior pontuação? ____________________________________

b) É o nome que tem mais letras?______________________________________

c) Tens um "gémeo"?______________ Quem?___________________________

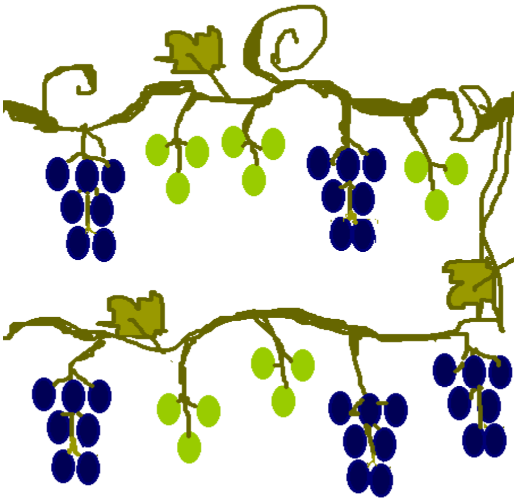
d) Consegues pensar numa frase que valha 200 pontos?

____

Ficaste longe ou perto do resultado pedido?

____

Uvas e cachos



1 - Quantos cachos de uvas tem a vinha? Explica como pensaste.

2 – Contar cada bago de uvas leva muito tempo.

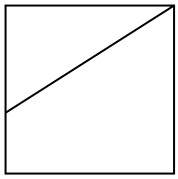
Descobre um processo rápido para dizeres quantos bagos tem essa vinha.

Vamos cortar quadrados

Actividade 1

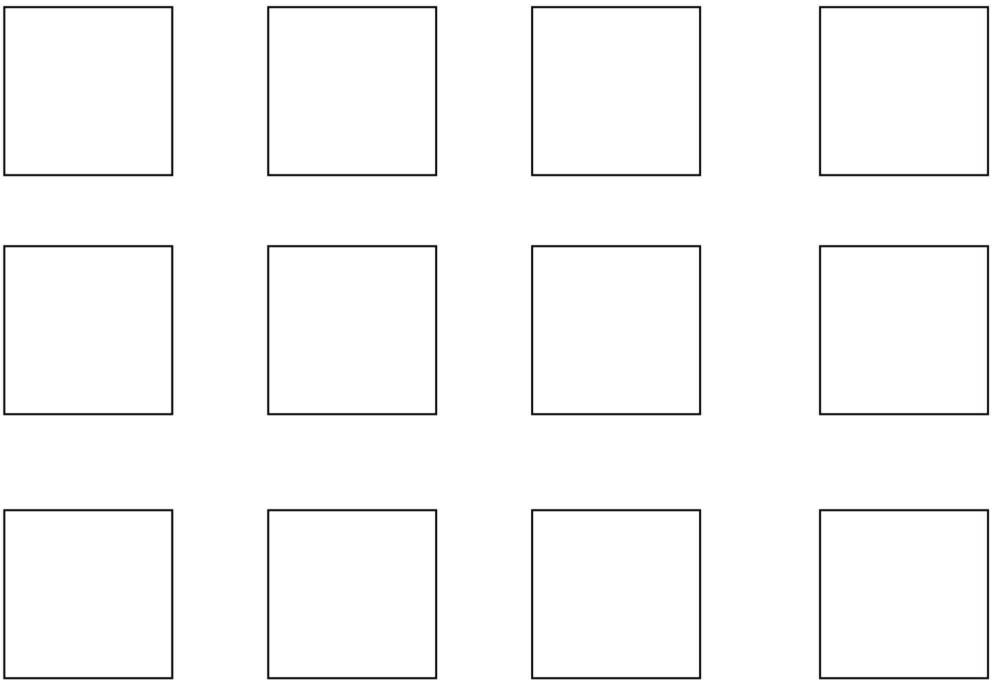
Este quadrado foi cortado em duas figuras por um corte.

Obteve-se um quadrilátero e um triângulo.



Investiga que outras figuras se obtêm cortando um quadrado **com um corte.**

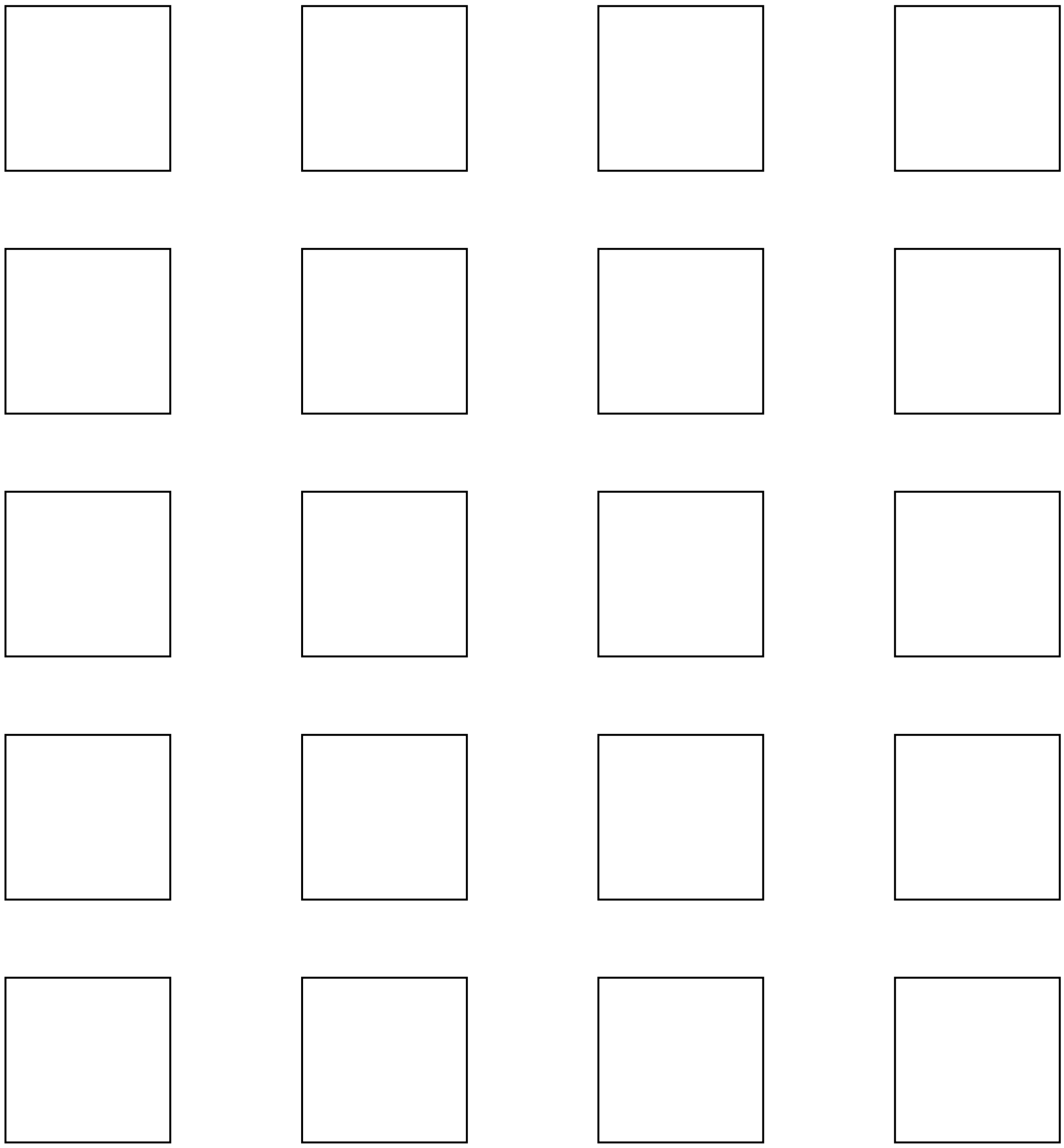
Regista as tuas descobertas.



Actividade 2

E se em vez de um corte fizeres **dois cortes?**

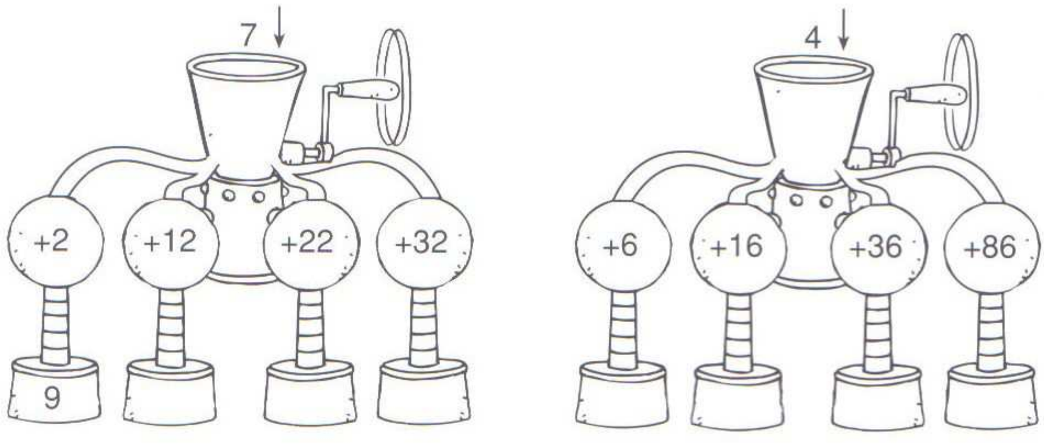
Diz como fizeste.



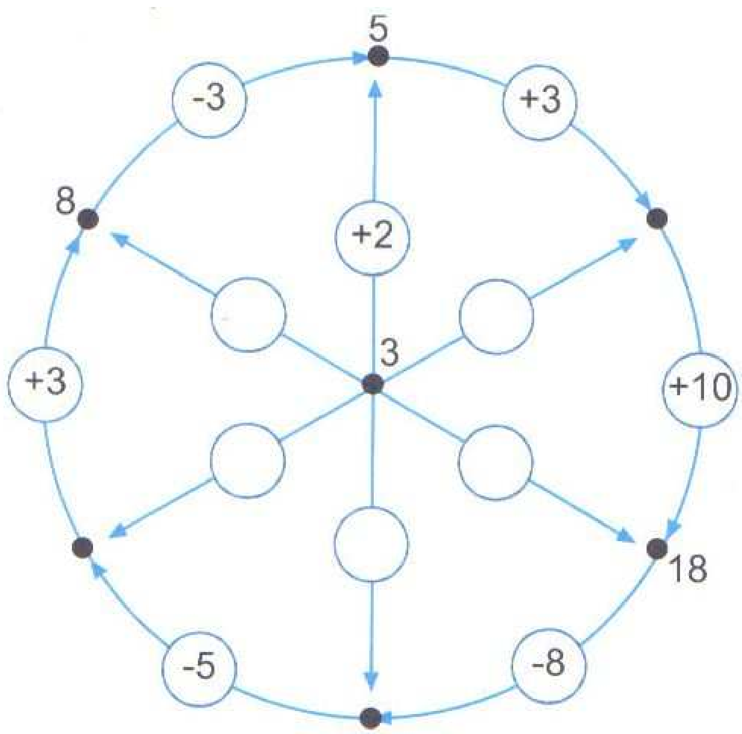
Sílvia - Aula de 28/01/2008

Nesta máquina entram números.

Repara o que acontece. Completa.



Coloca dentro dos círculos o valor de cada operador (as setas) e junto dos pontos, os números que servem. Vejo o exemplo.



Sílvia - Aula de 04/03/2008

PAR OU ÍMPAR?

Regista na tabela as pontuações obtidas

	Equipa 1	Equipa 2
	ímpar	**par**
Jogo 1	Soma	Soma
Jogo 2	Soma	Soma
Jogo 3	Soma	Soma
Jogo 4	Soma	Soma
Jogo 5	Soma	Soma
Jogo 6	Soma	Soma
Jogo 7	Soma	Soma
Jogo 8	Soma	Soma
Jogo 9	Soma	Soma
Jogo 10	Soma	Soma
Total		

Quem ganhou?

____

Achas que foi um jogo justo? Porquê?

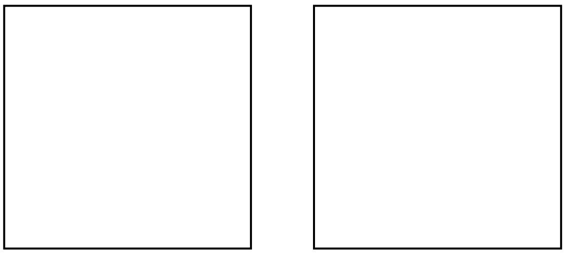
____

Sílvia - Aula de 15/04/2008

Ficha de Registo e Trabalho

1. Estes dois quadrados representam os campos do senhor Fernandes e do senhor Alves.

a) Pinta de verde o interior dos campos e contorna a vermelho a fronteira.

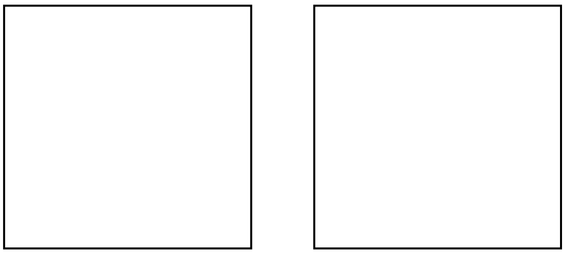


b) Desenha, em cada um dos campos, a casa que cada dono lá construiu.

c) Em qual dos campos há maior área de pastagem?

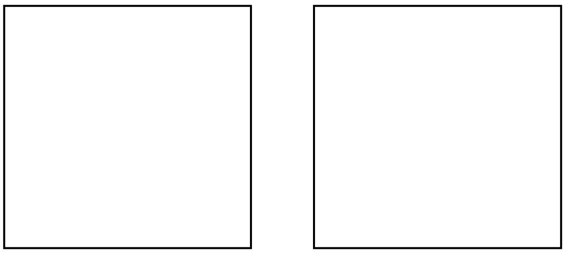
2. Mais tarde os seus donos resolveram construir duas casas em cada um dos campos.

a) Representa em cada um dos campos as casas construídas.



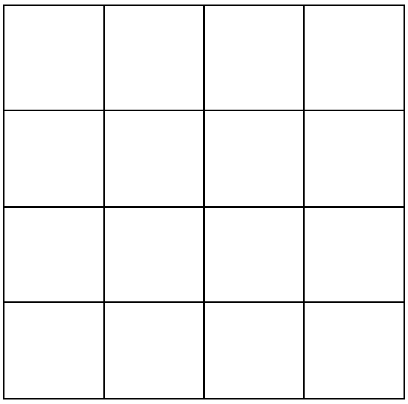
b) Será que as suas vacas continuam a ter a mesma área para pastar?

3. Haverá alguma forma de colocar as casas de forma que uma das vacas tenha maior área de pastagem?

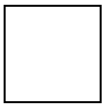


R: ____

4. O senhor Fernandes quer vedar, com rede, o seu campo para que a sua vaca não vá pastar ao campo do vizinho. Para ser mais fácil fazer os cálculos dividiu o campo como mostra a figura e utilizou como unidade de medida o quadradinho que vês em baixo.



Unidade de medida



Responde:

a) Qual o perímetro (medida a toda a volta) do campo?

R: ____

b) Quantas vezes teve que colocar a sua unidade de medida para cobrir todo o campo?

R: ____

c) Então, qual é a área do campo?

R: ____

5. Estas figuras formam uma sequência.

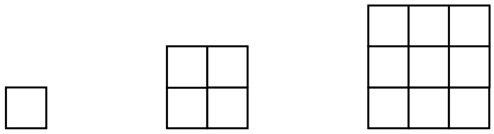


fig. 1 fig. 2 fig. 3

a) Qual é o perímetro de cada uma? (Considera como unidade de medida o lado do primeiro quadradinho)

fig. 1: ____________________________________

fig. 2: ____________________________________

fig. 3: ____________________________________

b) Desenha a quarta figura. Qual é o seu perímetro?

fig. 4: ____________________________________

c) Qual será o perímetro da quinta figura? E da 10ª? E da 56ª?

fig. 5: ____________________________________

fig. 10: ____________________________________

fig. 56: ____________________________________

És capaz de explicar como pensaste?

____

____

____

____

____

____

____

____

6. Nesta mesma sequência e considerando como unidade de medida o ☐

a) Qual a área de cada uma das figuras?

Fig. 1: ______________________________

Fig. 2: ______________________________

Fig. 3: ______________________________

b) Desenha a quarta figura. Qual a sua área?

Fig. 4: ______________________________

c) Qual a área da quinta figura? E da 10ª? E da 56ª?

Fig. 5: ______________________________

Fig. 10: ______________________________

Fig. 56: ______________________________

Sílvia - Aula de 27/05/2008

1. Estas figuras formam uma sequência.

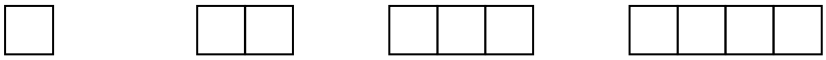


fig.1 fig.2 fig.3 fig.4

a) Qual é o **perímetro** de cada uma? (Considera como unidade de medida o lado do primeiro quadradinho).

fig.1 ______________________________

fig.2 ______________________________

fig.3 ______________________________

fig.4 ______________________________

b) Desenha a 5ª figura. Qual é o seu perímetro?

fig.5 ______________________________

c) Qual será o perímetro da 6ª figura? E da 25ª?

fig.6 ______________________________

fig.25 ______________________________

d) Serias capaz de explicar como farias se te pedissem para calcular o perímetro de uma figura qualquer desta sequência?

____

____

____

____

____

____

____

____

2. Nesta mesma sequência e considerando como unidade de medida o □

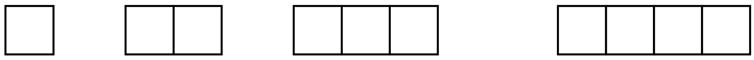


fig.1 fig.2 fig.3 fig.4

a) Qual a **área** de cada uma das figuras?

fig.1 ______________________________

fig.2 ______________________________

fig.3 ______________________________

fig.4 ______________________________

b) Desenha a 5ª figura. Qual a sua área?

fig.5 ______________________________

c) Qual a área da 6ª figura? E da 12ª?

fig.6 ______________________________

fig.12 ______________________________

3. Observa a formação do seguinte padrão.

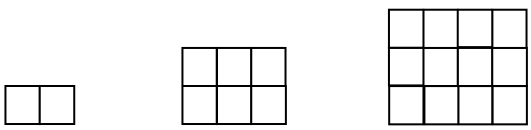


fig.1 fig.2 fig.3

a) Qual o **perímetro** de cada figura?

fig.1 ______________________________

fig.2 ______________________________

fig.3 ______________________________

b) Constrói o termo seguinte. Qual é o seu perímetro?

R: ____

c) Qual será o perímetro da 5ª figura? E da 10ª? E da 38ª?

____
____
____
____
____
____
____
____

4. Utilizando como unidade de medida a área do □ :

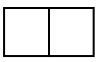


fig.1

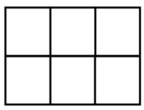


fig.2

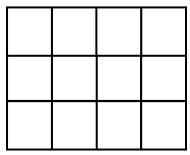


fig.3

a) Qual a **área** de cada uma das figuras?

área da fig.1 ________________________________
área da fig.2 ________________________________
área da fig.3 ________________________________

b) Desenha a 4ª figura. Qual a sua área?

R: ____

c) Qual será a área da 10ª figura?

R: ____