

AGRADECIMENTOS

Este estudo não teria sido possível sem a ajuda de muitos amigos. Aqui fica o meu reconhecimento e agradecimento a todos os que contribuíram para a sua realização.

Às minhas orientadoras, Doutora Elfrida Ralha e Doutora Fernanda Estrada, pela sua disponibilidade e apoio, pelos seus conselhos e sugestões e pela sua compreensão.

Ao meu marido, Jorge, pela sua paciência, amor, amizade e pelas palavras encorajadoras.

Aos meus pais e irmãos pelo amor e apoio, sobretudo nos momentos mais difíceis.

À Fernanda e em especial ao Armando por toda a ajuda, sugestões e críticas.

Aos colegas do grupo disciplinar da escola onde trabalho, de um modo muito especial, à Fátima, à Gabriela e à Teresa.

Sinopse

José Joaquim Rivara (1772-1826), não sendo ainda reconhecido um proeminente matemático, apresenta um interessante estudo sobre aplicação da álgebra à geometria, sendo certo que o seu objectivo transversal era a «indagação da verdadeira origem das quantidades negativas». Na obra *Resolução Analytica dos Problemas Geométricos*, procura resolver problemas suscitados por trabalhos de Jean le Rond D'Alembert, de Etiènne Bezout, de Thomas Simpson e Silvestre Lacroix.

Sendo a sua obra constituída por seis problemas diferentes, seleccionámos o primeiro destes para objecto do estudo ora apresentado.

Esta tese é composta por quatro capítulos:

- o primeiro é um resumo histórico sobre a aplicação da álgebra à geometria e consequente evolução do conceito de número negativo desde Descartes aos primórdios do século XIX;

- No segundo capítulo é feita uma pequena biografia de Rivara, uma abordagem do primeiro problema estudado na sua obra, a resolução do mesmo e a interpretação das soluções encontradas;

- No terceiro capítulo apresentamos um estudo comparativo entre a resolução do problema de Rivara e as de alguns autores conceituados (D'Alembert, Bezout, Anastácio da Cunha, Lacroix);

- No quarto capítulo, apresentamos uma simulação de um caso concreto resolvido pelos métodos matemáticos actuais, o qual confrontamos com igual resolução segundo os pressupostos de Rivara.

Terminamos, apresentando uma nota final de análise conclusiva da problemática de Rivara e da sua contribuição para o estudo das quantidades negativas.

Abstract

Although José Joaquim Rivara (1772-1826) is not yet seen regarded as a prominent mathematician, he presented an interesting study on the application of algebra to geometry, even if his overall goal was the “inquiry of the true origin of the negative quantities”. On his “Resolução Analytica dos Problemas Geométricos” [Analytical solution of Geometric Problems], he seeks to solve problems arisen by works of Jean le Rond D’Alembert, Etienne Bezout, Thomas Simpson and Silvestre Lacroix.

Being his work aimed at solving six different problems, we have selected the first one of these as the object of the present study.

This essay comprises four chapters:

- The first one is an historical summary on the application of algebra to geometry and the subsequent evolution of the concept of negative number from Descartes to the early 19th century;

- On the second chapter, we present a small biography of Rivara, as well as a description of the approach to the first problem studied on his work, its resolution and the interpretation of the solutions found;

- On the third chapter, we present a comparative study between Rivara’s resolution of the problem and those proposed by a few worthy authors (D’Alembert, Bezout, Anastácio da Cunha, Lacroix);

- On the fourth chapter, we present a simulation of a concrete case solved by current mathematic methods and confront it with the corresponding resolution according to Rivara’s principles.

We end up presenting a final note of concluding analysis on Rivara’s problematic and his contribution to the study of negative quantities.

Résumé – Synopsis

José Joaquim Rivara (1772-1826) n'est pas, encore, reconnu comme un remarquable mathématicien, mais il présente une intéressante étude sur l'application de l'algèbre à la géométrie, étant donné que son objectif était de «passer en quête de l'origine véritable des quantités négatives». Dans son livre “Resolução Analytica dos Problemas Geométricos” (Résolution Analytical des Problèmes Géométriques), il cherche à résoudre les problèmes soulevés par les études mathématiques de Jean le Rond D'Alembert, d'Étienne Bezout, de Thomas Simpson et de Silvestre Lacroix.

Malgré son travail se composant de six questions différentes, j'ai sélectionné la première sur le sujet d'étude présenté.

Cette thèse se compose de quatre chapitres:

- le premier est un résumé historique sur l'application de l'algèbre à la géométrie, d'évolution de la notion de nombre négatif depuis Descartes au début du XIX siècle;

- le deuxième chapitre est une courte biographie de Rivara, une approche du premier problème rencontré dans son travail et que j'ai étudié, la résolution du même et sa l'interprétation;

- le troisième chapitre présente une étude comparative entre la résolution du problème de Rivara et des résolutions de certains auteurs très importants dans l'époque (D'Alembert, Bezout, Lacroix e Anastácio da Cunha);

- le quatrième chapitre permet de simuler un cas réel résolu par les méthodes mathématiques actuelles, que j'ai confrontés à la même résolution, selon les hypothèses de Rivara.

Enfin, je présente une analyse de conclusion sur le problème de Rivara et de sa contribution pour l'étude de quantités négatives.

Índice

Introdução	1
Capítulo 1	4
Os números negativos e o desenvolvimento da Geometria Analítica	5
1.1. De Descartes a Euler	7
1.2. D'Alembert	11
1.3. Bezout	16
1.4. Lacroix	18
1.5. Carnot	21
1.6. Desenvolvimentos em Portugal	24
Capítulo 2	28
O problema de Rivara: resolução analítica e interpretação geométrica das soluções negativas	29
2.1 Rivara – O Homem	29
2.2 Rivara – O Obra	29
2.3. O problema	31
2.4. A resolução do problema	33
2.4.1. Caso do ponto pertencente ao interior da circunferência	33
2.4.2. Caso do ponto pertencente à circunferência	43
2.4.3. Caso do ponto pertencente ao exterior da circunferência	44
2.4.3.1. Resolução considerando a lei da continuidade	44
2.4.3.2. Resolução sem considerar a Lei da Continuidade	48
2.5. Translação do eixo das ordenadas	50
2.5.1 Caso do ponto pertencente ao interior da circunferência	50
2.5.2. Caso do ponto pertencente ao exterior da circunferência	52
2.6. Construção geométrica das soluções	57
2.7. Máximo e mínimo	60
Capítulo 3	70
Estudo comparativo: o problema de Rivara noutros autores	71
3.1. A interpretação de D'Alembert	71
3.1.1 O problema em D'Alembert	71
3.1.2. A resposta de Rivara	78
3.1.2.1. Caso do ponto pertencente ao interior da circunferência	78
3.1.2.2. Caso do ponto pertencente ao exterior da circunferência	84
3.2. A interpretação de Bezout	90
3.2.1. O problema em Bezout	90
3.2.2. A resposta de Rivara	96
3.3. O problema noutros autores:	102
3.3.1. A interpretação de Anastácio da Cunha	102
3.3.2. A interpretação de Lacroix	106
3.4. Um caso particular	110
3.4.1. O caso em D'Alembert	110
3.4.2. A resposta de Rivara	113

Capítulo IV	121
O problema de Rivara: um caso concreto	122
4.1. Caso do ponto pertencente à circunferência	122
4.1.1. Recta Ek	122
4.1.2. Recta EK	123
4.2. Caso do ponto pertencente ao interior da circunferência	124
4.2.1. Recta Bd	124
4.2.2. Recta bD	126
4.3. Caso do ponto pertencente ao exterior da circunferência	129
4.3.1. Recta $B'D'$	129
4.3.2. Recta $b'd'$	131
Conclusões	134
Bibliografia	138

Introdução

José Joaquim Rivara (1772-1826), discípulo de Anastácio da Cunha, foi docente da Universidade de Coimbra onde se formou e doutorou.

Este matemático escreveu uma obra com o título *RESOLUÇÃO ANALYTICA dos PROBLEMAS GEOMETRICOS e Indagação da Verdadeira Origem das Quantidades Negativas*, que foi publicada em 1815 e é composta por seis problemas, o primeiro dos quais será objecto de estudo nesta tese. Esta obra, pelo que se conhece, não foi ainda alvo de um estudo mais pormenorizado, no entanto foi referenciada por Castro Freire como sendo um trabalho onde o autor apresenta «*uma engenhosa deducção a par de uma boa critica*» (Freire, 1872) e também por Rodolfo Guimarães, que considera que o autor se esforça por suavizar as dificuldades de D'Alembert e por corrigir Bezout e Lacroix (Guimarães, 1909).

O objectivo desta tese é dar a conhecer parte da obra de um matemático português e algum do trabalho matemático desenvolvido na época, principalmente no que se refere à aplicação da álgebra à geometria e à interpretação das soluções negativas.

Ciente de que as investigações históricas devem ser inseridas num contexto e mais ainda se o objecto da investigação é um texto científico cuja intenção é esclarecer um assunto relevante na sua época, parte desta tese inclui comparações entre Rivara e as suas fontes mencionadas ao longo da resolução do problema.

Além disso, tendo sido o conceito de número negativo fruto de muito estudo e reflexão ao longo de séculos, as discussões e os argumentos históricos em volta deste conceito devem ser conhecidos pelo professor quando vai leccionar este tema. Isto porque muitas das questões que se levantam na sala de aula reflectem questões históricas e tomadas de posição que foram desde há muito abandonadas. As dificuldades que os grandes matemáticos encontraram são também, em muitos casos, os obstáculos com que se deparam os alunos, e para os ajudar a ultrapassá-las o professor pode e deve inspirar-se na história, em particular, no modo como esses foram superados no passado. Sendo professora, não poderia deixar de ter essa preocupação em mente em todo o momento da realização deste estudo.

A Matemática, apresentada como um sistema de verdades absolutas, sem referência à origem e propósito dos seus conceitos, não serve a busca de independência intelectual. Os amantes do estudo em geral e os professores, em particular, devem compreender o estado presente do conhecimento como resultado da evolução histórica.

A história permite inferir que tipo de problemas deram lugar a determinado conceito, que evolução sofreram até ao seu estados actual, dando a conhecer o processo dinâmico da

actividade científica. A compreensão completa e profunda dos conceitos fundamentais de uma disciplina científica necessita do conhecimento da sua história. Por isso, esta tese de dissertação de mestrado em Matemática tem como fim último dar a conhecer aspectos que marcaram a aceitação dos números negativos, obstáculos encontrados, bem como as tentativas para ultrapassá-los, através de uma obra de um matemático português.

Estruturada em quatro capítulos, esta tese começa com uma breve história acerca do conceito de número negativo e do desenvolvimento da geometria analítica para contextualização da obra de Rivara. Em seguida, é apresentado o problema de Rivara e analisada a sua resolução que depois é comparada com a de outros autores.

Capítulo 1

Os números negativos e o desenvolvimento da Geometria Analítica

O conceito de número negativo, apesar da sua aparente simplicidade, resultou de um longo processo de aceitação que passou pela formulação diofantina da regra dos sinais da multiplicação e terminou com criação do contínuo real, no séc. XIX. Estes números preocuparam bastante os matemáticos durante muito tempo sobretudo porque os negativos não tinham um significado geométrico intuitivo e incontestável e as regras das operações que os envolviam eram “estranhas”. Este conceito e os seus fundamentos não eram claros e muitos matemáticos produziram justificações ou protestos relativamente ao seu uso.

Na segunda metade do séc. XVIII pode dizer-se que as discussões em torno do conceito de número negativo ou, como se dizia na época, das *quantidades negativas* se faziam segundo duas vertentes: por um lado, levantavam-se questões como “O que é uma quantidade negativa?”, ou “Será que existe realmente algo menor do que nada?”, ou ainda – “Será possível tirar algo maior a algo menor?”; por outro lado, mesmo sem desconsiderar as questões anteriores, havia a preocupação de organizar estruturalmente a Aritmética e a Álgebra elementares, em particular, de encontrar uma justificação para as regras dos sinais da multiplicação, especialmente, para a regra *menos vezes menos dá mais* que escapava às *demonstrações* que aludiam a metáforas tipo crédito/débito, por exemplo.

A prática algébrica de resolução de problemas levou repetidamente à obtenção de valores negativos que, até ao séc. XVI e mesmo no séc. XVII, eram apelidados de soluções “falsas” ou “impossíveis”. Estas muitas vezes eram interpretadas como débitos, o que pode não significar que eram aceites como valores negativos. Ao dar-lhes essa interpretação era-lhes retirada, se assim se pode dizer, a qualidade de negativo.

A necessidade de uma interpretação foi a principal dificuldade com que os matemáticos se depararam quando consideraram a possibilidade de soluções negativas, em particular, em problemas de geometria.

A geometria analítica era, de certo modo, um assunto novo na segunda metade do séc. XVIII e está intimamente ligada a esta problemática do conceito de número negativo, pelo que, procurarei dar a conhecer, nas próximas páginas, alguns dos principais desenvolvimentos ao nível da geometria analítica desde Descartes até ao início do séc. XIX, altura da publicação da obra de Rivara, de um modo especial no que concerne à interpretação das quantidades

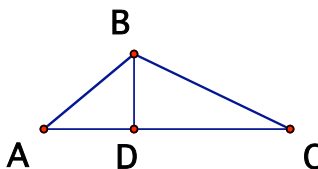
geométricas negativas.

São vários os matemáticos, alguns bastantes conhecidos, que deram passos importantes para a interiorização/compreensão e conseqüentemente aceitação dos números negativos. Entre eles estão Leonhard Euler e Jean le Rond D'Alembert. No entanto, não posso deixar de referir Lazare Carnot que, no início do séc. XIX, publicou uma obra com o propósito de criar uma teoria de interpretação das quantidades geométricas negativas.

Em Portugal, também há referências aos números negativos em trabalhos matemáticos. Neste âmbito, não é possível passar sem fazer alusão a José Anastácio da Cunha, que muito provavelmente terá influenciado José Joaquim Rivara, o autor da obra que me proponho estudar (parte dela, para ser mais precisa).

Aqui chegados será importante abordarmos alguma terminologia, que com o desenvolvimento do trabalho e a apreciação de diferentes autores, fomos compelidos a utilizar, até para diferenciar diversos termos da geometria; aliás, na linha do trabalho do Doutor João Domingues na sua obra *The Calculus According to S.F. Lacroix*, na qual expõe:

«An explanation on terminology is in order here: the expression "application of algebra to geometry" (very much common in the 18th century) will be used for any application of techniques of symbolic algebra in geometry; the much less common expressions "coordinate geometry" and "coordinate methods" will refer to the kind(s) of application of algebra to geometry that used coordinates (not necessarily orthogonal, not necessarily with explicit x - and y -axes), which allowed to represent the geometrical objects involved by means of equations; "analytic geometry" will be used for a refinement of "coordinate geometry" that sought to be as independent as possible from synthetic (i.e., non-algebraic) geometry. A very simple example of "application of algebra to geometry" which is not "coordinate geometry" is the following, taken from [Bezout 1796 , III]¹: given the sides of a triangle ABC , to find its height and the lengths of the segments it forms on the basis. That is, we know AB , BC , AC , and wish to know BD , AD , DC . Following the usual conventions of algebra, we put



¹ Étienne Bezout, *Cours de Mathématiques, à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine*, 6 vols., Paris: Baudelot & Eberhart, year IV (1796) [First ed. is from 1764-1769].

$BC = a$, $AB = b$, $AC = c$, and $CD = x$, $BD = y$; of course $AD = c - x$. The theorem of Pythagoras gives $xx + yy = aa$ and $cc - 2c + xx + yy = bb$ whence $x = \frac{1}{2} \frac{(a+b)(a-b)}{c} + \frac{1}{2}c$.

“Application of algebra to geometry” was an umbrella term for all uses of álgebra in geometry, but we can say that its non-coordinate section (which by the 18th century was purely a school subject, not a research topic) focused on the same objects as elementary synthetic geometry: triangles, squares, circles, and so on. “Coordinate geometry”, on the other hand, focused on curves and surfaces. In its common form, straight lines and planes were not included in those “curves and surfaces”. “Analytic geometry” changed this»² (Domingues, 2007, pp. 89-90).

1.1. De Descartes a Euler

A fusão da álgebra com a geometria analítica foi sugerida pelo filósofo e matemático francês **René Descartes (1596-1650)** na sua publicação *Geométrie* em 1637. Esta fusão, como é sabido, deu origem à geometria analítica, razão pela qual este autor ficou conhecido como o seu fundador. Mas já em 1591, o francês François Viète, (1540-1603) usara a álgebra simbólica na resolução de problemas geométricos, ao traduzir um problema por uma ou mais equações (Viète, 1630).

No entanto, Descartes foi mais longe ao aplicar uma nova técnica algébrica – o uso de coordenadas - que permitiu trabalhar algebricamente com curvas. No segundo Livro da sua

² «Uma explicação sobre terminologia é aqui exigível: a expressão “aplicação da álgebra à geometria” (muito comum no século XVIII) será usada para qualquer aplicação de técnicas de álgebra simbólica em geometria; a expressão muito menos comum “geometria coordenada” e “métodos coordenados” referir-se-á ao tipo(s) de aplicação da álgebra à geometria que utilizava coordenadas (não necessariamente ortogonais, não necessariamente com os eixos dos xx e dos yy explícitos), que permitia representar os objectos geométricos traduzidos por meio de equações; “geometria analítica” será usada para um refinamento da “geometria coordenada” que procura ser tão independente quanto possível da geometria sintética (i.e., não-algébrica). Um exemplo bastante simples da “aplicação da álgebra à geometria”, que não é “geometria coordenada”, retirado de [Bezout, 1796, III], é o seguinte: dados os lados de um triângulo $[ABC]$, para encontrar a altura e o comprimento dos segmentos formados na base. Isto é, nós conhecemos AB , BC , AC , e desejamos conhecer BD , AD , DC . Seguindo as convenções de álgebra em uso, pomos [...]

[...]“Aplicação da álgebra à geometria” era um termo “cobertura” para todas as utilizações da álgebra na geometria, mas nós podemos dizer que a secção não coordenada (a qual pelo século XVIII era puramente um assunto académico e não um tópico de investigação) focava-se nos mesmos objectos que a geometria sintética elementar: triângulos, quadrados, círculos, entre outros. “Geometria coordenada”, por outro lado, focava-se nas curvas e superfícies. Na sua forma comum, linhas rectas e planos não foram incluídas nestas “curvas e superfícies”. A “Geometria Analítica” mudou isto».

Géométrie, para determinar uma equação de uma curva EC desenhada pela intersecção da «régua GL com a peça $CNKL$ » (veja-se a Fig. 1.1), o matemático francês procede da seguinte forma:

“Escolho uma linha recta, como AB , para referir aos seus diversos pontos todos os pontos da linha curva EC ; e nesta linha AB elejo um ponto, seja A , para começar por ele o cálculo. [...] Após isto, tomo qualquer ponto da curva, por exemplo C , sobre o qual vou supor que está aplicado o instrumento que serve para descrevê-la, e traço por este ponto C a linha CB paralela a GA ; e como CB e BA são duas quantidades indeterminadas e desconhecidas, designo-as, uma por y e a outra por x . Mas, para encontrar a relação de ambas, considero também as quantidades conhecidas que determinam o traçado desta linha curva, tais como GA , que denomino c . [...] e assim deve encontrar-se a equação $y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$ » (Descartes, 2001, pp. 33 e 35).³

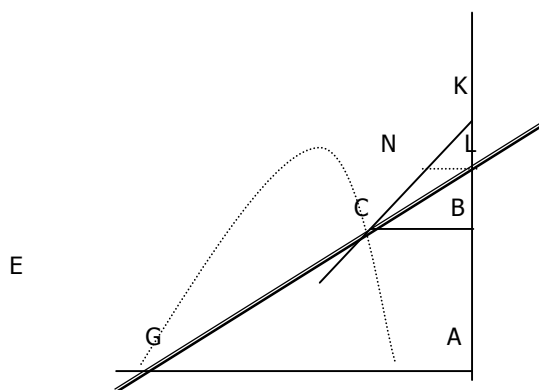


fig. 1.1 - Figura de (Descartes, 2001, p. 33)

Descartes usa explicitamente uma recta e um ponto nela para assumirem os papéis de eixo e de origem das abcissas, respectivamente.

No entanto, na *Géométrie* de Descartes as curvas não são definidas por equações. São antes meios auxiliares ou soluções de problemas de lugares geométricos. Descartes começa a análise de uma curva dada, não com a sua equação (cartesiana), mas com uma definição ou uma propriedade da qual a equação é subsequentemente derivada. Esta técnica seria usada

³ Os símbolos e toda a notação usada por Descartes na sua *Géométrie* tornaram os textos matemáticos de fácil leitura, mesmo na actualidade. Ele escreveu equações com os sinais actuais para mais e para menos, o sinal de radical e a notação actual para potências. Usou as letras iniciais do abecedário para as constantes e as últimas letras para as incógnitas.

posteriormente por vários autores para a construção de equações.

A técnica de Descartes seria transformada gradualmente até ao século XIX naquilo que hoje designamos por geometria analítica. Um passo fundamental para essa transformação é dado com a utilização das curvas como objectos de estudo e não como auxiliares na resolução de problemas.

Logo depois, em 1679, é publicada uma obra póstuma do advogado **Pierre Fermat (1608-1665)**, que inclui um pequeno tratado sobre geometria analítica chamado *Ad Locos Planos et Sólidos Isagoge*, obra que, segundo Boyer, foi compilada antes da publicação da *Géométrie* de Descartes (Boyer, 2004, p. 82). Fermat, ao contrário de Descartes, introduziu as curvas através das suas equações e focou-se mais no estudo analítico das curvas (Brassinne, 1853). No entanto, como a obra foi publicada numa altura em que a geometria Cartesiana já estava popularizada, o trabalho de Fermat sobre a geometria analítica ficou na sombra e só mais tarde seria reconhecida a sua importância como descoberta (ou criação) independente da geometria analítica.

Segundo Boyer, o trabalho de Fermat só seria reconhecido com a publicação da obra de Newton *Enumeratio linearum tertijii ordinis* em 1704 como um apêndice da sua *Opticks*, (Boyer, 2004, p. 138).

Em 1748 surgiu um trabalho importante para o desenvolvimento da geometria analítica, a *Introductio in analysin infinitorum* de **Leonhard Euler (1707-1783)**, cujo principal objecto de estudo é a função. O primeiro volume da *Introductio* de Euler é dedicado à “análise pura” e o segundo à “aplicação da álgebra à geometria”. Neste último volume, o autor estuda as funções através das coordenadas (Euler, 1988). Este não usa sistematicamente a dedução cartesiana das equações de curvas a partir dos lugares geométricos, mas centra o seu trabalho de geometria analítica no estudo de curvas dadas pelas suas equações. Aliás, Euler apresenta apenas um capítulo sobre a construção de equações (Euler, 1988, p. 270-286).

Este segundo volume começa com algumas definições – de abcissa, de aplicada (correspondente à actual ordenada), de origem (das abcissas) e eixo (das abcissas). Relativamente às coordenadas, Euler indica explicitamente a parte em relação ao eixo (das abcissas) que corresponde às abcissas positivas e negativas e às aplicadas (ordenadas) positivas e negativas. Refere que a parte do eixo que fica à direita da origem é o lugar das abcissas positivas e a porção do eixo que fica do “lado oposto” em relação à origem é o lugar das abcissas negativas. Do mesmo modo, quanto às *aplicadas*, as positivas estarão acima do

eixo e as negativas abaixo (Euler, 1988, p. 5-6).

Ainda no segundo volume, Euler apresenta um capítulo sobre a mudança de coordenadas (Euler, 1988, pp. 10-22) onde é deduzida a equação da recta (Euler, 1988, p. 18). A primeira transformação de coordenadas que ele faz é a translação de eixos, embora só considere a translação dos eixos das ordenadas.

No capítulo III sobre “a Classificação das curvas algébricas por graus”, para a dedução da equação da circunferência Euler usa uma figura e uma igualdade baseada na proposição XIII do Livro sexto dos Elementos de Euclides⁴ (Euler, 1988, p. 29). Isto mostra que a geometria analítica de Euler ainda se baseava na geometria elementar e em figuras geométricas auxiliares.

No entanto, em relação às secções cónicas, designadas por *Linhas de segunda ordem*, Euler propõem-se fazer um estudo puramente analítico:

«Ces lignes (du second ordre), qu'on désigne aussi sous le nom de sections coniques, jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables [...] Mais, comme toutes ces propriétés ne peuvent pas dériver d'un seul principe; qu'il y en a qui se tirent de l'équation de ces courbes, & d'autres de leur génération par la section d'un cône; & qu'il y en a d'autres enfin qui se concluent de la manière dont elles sont décrites; nous nous contenterons d'examiner ici celles qu'on peut déduire de leur équation, sans recourir à d'autres moyens» (Euler, 1988, pp. 39-40).⁵

O seu estudo é baseado na equação geral de segundo grau com duas incógnitas e não nas secções de um cone, como era habitual.

A obra de Euler estabelece a análise matemática como um estudo de funções, em vez de um estudo de quantidades, geralmente entendidas como quantidades geométricas, associadas a curvas. Este procurou trabalhar de um modo puramente formal e por isso a interpretação geométrica das quantidades negativas não foi questão sobre a qual se debruçasse.

Euler publicou, em 1770, uma obra, em alemão, sobre álgebra traduzida para francês

⁴ Na proposição XIII do sexto Livro dos *Elementos* de Euclides pode ler-se: «dadas duas linhas rectas, achar entre ellas huma media proporcional» (Euclides, 1768, p. 222).

⁵ «Estas linhas (de segunda ordem), que se designam também pelo nome de secções cónicas, gozam de um grande número de propriedades notáveis [...] Mas como todas estas propriedades não podem derivar de um só principio; que as há que se tiram da equação dessas curvas, & d'outras da sua formação pela secção de um cone; & que há outras enfim que se deduzem da maneira como são descritas; nós nos contentaremos em examinar aqui aquelas que se podem deduzir de sua equação, sem recorrer a outros meios.»

em 1774 sob o título *Éléments d'algèbre*. Nela define as quantidades negativas como sendo aquelas que são afectadas do sinal $-$. Além disso, refere que estas podem ser interpretadas como dívidas, acepção sob a qual se apoiou para considerar os números negativos como sendo menos de nada porque quando um homem não possui nada e deve 50 *écus*, é certo que ele tem 50 *écus* a menos que nada. Relativamente às operações com estes números, ele considera a subtracção como sendo equivalente à adição. E acrescenta que os números positivos se obtêm adicionando 1 a 0 (ou a nada) e continuando assim a aumentar sucessivamente uma unidade, de tal modo que é formada a sequência dos números naturais. Se, pelo contrário, se subtrair sucessivamente a unidade a zero, obter-se-á a sequência de números inteiros negativos (Euler, 1774, pp. 12-13). Sobre a regra *menos vezes menos*, Euler afirma que o resultado é positivo porque se $-a$ por $+b$ dá $-ab$ e $-a$ por $-b$ não pode produzir o mesmo mas sim o oposto resulta que *menos vezes menos dá mais* (p. 21).

1.2. D'Alembert

Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), eminente filósofo e matemático, membro da Academia das Ciências de Paris, terá sido um dos que se debruçou com mais interesse sobre esta discussão, numa tentativa de ultrapassar as dificuldades que este assunto apresentava. Este publicou uma série de escritos com reflexões acerca dos números negativos que terão com certeza abalado algumas convicções e despertado o interesse pelo estudo e clarificação do assunto.

No artigo "*Négatif*" da *Encyclopédie*, D'Alembert deixa transparecer as dificuldades em que estava envolta, na época, a interpretação dos números negativos e alerta, logo num dos primeiros parágrafos, para o facto de «*qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives, & que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'il en ont données*»⁶ (*Encyclopédie*, art. *Négatif*, p. 445).

D'Alembert, em "*Négatif*", define quantidades negativas, em álgebra, como sendo

⁶ «que não é fácil fixar a ideia das quantidades negativas, & que algumas pessoas hábeis contribuíram mesmo para a confundir com noções pouco exactas que deram».

«celles qui sont affectées du signe —»⁷. Em relação à geometria, o matemático francês refere que as “linhas” negativas não diferem das positivas senão pela sua situação «à l’égard de quelque ligne au point commun»⁸ (*Encyclopédie*, art. *Négatif*, p. 445). Esta noção não é muito clara mas mais à frente, no mesmo artigo, D’Alembert alerta que na solução de um problema geométrico, as “linhas” negativas nem sempre estão dum “côté opposé” ao das “linhas” positivas, mas de um “côté opposé” àquele onde as supusemos, no cálculo. E acrescenta que há ainda outros casos, em geometria, onde as quantidades negativas parecem encontrar-se do “côté” onde elas não deveriam estar (*Encyclopédie*, art. *Négatif*, pp. 445-446).

Será que D’Alembert ao usar o termo “côté opposé” querera dizer que as duas “linhas”, que são segmentos de recta com um ponto comum que estão em “lados” opostos de um plano dividido por outra recta, pertencem a uma mesma recta ou podem ser segmentos de rectas distintas?

Em 1780, D’Alembert apresenta nos seus *Opuscules Mathématiques* um texto com o título “sur les quantités négatives” (pp. 270-279), onde é abordada a interpretação das soluções negativas em problemas geométricos e é reforçada a ideia do artigo *Négatif* de que a interpretação geométrica dos negativos seria, na época, um assunto por esclarecer e que levantava muitas dúvidas. No texto, D’Alembert refere que

«on suppose ordinairement que dans la solution des problèmes géométriques, les quantités négatives se prennent toujours du côté opposé aux positives. [...] Il est d’autant plus nécessaire de démontrer cette position des quantités négatives dans le sens opposé aux positives»⁹ (D’Alembert, 1780, pp. 270-271).

No mesmo texto, D’Alembert apresenta alguns casos que classifica como embaraçosos onde as “linhas negativas” não têm “sentido contrário” ao das positivas. Num deles, as duas “linhas” com sinais contrários (segundo D’Alembert, $[AC]$ e $[AD]$) estão em “lados opostos” do diâmetro de uma circunferência mas, no entanto, as duas «ne sont pas placés en sens contraire»¹⁰. E acrescenta mais à frente que \overline{AC} e \overline{AD} têm sinais contrários embora os

⁷ «aquelas que são afectadas pelo sinal —».

⁸ «em relação a uma linha no ponto comum».

⁹ «supõe-se geralmente que na solução de problemas geométricos, as quantidades negativas se consideram sempre do lado oposto às positivas. [...] é mesmo necessário demonstrar esta posição das quantidades negativas no sentido oposto às positivas.»

¹⁰ «não estão em sentidos contrários»

segmentos de recta «*ne soient pas opposés en ligne droite*»¹¹ (D'Alembert, 1780, pp. 274-275).

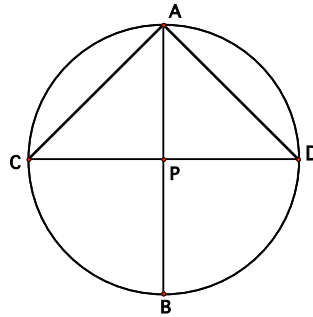


fig. 1.2 – Parte da Fig. 50 de (D'Alembert, 1780)

No mesmo texto diz ainda que «*en général le signe négatif indique qu'une quantité doit être prise dans la solution, non pas précisément en sens contraire des quantités positives, mais seulement du côté contraire à celui qu'on avoit supposé*»¹² (D'Alembert, 1780, p. 271).

Do exposto podemos depreender que, para D'Alembert, é claro que “linhas” com “sentidos opostos” correspondam a quantidades geométricas com sinais contrários, como no caso de $[AC]$ e $[AD]$, na fig. 1.3.

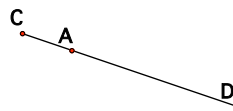


fig. 1.3

No entanto, para o matemático francês há “linhas” com sinais contrários que não correspondem a segmentos com “sentidos opostos” mas a segmentos de rectas distintas pertencentes a partes do plano “opostas”. Esta era a grande questão, na época, relativa à introdução dos métodos algébricos nos problemas de geometria.

Quanto às quantidades negativas isoladas, D'Alembert refere no artigo “*Négatif*” que quando estas são consideradas abstractamente, não têm para a mente qualquer significado e

¹¹ «embora não sejam opostas em linha recta»

¹² «em geral o sinal negativo indica que uma quantidade deve ser considerada na solução, não precisamente em sentido contrário ao das quantidades positivas, mas somente do lado contrário àquele que nós havíamos suposto»

que não há na realidade qualquer quantidade negativa isolada (*Encyclopédie*, art. *Négatif*, p. 446).

Ainda no mesmo artigo, D'Alembert manifestou-se contra a ideia defendida por alguns matemáticos na época, entre os quais Euler (1822, p. 5), de que os negativos são menos de nada argumentando que considerá-los como tal é «*avancer une chose qui ne se peut pas concevoir*»¹³. (*Encyclopédie*, art. *Négatif*, p. 445).

D'Alembert acreditava na validade das regras das operações algébricas com quantidades negativas quando refere, no mesmo artigo: «*je crois pouvoir assurer que, si on l'applique à tous les problèmes que l'on peut résoudre, & qui renferment des quantités négatives, on ne la trouvera jamais en défaut*»¹⁴. E acrescenta que estas regras «*sont admises par tout le monde, et généralement comme exactes, quelque idée qu'on attache d'ailleurs à ces quantités*»¹⁵ (*Encyclopédie*, art. *Négatif*, p. 445).

No artigo “Coube” da *Encyclopédie* D'Alembert define coordenadas de uma curva, ordenada, abcissa e origem das coordenadas (*Encyclopédie*, art. *Courbe*, p.451).

Em relação aos valores de x , os positivos são considerados depois de zero até ao infinito, e todos os valores negativos depois de zero até ao menos infinito (*Encyclopédie*, art. *Courbe*, p.451).

Relativamente à posição das ordenadas de uma curva, D'Alembert, no artigo “*Courbe*” da *Encyclopédie*, onde pode ler-se que as ordenadas positivas devem ser tomadas todas no mesmo “sentido”, e as negativas do lado “oposto” acrescentando que «*ce qu'on trouve dans tous les Algebristes & géomètres modernes*»¹⁶ (*Encyclopédie*, art. *Courbe*, p.451).

Neste artigo, D'Alembert refere relativamente à posição das ordenadas o seguinte:

«1.º- Les ordonnées positives doivent être prises d'un même côté; car soit (figure 50) AP l'axe des x , & qu'on trouve deux valeurs positives pour y ; soit Pm le plus grand de ces valeurs, je dit que la plus petite PM doit être prise du même côté. [...] 2º Si on a deux valeurs, l'une positive PM , l'autre négative Pm (figure 51), il faudra

¹³ «avançar uma coisa que não se pode conceber».

¹⁴ «eu creio poder assegurar que, se se aplica a todos os problemas que se possam resolver, & que contêm quantidades negativas, não se encontrará em falha».

¹⁵ «as regras das operações algébricas sobre as quantidades negativas, são admitidas por todo o mundo, e geralmente como exactas, qualquer que seja a ideia que se associe de resto a estas quantidades».

¹⁶ «o que se encontra em todos os algebristas e géometras modernos».

les prendre de différens côtés» ¹⁷(*Encyclopédie*, art. *Courbe*, p. 451).

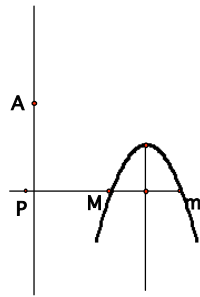


fig. 1.2 – Parte da Fig. 50 de (*Encyclopédie*, art. *Courbe*)

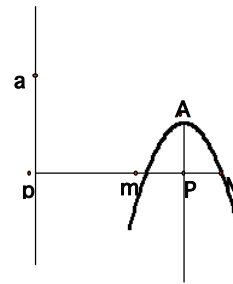


fig. 1.3 – Fig. 51 de (*Encyclopédie*, art. *Courbe*)

No livro *Essai sur les Éléments de Philosophie*, no capítulo XIV – *Mathématiques*, em *Eclaircissement sur les éléments d’algèbre*, D’Alembert faz uma crítica mais explícita à pouca exactidão da noção de quantidades negativas presente nas obras de álgebra, criticando não só a visão destas quantidades como menos de “nada” mas também a sua interpretação como débitos e voltando a referir, a existência na geometria, de excepções à noção de quantidades negativas como opostas às quantidades positivas:

«Les uns regardent ces quantités comme au-dessous de rien, notion absurde en elle-même; les autres, comme exprimant des dettes, notion trop bornée et pour cela seul peu exact; les autres, comme des quantités que doivent être prises dans un sens contraire aux quantités qu’on a supposées positives; notion dont la géométrie fournit aisément des exemples, mais qui est sujette à de fréquentes exceptions» (D’Alembert, 1805, p. 301). ¹⁸

D’Alembert neste texto vai mais longe na sua crítica. Relativamente à noção de quantidades geométricas com sinais contrários como correspondentes a segmentos com “sentidos opostos”, o matemático francês refere que esta está sujeita a frequentes excepções mas também salienta que a geometria dá muitos exemplos onde esta noção é válida.

¹⁷ «1º As ordenadas positivas devem ser consideradas de um mesmo lado; porque, sendo [...] AP o eixo dos x , e se encontrem dois valores positivos para y ; sendo Pm o maior dos dois valores, então eu digo que o mais pequeno PM deve ser considerado do mesmo lado. [...] Se se tem dois valores, um positivo PM , o outro negativo Pm , será preciso considerá-los de diferentes lados.»

¹⁸ «Uns olham estas quantidades como abaixo de nada, noção absurda em si mesma; os outros, como expressando dívidas, noção demasiado limitada e por isso pouco exacta; os outros, como quantidades que devem ser tomadas em sentido contrário às quantidades que se supuseram positivas; noção em relação à qual a geometria fornece facilmente exemplos, mas que é sujeita a frequentes excepções.»

Na mesma obra, o autor considera a Álgebra como a ciência líder das *Matemáticas*, mas sublinha que, apesar da certeza que ela tem nos seus princípios e nas consequências que dela resultam, não está, em certas situações, livre de obscuridade. Numa nota de rodapé, D'Alembert refere não conhecer obra alguma onde a teoria dos números negativos fosse totalmente clara (D'Alembert, 1805, p. 291).

Na parte final, em *Opuscules*, D'Alembert deixa uma recomendação:

«Je remarquerai en finissant que toute la théorie des quantités négatives n'est pas encore bien éclaircie [...]. Il seroit à souhaiter que dans les Traités élémentaires, on s'appliquât davantage à bien éclaircir la théorie mathématique de ces quantités, & du moins qu'on ne la présentât pas de manière à laisser dans l'esprit des Commençaens des notions fausses» (D'Alembert, 1780, pp. 277-278). ¹⁹

Alguns dos problemas apresentados por D'Alembert em *Opuscules* serão estudados mais à frente, no terceiro capítulo deste trabalho, para fazer uma análise comparativa da interpretação geométrica das quantidades negativas de Rivara e de D'Alembert.

1.3. Bezout

Étienne Bezout (1730-1783) escreveu uma obra orientada para o ensino traduzida para português por José Joaquim Faria sob o título *Elementos de Analyse Mathematica* e publicada 1774 em dois volumes para as cadeiras de Álgebra e de Cálculo Infinitesimal da Universidade (de Coimbra) (Bezout, 1825).

No primeiro volume, Bezout apresenta uma “*Reflexão sobre as quantidades positivas, e negativas*” onde explica que os sinais + e – podem representar, além das operações de adição e subtração, a existência de uma relação entre duas quantidades, sendo que, as quantidades podem ser consideradas em dois sentidos: «ou como capaz de aumentar outra quantidade, ou como capaz de a diminuir». Bezout refere ainda que se na resolução de um problema o valor

¹⁹ «Eu realçarei para terminar que toda a teoria das quantidades negativas não está ainda bem esclarecida. [...] Seria desejável que nos tratados elementares, se se applicasse uma teoria destas quantidades melhor esclarecida, & pelo menos que não se apresentasse de maneira a deixar no espirito dos principiantes falsas noções.»

da incógnita é negativo, isso significa que essa incógnita deve ser considerada com um sentido contrário ao suposto inicialmente (1825, pp. 50-51).

Uma longa secção (1825, pp. 235-331) sobre a aplicação da álgebra à geometria compõe este volume, sendo a primeira parte dedicada ao uso de equações para resolver problemas geométricos, sem recurso a coordenadas. Os problemas que a compõem variam desde inscrever um quadrado num triângulo dado a questões sobre volumes de sólidos²⁰ (1825, pp. 235-264).

As coordenadas são introduzidas para o estudo “*das linhas curvas em geral, e em particular das Secções cónicas*” (1825, pp. 265-331). Relativamente às coordenadas, Bezout (p. 268) refere que:

«serão negativas aquelas (abscissas) que estiverem na parte do eixo contrária á que se considerar como positiva. [...] As ordenadas também se distinguem em positivas e negativas, cónforme estão para huma, ou para outra parte do eixo das abscissas».

A primeira curva é um circunferência. Bezout, partindo de uma propriedade que relaciona a ordenada e a respectiva abscissa de uma curva, exprime-a por uma equação e, usando o Teorema de Pitágoras e a propriedade que define a curva, deduz que é uma circunferência.

Relativamente ao exemplo da circunferência, Bezout faz uma mudança de coordenadas, nomeadamente uma mudança da origem de um extremo do diâmetro da circunferência para o centro da mesma.

O resto da secção, que é a maior parte do capítulo referente à aplicação da Álgebra à Geometria, é dedicada ao estudo das secções cónicas, pelo que, poderá depreender-se que a sua “geometria coordenada” tinha por objectivo o estudo destas curvas (Bezout, 1825, p. 270-331).

²⁰ O Problema IV (Bezout, 1825, p. 242) é o problema V da obra de Rivara, *Resolução analítica de Problemas Geométricos* (Rivara, 1815, p. 35).

1.4. Lacroix

Sylvestre-François Lacroix (1765 - 1843) escreveu um trabalho com o título *Traité Élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'Application de l'algèbre a la Géométrie* onde trata o assunto da geometria analítica e cuja primeira edição é do ano 1798.

O capítulo dedicado à aplicação da Álgebra à geometria juntamente com o apêndice sobre geometria analítica no espaço (Lacroix, 1807, pp. 83-276) ocupam a maior parte do livro. As suas primeiras páginas referem-se à “geometria não coordenada” (Lacroix, 1807, pp. 83-114) semelhante à vista no trabalho de Bezout. Tem uma secção dedicada à construção expressões algébricas (Lacroix, 1807, pp. 91-99) onde se denota a influência de Descartes. Nesta obra também aparece uma pequena referência a expressões de áreas e volumes (Lacroix, 1807, pp. 113-114).

Relativamente à interpretação das soluções negativas, Lacroix refere que o sinal — se interpreta revertendo, de certa forma, o enunciado da questão ou tomando as “linhas” que são afectadas pelo sinal — em sentido contrário ao que havia sido suposto. E acrescenta que, geralmente, devem ser tomadas num “sentido oposto” ao daquelas “linhas” que são afectadas pelo sinal +, apresentando alguns exemplos.

Num deles, Lacroix comenta que a equação que o resolve dá duas soluções com sinais contrários, embora as “linhas” correspondentes não sejam “opostas”. Mas acrescenta que se se tratasse de as aplicar à solução de um problema onde elas fossem consideradas como a distância a um ponto fixo, medidas sobre uma linha de direcção constante, diz Lacroix que deveriam ser consideradas em lados opostos relativamente a esse ponto (Lacroix, 1807, p. 104)²¹.

Portanto, para Lacroix, duas quantidades com sinais contrários correspondem, geralmente, a dois segmentos com “sentidos opostos” relativamente a um ponto comum aos dois. E acrescenta que as circunstâncias relativas à posição das “linhas” podem sempre ser deduzidas a partir de triângulos e, mediante as propriedades dessas figuras, exprimirem-se algebricamente (Lacroix, 1807, p. 112).

²¹ O problema referido no parágrafo 78 da obra de Lacroix (1807, pp. 104-112), é semelhante ao problema IV da obra de Rivara (Rivara, 1815, pp. 24-34)

O autor introduz a “geometria coordenada” fazendo referência a Descartes:

«L'Algèbre sert non-seulement à trouver la grandeur des lignes et des parties de l'étendue, comparées les unes aux autres, mais elle fournit encore le moyen de déterminer les figures qu'affectent ces lignes, et en général les formes de l'espace. Descartes, en remarquant le premier que ces figures et ces formes établissent des relations de grandeur entre des droites, est parvenu à appliquer l'Algèbre à la théorie des lignes en général; et par cette découverte, les Mathématiques ont entièrement changé de face» (Lacroix, 1807, p. 115).²²

Lacroix define as coordenadas, a abcissa e a ordenada, o eixo e a origem das coordenadas, dando especial relevo às coordenadas negativas.

Os sinais das abcissas e das ordenadas são, segundo Lacroix, por convenção, considerados como actualmente:

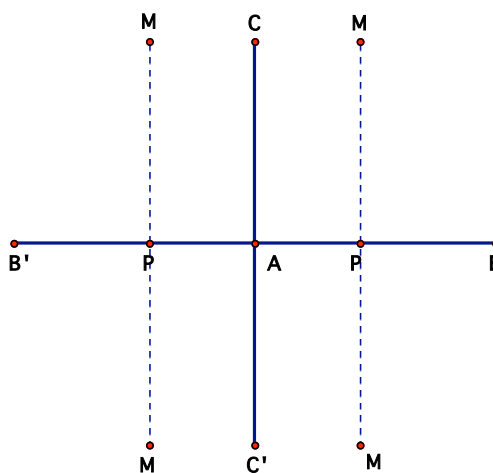


fig. 1.2 – Figura 37 de (Lacroix, 1807)

²² «A Álgebra serve não só para determinar a grandeza das linhas e das partes do plano, comparadas umas com as outras, como ainda fornece o meio de determinar as figuras que afectam estas linhas e, em geral as formas do espaço. Descartes ao assinalar o princípio de que estas figuras e formas estabelecem relações de grandeza entre as rectas, conseguiu aplicar a álgebra à teoria das linhas em geral; e por esta descoberta, a matemática mudou completamente de face».

$$\left\{ \begin{array}{l} BAC, \dots \left\{ \begin{array}{l} +AP \quad \text{ou} \quad +x \\ +PM \quad \quad \quad +y \end{array} \right. \\ B'AC, \dots \left\{ \begin{array}{l} -AP \quad \text{ou} \quad -x \\ +PM \quad \quad \quad +y \end{array} \right. \\ B'AC', \dots \left\{ \begin{array}{l} -AP \quad \text{ou} \quad -x \\ -PM \quad \quad \quad -y \end{array} \right. \\ BAC', \dots \left\{ \begin{array}{l} +AP \quad \text{ou} \quad +x \\ -PM \quad \quad \quad -y \end{array} \right. \end{array} \right.$$

fig. 1.3– Esquema de (Lacroix , 1807, p.120)

O princípio fundamental da geometria analítica é declarado por Lacroix:

«L'équation d'une courbe s'obtient toujours en exprimant analytiquement, ou l'une quelconque de ses propriétés[...], ou les circonstances de sa description [...]. Réciproquement une équation quelconque, considérée en elle-même, donne aussi naissance à une courbe dont elle fait connaître les propriétés» (Lacroix, 1807, p. 121).²³

A partir de propriedades da recta e da circunferência, Lacroix determina as respectivas equações.

A fórmula actual da equação da recta $y = ax + b$ é apresentada e explorada por Lacroix, sendo a a tangente do ângulo que a recta forma com o eixo das abcissas, b é a ordenada na origem e $-\frac{b}{a}$ a abcissa na origem. Para encontrar a recta que passa por dois pontos de coordenadas α, β e α', β' é determinada a intersecção de $\beta = a\alpha + b$ com $\beta' = a\alpha' + b$. Para obter uma recta que passa pelo ponto de coordenadas α, β e paralela à recta $y = a'x + b'$ é imediatamente indicada como $y - \beta = a'(x - \alpha)$ porque $y - \beta = a(x - \alpha)$ é a equação geral da recta que passa pelo ponto indicado e a' satisfaz a segunda condição. No entanto, para determinar o declive de rectas perpendiculares, o processo

²³ «A equação de uma curva obtém-se sempre exprimindo analiticamente, ou uma qualquer das suas propriedades, ou as circunstâncias da sua descrição. Reciprocamente uma qualquer equação, considerada em si mesma, dá também origem a uma curva que faz conhecer as propriedades».

não é totalmente independente de referências a figuras geométricas, como nos casos anteriores. Lacroix recorre a triângulos semelhantes para justificar que $-\frac{1}{a}$ e a são declives de rectas perpendiculares (Lacroix, 1807, pp. 125-126). Também para determinar o ângulo formado por duas rectas, $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$ que, como diz Lacroix, é igual ao ângulo formado pelas duas rectas que passam na origem das coordenadas paralelas a essas, $y = ax$ e $y = a'x$, o autor recorre a uma construção geométrica.

A fórmula da distância entre dois pontos $\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}$ é associada à hipotenusa de um triângulo rectângulo (Lacroix, 1807, p. 125). Através desta fórmula, é determinada a equação geral da circunferência $x^2 - 2px + y^2 - 2qy = 0$, sendo p , q as coordenadas do centro da circunferência. É indicada também a equação da circunferência cuja origem das coordenadas é um dos extremos do diâmetro, $x^2 - 2rx + y^2 = 0$ (Lacroix, 1807, pp. 131-132).

A forma como Lacroix expõe os resultados é inovadora, relativamente aos autores anteriormente referidos. Este procura evitar a referência a propriedades de figuras geométricas e dar ênfase à aplicação de fórmulas.

O resto da geometria analítica no plano no trabalho de Lacroix inclui a resolução de problemas de aplicação dos resultados expostos, em especial sobre secções cónicas. Inclui também a transformação de coordenadas de uma curva.

1.5. Carnot

Lazare Carnot (1753-1823), escreveu uma obra *Géométrie de Position* publicada em 1803 referida por Lacroix como contendo uma colecção de problemas muito interessantes de aplicação da Álgebra à Geometria (Lacroix, 1807, p. 112).

Ao escrever a *Géométrie de Position*, Carnot propôs-se apresentar uma nova teoria no que concerne à posição das quantidades negativas e positivas, o que evidencia que continuava por esclarecer, no início do séc. XIX, a questão referente à interpretação geométrica a dar às quantidades negativas.

Já antes, D'Alembert havia feito referência ao facto de a *Analyse de Situation* ser algo que faltava à Álgebra:

« C'est le défaut de cette analyse, qui fait qu'un problème paroît souvent avoir plus de solutions qu'il n'en doit avoir dans les circonstances limitées où on le considère» (*Encyclopédie*, art. *Situation*, pp. 53-54).²⁴

Na sua *Géométrie de Position*, Carnot começa por apresentar uma série de argumentos para refutar quer a tese “das quantidades negativas menores do que nada”, quer a “das quantidades reais negativas opostas às positivas” (Carnot, 1803, p. vi-xvii) para, em seguida, apresentar os princípios que fundamentam a sua teoria:

«Maintenant donc j'ai démontré combien sont obscures et fausses les notions communément admises des quantités dites négatives, il reste à rechercher et établir les véritables principes de la théorie qui les concerne»²⁵ (Carnot, 1803, p. x).

Na base da teoria de Carnot estão dois conceitos fundamentais: as figuras primitivas e as correlativas e as quantidades directas e inversas.

Para Carnot, as soluções obtidas através das equações que traduzem um determinado problema nem sempre correspondem à mesma figura geométrica. Segundo o autor, se uma equação tiver várias raízes, algumas, as positivas, correspondem verdadeiramente ao sistema sobre o qual se fizeram os raciocínios e cada uma delas satisfaz realmente a questão proposta; outras, as negativas, não se referem exactamente à questão proposta, mas a outra análoga e, portanto, a outro esquema geométrico e, neste caso, segundo a teoria de Carnot, há necessidade de fazer mudanças de sinais e procurar novas condições que podem corresponder a esta nova questão (Carnot, 1803, p. 46).

À figura “original” Carnot chama figura ou sistema primitivo, e às outras que com ela estão relacionadas designa-as figuras ou sistemas transformados ou correlativos (Carnot, 1803, p. xxvi).

Na geometria de Carnot, a teoria das quantidades ditas negativas e positivas é substituída pela teoria das quantidades que ele denomina directas e inversas. As quantidades

²⁴ «É a falta desta análise, que faz com que um problema pareça frequentemente ter mais soluções do que as que deve ter nas circunstâncias limitadas em que se considera».

²⁵ «Agora que demonstrei quão obscuras e falsas são as noções comumente admitidas das quantidades ditas negativas, resta procurar e estabelecer os verdadeiros princípios da teoria que lhes concerne».

directas e inversas são quantidades absolutas consideradas como diferenças de duas outras quantidades. Quando das duas quantidades, a que é maior no sistema primitivo continua a ser maior no novo sistema, a diferença dos valores absolutos das duas quantidades não muda de sinal e denomina-se quantidade directa; quando pelo contrário, ela se torna mais pequena, a diferença muda de sinal e denomina-se quantidade inversa (Carnot, 1803, pp. xxii.-xxiii).

Se dois sistemas correlacionados são tais que a ambos podemos aplicar o mesmo raciocínio, então eles estão em correlação directa e não há necessidade de efectuar qualquer mudança de sinal para que as fórmulas do sistema primitivo possam aplicar-se ao sistema correlativo (Carnot, 1803, p. 29). Mas se os raciocínios a fazer sobre os dois sistemas correlacionados deixam de ser literalmente os mesmos e há também necessidade de mudar o sinal de uma ou mais quantidades os dois estão em correlação indirecta e neste caso devem mudar-se, nas condições, o sinal de cada uma das quantidades que forem inversas, e manter o sinal de cada uma das que forem directas (Carnot, 1803, pp. 24-25).

Vejamos num exemplo apresentado por Carnot na sua obra, a ideia que está na base da sua teoria.

Consideremos as figuras seguintes:

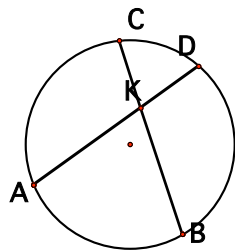


fig. 1.4 – Figura 6 de (Carnot, 1803)

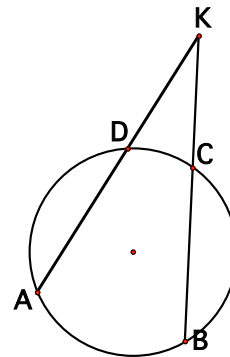


fig. 1.5 – Figura 7 (Carnot, 1803)

Em ambas as figuras, fig.1.4 e fig.1.5, é válida a relação $\overline{KA.KD} = \overline{KC.KB}$. Esta equação resulta das propriedades da circunferência descritas na Prop. XXXV do livro terceiro dos *Elementos de Euclides* que diz que «se dentro de hum circulo qualquer, duas linhas rectas se cortarem; será o rectangulo comprehendido pelos segmentos de huma igual ao rectangulo comprehendido pelos segmentos da outra» (Euclides, 1768, p. 122); e no corolário da Prop. XXXVI do mesmo livro que refere que «se de hum ponto qualquer fóra de hum circulo se tirarem duas rectas inteira, que cortem o circulo, os rectangulos comprehendidos pelas rectas

inteiras, e pelas partes dellas, que ficão entre o dito ponto, e o convexo²⁶ da circumferencia, serão iguaes entre si» (Euclides, 1768, p. 127). As partes da recta AD são $[KA]$ e $[KD]$ e da recta BC , $[KB]$ e $[KC]$, nas duas figuras, fig.1.4 e fig.1.5.

A ideia de Carnot na sua *Géométrie* é considerar as duas figuras como correlacionadas, isto é, ver a fig.1.5 como resultante da fig.1.4 através da “movimentação contínua” do ponto K . Sendo assim, a fig.1.4 será o sistema primitivo e a fig. 1.5 o sistema transformado. Essa “mudança de posição” provoca, segundo Carnot, uma “mudança de sinal” nas variáveis da equação que descreve o sistema. No exemplo anterior, da fig.1.4 resulta $\overline{KD} = \overline{AD} - \overline{KA}$ e da fig.1.5 $\overline{KD} = \overline{KA} - \overline{AD}$, ou seja \overline{KD} é uma quantidade “inversa” e portanto deve mudar de sinal na equação $\overline{KA}.\overline{KD} = \overline{KC}.\overline{KB}$. No entanto, como \overline{KC} também é uma quantidade inversa, as mudanças de sinais nos dois membros da equação é a mesma e portanto, a equação mantém-se inalterada, quer o ponto esteja no interior, quer no exterior da circumferência (Carnot, 1803, pp. 46-47).

É de salientar que, quando a fig.1.4 se vai aproximando da fig.1.5, em determinado “momento” o ponto K pertence à circumferência e \overline{KC} e \overline{KD} são zero, o que confirma o que refere Carnot na sua obra: uma quantidade pode tornar-se inversa se esta passar por zero.

Depois de expor a sua teoria, Carnot apresenta na secção V com o título “*Application de la théorie précédente à diverses questions de géométrie élémentaire*”, uma série de problemas de aplicação da álgebra à geometria (Carnot, 1803, pp. 356-422).

1.6. Desenvolvimentos em Portugal

José Anastácio da Cunha (1744 - 1787), matemático português notável do séc. XVIII, escreveu a obra *Princípios Mathematicos*, publicada após a sua morte, em 1790. Esta obra, embora não seja a única, foi a mais marcante da sua carreira.

Nela pode encontrar-se um pequeno capítulo (Livro VIII) dedicado aos números

²⁶ «Convexe, (Géom.) se dit de la surface extérieure d'un corp rond, par opposition à la surface intérieure qui est creuse ou concave» (*Encyclopédie*, art. *Convexe*, p. 168).

negativos, onde o autor define grandeza positiva como aquela que é precedida do sinal + e que se supõe «destinada a se juntar a alguma grandeza» e grandeza negativa como aquela que é precedida do sinal – e que se supõe «destinada para se tirar de alguma grandeza». No mesmo capítulo indica, sem grandes explicações, as regras das operações com *grandezas negativas*. Excepção é o facto de Anastácio da Cunha esclarecer que «*subtrahir huma grandeza negativa he o mesmo que ajuntala depois de a fazer positiva e exemplifica: $A - (-B)$ he $A + B$; pois $A + B + (-B)$ he A ». No entanto, não faz qualquer referência ao caso de se subtrair uma grandeza maior a uma menor. Em relação à multiplicação e divisão, Anastácio da Cunha apenas enuncia as regras: se as grandezas têm sinais contrários (ou como ele diz, se são grandezas contrárias), então o produto e o quociente são negativos; se têm o mesmo sinal, então são positivos (c.f. Anastácio da Cunha, 1790, pp. 100-105).*

Mais à frente encontra-se um capítulo (Livro XIII) sobre o uso de equações para resolver problemas geométricos, sem usar coordenadas, onde são apresentados catorze problemas (Anastácio da Cunha, 1790, pp. 158-169).

Logo na primeira página do capítulo, o autor apresenta uma *hypothese* onde refere que «*grandezas contrarias collocam-se para partes opostas todas as vezes que as circunstancias o consentem*» (1790, XIII, pp. 158). Isto mostra que, tal como D'Alembert, Anastácio da Cunha considera que, em geometria, quantidades com sinais contrários estão em sentidos opostos, salvo excepções, que exemplifica através de alguns dos problemas que expõe.

No final do primeiro problema, que envolve ângulos e lados de um triângulo, aparece uma nota que diz que quando o ângulo é agudo a solução é positiva e quando é obtuso a solução é negativa e portanto «*jaz para a parte opposta a respeito do que sucede quando o ângulo he agudo*». Num outro problema, Anastácio obtém dois valores para x e faz o seguinte comentário: «*dois valores, certos na quantidade [...]; mas errados nos finaes, pois não jazem para partes opostas como o cálculo indica*». E mais à frente acrescenta que a *hypothese* referida no início da secção pode «*fazer errar as soluções dos problemas*» que não deveriam ser tomadas como certas senão depois de «*confirmadas por demonstrações rigorosas*» (Anastácio da Cunha, 1790, pp. 163-164).

No mesmo capítulo, Anastácio da Cunha, em alguns problemas, quando considera trabalhosa a primeira resolução, apresenta resoluções alternativas. Noutros, além da resolução algébrica, descreve os passos para a construção geométrica das soluções. Os últimos cinco problemas são problemas de construção de expressões algébricas e equações.

Anastácio da Cunha introduz as coordenadas no capítulo seguinte (Livro XIII) dedicado às linhas curvas, em particular às secções cónicas. Este contém uma série de onze problemas onde as equações das curvas são soluções de problemas de lugares geométricos derivadas de definições ou de propriedades geométricas, o que mostra a influência da geometria das coordenadas de Descartes (Anastácio da Cunha, 1790, pp. 170-192).

O primeiro problema consiste em determinar a equação da recta:

«Seja AB a recta proposta. Tire-se huma recta CD : escolham-se AC , a ; BD , b ; CD , c ; CE , x ; e EF , y . Será $c:b-a::x:y-a$; e logo $cy-ac=(b-a)x$, ou $0=ac+(b-a)x-cy$ » (Anastácio da Cunha, 1790, p. 172).

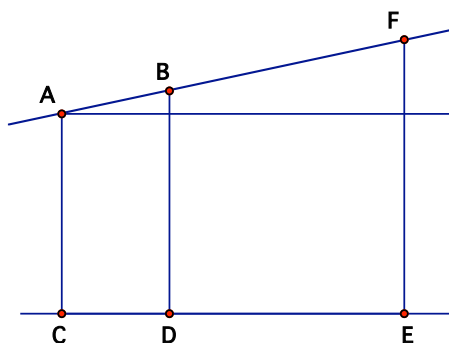


fig. 1.7 – Figura I de (Anastácio da Cunha, 1790, Livro XIII)

Nos problemas II e III, Anastácio da Cunha determina as equações das secções cónicas e prova uma série de propriedades acerca delas. Nos corolários que aparecem a seguir ao problema II são feitas algumas mudanças de coordenadas.

Anastácio termina este capítulo referindo-se às dificuldades que se sentiam na época na interpretação das quantidades negativas dizendo, nomeadamente, que a *analyse moderna* se baseia em hipóteses que nem sempre se enquadram no contexto dos problemas e muitas vezes até os contrariam

«pois se por huma parte, a liberdade de chamar somma a huma diferença, ou diferença a huma somma, generaliza e facilita sobre maneira as soluções; por outro a restricção de não poder chamar iguaes senão as grandezas que não são contrarias; [...], limita ás vezes as soluções e as dá erradas, por se achar em contradicção com as dadas dos problemas» (1790, pp. 191-192).

A publicação em 1815 da obra *Resolução Analytica dos Problemas Geométricos e*

indagação da verdadeira origem das quantidades negativas do matemático português, José Joaquim Rivara, é revelador do interesse, em estudar a questão respeitante à interpretação das quantidades geométricas, assunto que continuava por esclarecer naquela data e mesmo no final do século XIX ainda não tinham sido totalmente ultrapassadas as dificuldades inerentes à doutrina das quantidades negativas, como se pode verificar pela leitura, dos primeiros parágrafos, na Revista Científica e Literária *O Instituto*, do artigo com o título “Primeiras noções sobre o cálculo das quantidades geométrica” (Almeida, 1892, pp.562-578 e 626-639). O autor, Luís Costa Almeida, apresenta os motivos que, na sua opinião, estariam na origem dessas dificuldades. Faz uma crítica ao uso do sinal – para denotar quantidades negativas isoladas quando este tem já um uso consagrado na aritmética e na álgebra para designar a subtração; e como consequência da falta de uma ideia precisa acerca das quantidades negativas, as regras dos sinais e as operações com estas quantidades não são claramente entendidas.

Nos próximos capítulos desta tese será desenvolvido um estudo que recaí sobre o primeiro problema da obra de Rivara.

Capítulo 2

O problema de Rivara: resolução analítica e interpretação geométrica das soluções negativas

2.1 Rivara – O Homem²⁷

Nascido em Lisboa em 1772, José Joaquim Rivara foi aluno da Casa Pia onde teve por mestre o insigne José Anastácio da Cunha.

Em 1789 matriculou-se na Universidade de Coimbra, dando sequência aos seus estudos, cursou Matemática, curso no qual se destacou, recebendo todos os anos prémio de mérito.

Doutorou-se em 19 de Julho de 1795 e tornou-se docente daquela Universidade, sendo o sexto lente da Faculdade de Matemática onde leccionou a cadeira de Cálculo, até à sua morte em 1826 (Freire, 1872, p. 48).

No decurso da vida académica universitária foi, ainda, deputado da Junta da Fazenda, órgão vital de administração da Universidade de Coimbra, presidido pelo reitor e do qual faziam parte três deputados eleitos para este cargo de entre o corpo de lentes.

No âmbito dos seus trabalhos académicos dedicou-se ao estudo das quantidades negativas, resultando desse esforço a publicação, pela Real Imprensa da Universidade, em 1815, da obra *RESOLUÇÃO ANALYTICA DOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS e Indagação da Verdadeira Origem das Quantidades Negativas*, composta por uma série de seis problemas, através dos quais procura, engenhosamente, apresentar algumas aplicações da Álgebra à Geometria, numa busca de aplanar as dificuldades de D'Alembert, Bezout e Lacroix.

2.2 Rivara – O Obra

José Joaquim Rivara, com a sua obra, procura demonstrar como devem ser entendidas, à luz da geometria, as raízes negativas. Usando coordenadas, embora sem os eixos

²⁷ Informações retiradas de (Silva, 1987) e (Freire, 1872).

coordenados explícitos, ele traduz os problemas por equações, resolve estas e, depois de encontradas as soluções interpreta-as geometricamente.

Na época, vários autores definiram as quantidades geométricas negativas como “opostas” às quantidades positivas, o que não era de todo uma noção clara e exacta.

Como já vimos, quantidades (“linhas”) “opostas” eram interpretadas, muitas vezes, como segmentos de uma mesma recta com “sentidos contrários”, no entanto, havia problemas em que as quantidades “opostas” eram interpretadas como correspondentes a segmentos de recta distintas que se encontravam em partes “opostas” do plano, delimitadas por uma recta e com um ponto em comum.

Como já mencionado, vários autores, por esta época, se debruçaram sobre a problemática das quantidades negativas, como por exemplo, D’Alembert, Bezout, Carnot e Anastácio da Cunha.

D’Alembert procura transmitir-nos uma noção de quantidades negativas como comprimentos de segmentos com “sentidos opostos” ao das quantidades positivas; sendo certo que Anastácio da Cunha nos diz também que «*grandezas contrarias collocam-se para partes opostas*», não deixa de acrescentar que tal é verdade «*todas as vezes que as circunstancias o consentem*».

A interpretação geométrica das quantidades negativas era o grande problema, na época, da introdução dos métodos algébricos nos problemas de geometria.

Rivara terá compreendido a pouca clareza da definição da época de quantidades negativas e, portanto, propõe-se na sua obra clarificar esta questão.

Na *Resolução Analítica dos Problemas Geométricos* surge uma *Advertência*, uma espécie de prefácio, onde Rivara refere os autores e respectivos estudos donde foram recolhidos os problemas que ele analisa na sua obra. Faz referência ao facto de os «*embaraços e paradoxos que se encontram na posição das linhas, que as raízes negativas das equações dos mencionados problemas representam, procedem daquelles Geometras se terem desviado da lei da continuidade geométrica, a qual nas nossas soluções observamos e rigorosamente seguimos*» (Rivara, 1815).

Apesar de autores anteriores já terem abordado o conceito inerente à lei da continuidade, é relevante mencionar que Rivara utilizou esta para confirmar a veracidade das suas interpretações geométricas das quantidades negativas. Não deve ser estranha esta opção à qualidade de discípulo de Anastácio da Cunha, em relação ao qual apresenta algumas

nuances diferenciadoras quanto à ideia de continuidade:

Anastácio da Cunha refere no livro XVII dos seus *Principios* que, «a experiencia tem mostrado aos geometras, que toda a variavel, entre cujos valores ha differenças infinitessimas, ao passar de positiva para negativa, se acha igual, ou a 0 ou a $\frac{1}{0}$ » (1790, p. 247) ;

Rivara refere que, segundo a lei da continuidade, «as expressões das quantidades lineares mudao de sinal na passagem por 0; ou ∞ » (Rivara, 1815, p. 5).

Subentende-se que Rivara terá procurado, sem grande sucesso, esclarecer a ideia de continuidade de Anastácio da Cunha ao introduzir, no seu próprio conceito, o termo *quantidades lineares*, que provavelmente terá implícita a ideia de uma linha (curva) contínua.

Relativamente a esta ideia de continuidade em Anastácio da Cunha, João Filipe Queiró refere que «lhe parece razoável que, sem uma construção dos números reais e uma noção de continuidade, se invoque a “experiência” para justificar este tipo de afirmação» (Queiró, 1994, p.16), noção que só viria a consolidar-se a partir dos estudos de Dedekind (1872).

2.3. O problema

Dada uma qualquer circunferência e uma recta com uma determinada “posição” que corte a circunferência e que passe num ponto, A , que pode ser exterior ou interior à circunferência ou mesmo estar sobre ela²⁸, pretende-se determinar o comprimento das partes dessa recta compreendidas entre o ponto A e a circunferência, em função da posição desse ponto:

«Conduzindo-se uma recta, que corte a circunferência de um circulo dado, por um ponto tomado dentro ou fora della, de posição determinada, isto he, que forme com o diâmetro um ângulo dado, achar as partes da mesma recta comprehendidas entre o ponto e a circunferencia» (Rivara, 1815, p. 35).

²⁸ No enunciado do problema, Rivara não refere o caso de A se encontrar sobre a circunferência, mas estuda-o mais à frente.

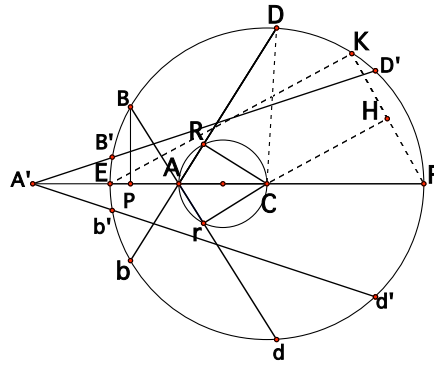


fig. 2.1 – Figura 1 de (Rivara, 1815)

Esta figura compreende uma série de construções geométricas que, neste trabalho, serão sucessivamente referidas ao longo da resolução do problema I. À primeira vista, a figura é bastante confusa e por isso será decomposta e apresentar-se-ão figuras apenas com as construções necessárias para acompanhar os raciocínios, à medida que vão sendo expostos.

Por uma questão de simplificação, usar-se-á a partir de agora a expressão “as partes da recta” para fazer referência ao comprimento dos segmentos de recta a determinar.

Antes de analisar a resolução feita por Rivara, deve esclarecer-se que o autor, considera que a “posição” de uma recta não tem correspondência directa com o seu declive. Para ele, rectas com declives simétricos têm a mesma “posição” e por isso Rivara, ao resolver o problema, determina as partes das duas rectas (com declives simétricos) compreendidas entre o ponto A e a circunferência, pelo que, o problema tem, para ele, quatro soluções correspondentes a quatro segmentos distintos.

Relativamente à resolução do problema, Rivara analisa os três casos: se A pertence ao interior da circunferência, se A está na circunferência e se A pertence ao exterior da circunferência.

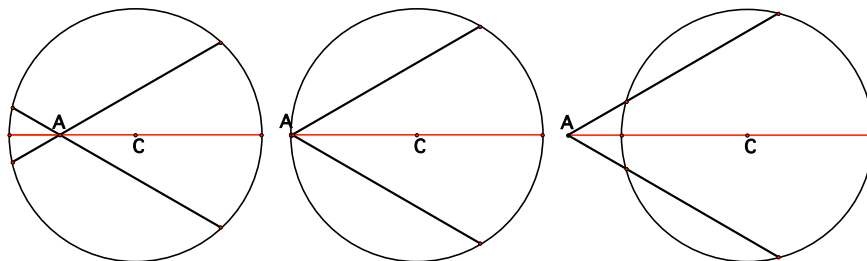


fig. 2.2

2.4. A resolução do problema

2.4.1. Caso do ponto pertencente ao interior da circunferência

Rivara começa por determinar as partes da recta pretendidas, para o caso de A se encontrar no interior da circunferência. Para tal recorre à equação da recta, à equação da circunferência e ao Teorema de Pitágoras, usado para o cálculo da distância entre dois pontos no plano²⁹.

O autor apresenta a notação a usar:

$$\overline{EC} = r; \overline{EA} = a; \overline{EP} = x; \overline{PB} = y; \overline{AB} = z,$$

considera como origem do referencial cartesiano o ponto E, embora de forma implícita.

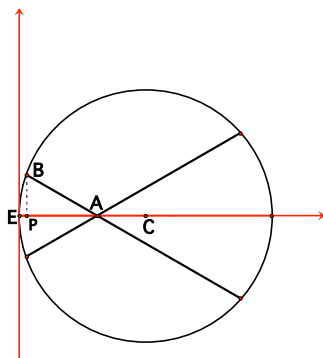


fig. 2.3

Além disso, representa por m a $\tan \widehat{EAB}$, sendo \widehat{EAB} , segundo palavras de Rivara, «medido no círculo proposto», ou seja, num círculo de raio r (1815, p.1).

Qual a necessidade de acrescentar este comentário?

Na obra *Principios Mathematicos*, Anastácio da Cunha, mestre de Rivara, define tangente dum arco como sendo o segmento de recta «que tocando em hum extremo, se

²⁹ Segundo Domingues, a fórmula da distância entre dois pontos não apareceu publicada explicitamente senão nos finais do séc. XVIII, nomeadamente, na obra de Lagrange de 1773, *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires*. Segundo ele, «this does not mean, of course, that previous mathematicians did not use that formula in some way: it is implicit for example in the equations for a circle or a sphere [...]. But apparently whenever someone needed to calculate a distance, or to write an expression involving one, the basis for the result was the Pythagorean theorem, not an established formula» (Domingues, 2007, pp. 93 e 99), tal como acontece na obra de Rivara, onde não aparece explicitamente a fórmula da distância, mas antes uma expressão que resulta da aplicação do Teorema de Pitágoras, embora esta obra tenha sido publicada posteriormente àquela de Lagrange.

termina nesse extremo e na recta que passa pelo centro e pelo outro extremo» (Cunha, 1790, p. 205).

No artigo *Tangente* da *Encyclopédie*, D'Alembert também define do mesmo modo tangente de um arco, com base na figura seguinte:

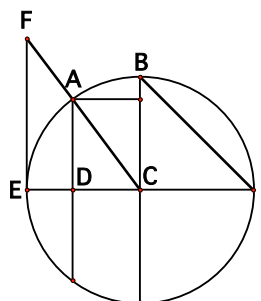


fig. 2.4 – Figura 1 de (D'Alembert, 1973)

«Une tangente d'un arc AE est une ligne droite EF élevée perpendiculairement sur l'extrémité du diamètre, & continuée jusqu'au point F où elle coupe la sécante CF , c'est-à-dire une ligne tirée du centre par l'autre extrémité A de l'arc AE . Ainsi la tangente de l'arc AE est une partie d'une tangente d'un cercle, c'est-à-dire d'une ligne droite qui touche un cercle sans le couper, interceptée entre deux lignes droites tirées du centre C par les extrémités de l'arc AE » (*Encyclopedie*, art. *Tangente*, pp. 883-4).³⁰

Repare-se que a noção de tangente está associada a um arco de circunferência, pelo que se depreende que, na época, o valor da tangente de um ângulo dependia do raio da circunferência considerada, como se pode ver na figura seguinte:

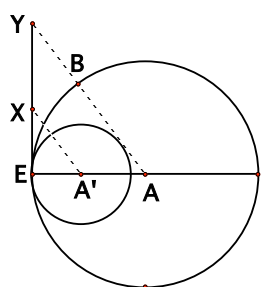


fig. 2.5

³⁰ «Uma tangente de um arco AE é uma linha recta EF traçada perpendicularmente sobre a extremidade do diâmetro, & continuada até ao ponto F onde ela corta a secante CF , isto é uma linha tirada do centro para a outra extremidade A do arco AE . Deste modo a tangente do arco AE é uma parte duma tangente dum círculo, isto é, duma linha recta que toca um círculo sem o cortar, intersectada entre duas linhas rectas tiradas do centro C pelas extremidades do arco AE .»

Na figura, o ângulo $EA'X$ e o ângulo EAX têm a mesma amplitude mas as suas tangentes, respectivamente \overline{EX} e \overline{EY} , não são iguais.

No caso do problema que está a ser estudado, Rivara refere, tal como já foi dito, que, para o cálculo de $\tan \hat{EAB}$, o ângulo EAB é «medido no círculo proposto», ou seja, num círculo de raio r (Rivara, 1815, p.1).

Para ilustrá-lo construa-se na fig. 2.3 uma nova circunferência, de centro A e raio r .

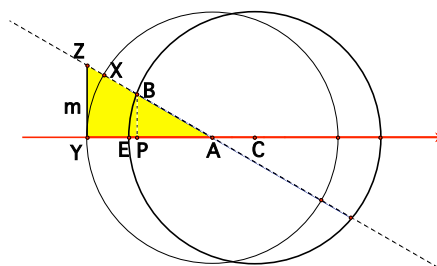


fig. 2.6

Assim sendo, $\hat{EAB} = \widehat{XY}$ e, portanto, $\tan \hat{EAB} = \tan \widehat{XY} = m$.

Depois deste esclarecimento, voltemos à resolução do problema.

Para achar as partes da recta pretendidas, Rivara, primeiramente, apresenta a equação da recta de “posição” m que contém A e a condição que permite determinar os pontos que estão a uma determinada distância do ponto A que ele designa por z . Esta distância é variável porque depende de B que é um ponto qualquer da recta de “posição” m que contém A . Através da conjunção daquelas duas condições, o autor obtém as expressões para as coordenadas dos pontos da recta, em função de z .

Substituindo estas expressões na equação da circunferência de centro C e raio r , Rivara acha as partes da recta que pretende.

Vejamos estes passos da resolução mais pormenorizadamente.

Rivara começa por dizer que «he sabido, que a equação $y = \frac{m}{r}(a - x)$ tem por lugar a recta AB » (1815, p. 1).

De facto, analisando a fig. 2.6, verifica-se facilmente que $[AYZ]$ e $[ABP]$ são triângulos semelhantes e da semelhança dos dois triângulos resulta $\frac{\tan \hat{EAB}}{r} = \frac{y}{a - x}$, donde

se obtém a equação da recta que Rivara designa por AB que contém o ponto A de coordenadas $(a;0)$, $y = \frac{m}{r}(a-x)$.

Ele apresenta também a condição $z^2 = (a-x)^2 + y^2$, que resulta da aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[ABP]$ e representa a distância do ponto A a um qualquer ponto da recta AB (1815, p. 1).

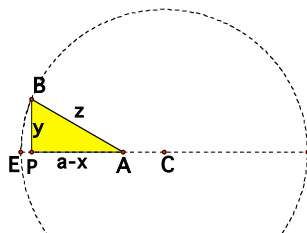


fig. 2.7

Em seguida, Rivara resolve a conjunção destas duas condições:

$$\begin{cases} y = \frac{m}{r}(a-x) \\ z^2 = (a-x)^2 + y^2 \end{cases}$$

Através desta resolução, obtém-se, tal como já referi, as expressões das coordenadas dos pontos da recta AB e que estão a uma distância z de A , expressões que dependem de z . Isto significa que, para cada z , se obtém as coordenadas de um par de pontos da recta AB que estão a uma distância z de A . Na figura seguinte estão representados alguns desses pares de pontos.

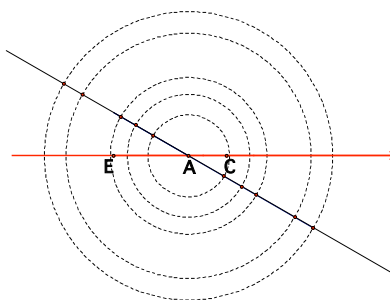


fig. 2.8

Quanto à resolução algébrica da conjunção das condições, Rivara refere que, substituindo y por $\frac{m}{r}(a-x)$ em $z^2 = (a-x)^2 + y^2$ se obtém $(a-x)^2 = \frac{r^2 z^2}{r^2 + m^2}$ da qual

resultam os dois valores de x , $x = a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}$ e $x = a + \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}$ (1815, p.1).

De facto, fazendo a substituição indicada, vem que $z^2 = (a - x)^2 + \frac{m^2}{r^2}(a - x)^2 \Leftrightarrow$

$$z^2 = (a - x)^2 \left(\frac{r^2 + m^2}{r^2} \right) \Leftrightarrow a - x = \pm \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} \Leftrightarrow x = a \pm \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}.$$

Rivara designou $a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}$ por x e $a + \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}$ por x' (1815, p.1), que são

as abscissas dos pontos da recta AB , em função de z .

Ao substituir x , na equação $y = \frac{m}{r}(a - x)$, pelas duas expressões determinadas, de x e de x' , resultam as expressões, em função de z , das ordenadas dos pontos da recta AB ,

$$y = \frac{m}{r} \left(a - a + \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} \right) \vee y = \frac{m}{r} \left(a - a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} \right) \Leftrightarrow y^2 = \frac{m^2 z^2}{r^2 + m^2}.$$

Depois de obtidas as expressões das coordenadas, Rivara determina os pontos de intersecção da recta com a circunferência:

«Como porem ás intersecções da recta e do círculo correspondem as mesmas coordenadas; se na equação do círculo³¹ $y^2 = 2rx - x^2$, introduzimos os valores achados de x e de y , teremos a equação $z^2 + \frac{2r(r-a)}{\sqrt{r^2 + m^2}}z = a(2r-a)$ » (Rivara, 1815, p. 2).

Substituindo as expressões de x e de y^2 na equação da circunferência de centro C e raio r , $y^2 = 2rx - x^2$, Rivara acha as partes \overline{AB} e \overline{Ad} da recta Bd (1815, p.2).

³¹ Nesta afirmação, Rivara escreve *circulo* quando quer referir-se à circunferência. Na obra de Anastácio da Cunha, *Princípios Mathematicos*, na primeira página encontra-se a definição que se segue, onde é referido que *circulo* e *circunferência* podem ser usados como sinónimos: «Se huma linha terminar hum plano, de sorte que todas as rectas, que se tirarem de hum ponto do mesmo plano a essa linha, sejam iguaes entre si, chamar-se-ha o plano Circulo; o ponto, centro; a linha, circumferencia, ou tambem Circulo» (Anastácio da Cunha, 1790, p. 1).

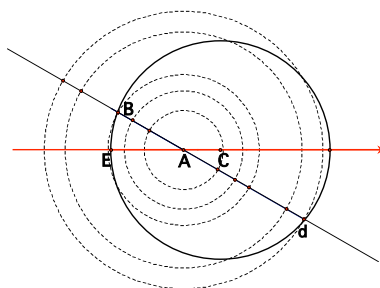


fig. 2.9

Ao fazer a substituição de x e y^2 em $y^2 = 2rx - x^2$, resulta

$$\frac{m^2 z^2}{r^2 + m^2} = 2r \left(a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} \right) - \left(a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} \right)^2 \Leftrightarrow z^2 + \frac{2r(r-a)}{\sqrt{m^2 + r^2}} z - a(2r-a) \text{ cujas}$$

raízes são

$$z = \frac{-r(r-a) + \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

ou

$$z = \frac{-r(r-a) - \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}},$$

a primeira positiva (porque $\sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}$ é maior que r^2 e $r(r-a)$ é menor que r^2)

e a segunda negativa, sendo as duas, respectivamente, \overline{AB} e \overline{Ad} .

Por outro lado, ao introduzir as expressões de x' e de y^2 em $y^2 = 2rx - x^2$, Rivara afirma que são determinadas as partes \overline{AD} e \overline{Ab} da recta bD (1815, p. 2).

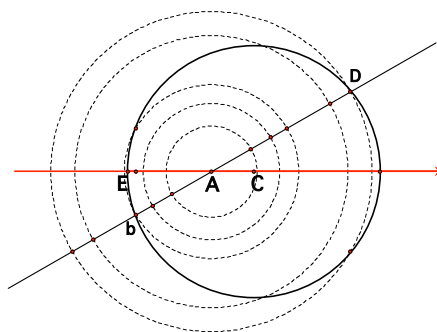


fig. 2.10

«Para virmos no conhecimento das linhas pertencentes às raízes, que corresponde a x' , reflectiremos, que na passagem por 90° do angulo EAB , se faz negativa a expressão da secante $\sqrt{r^2 + m^2}$, e conseguintemente a este caso pertencerá o valor x' . Pelo que, fazendo o angulo $FAD = EAB$, e substituindo os valores de x' e y na equação $y^2 = 2rx - x^2$ teremos $z^2 + \frac{2r(r-a)}{\sqrt{m^2 + r^2}}z = a(2r-a)$ » (Rivara, 1815, p.2).

Esta afirmação fundamenta-se no que a seguir se expõe.

A expressão $\sqrt{r^2 + m^2}$, que Rivara designa por *secante*, corresponde à secante³² do angulo EAB , ou seja, à hipotenusa do triângulo rectângulo de catetos r e m , que, tal como o $\cos E\hat{A}B$, se torna negativa quando o angulo passa a ser obtuso porque

$$\sec(E\hat{A}B) = \frac{r^2}{\cos(E\hat{A}B)}.$$

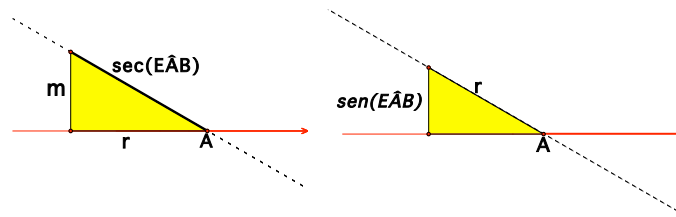


fig. 2.11

Como a secante muda de sinal quando angulo EAB se torna obtuso (ou seja, quando a recta Bd se “transforma” na recta bD), a expressão $x = a + \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}$, que Rivara

designa por x' , terá resultado da troca do sinal de $\sqrt{r^2 + m^2}$ na expressão

$$x = a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}},$$

³² Nos *Principios* de Anastácio pode ler-se a noção de secante associada à de tangente «II. Tangente do arco he a recta que tocando-o em hum extremo, se termina nesse extremo e na recta que passa pelo centro e pelo outro extremo. IIII. A porção desta recta, que jaz entre o centro e a tangente, chama-se secante» (Anastácio da Cunha, 1790, p. 205).

(Carnot, 1803, p. 25). Por isso, $x' = a + \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}$ corresponde, segundo Rivara, ao ângulo

EAB obtuso tal que $E\hat{A}B = F\hat{A}B$, ou seja, corresponde à recta bD e portanto, ao substituir

x em $y^2 = 2rx - x^2$ por $a + \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}$, Rivara determina as partes \overline{Ab} e \overline{AD} .

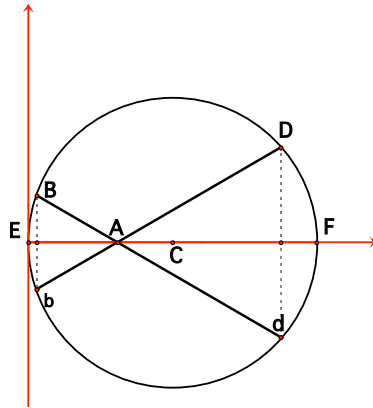


fig. 2.12

Na verdade, as abcissas dos pontos B e D são iguais, respectivamente, às de b e d sendo as ordenadas simétricas. Então, y^2 é o mesmo para os pontos B e b (e para d e D).

Rivara assume que as quantidades positivas estão acima do eixo das abcissas e as negativas abaixo, pelo que, ao considerar $x = a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}$, os valores de z correspondem,

de facto, à recta Bd e ao considerar $x' = a + \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}$, os valores de z correspondem à recta bD .

Então, substituindo x' e y^2 na equação da circunferência $y^2 + (x - r)^2 = r^2$ obtém-se

a equação $\frac{m^2 z^2}{r^2 + m^2} + \left(a + \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} - r \right)^2 = r^2$ cujas raízes são

$$z = \frac{r(r - a) + \sqrt{r^4 + m^2 a(2r - a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

ou

$$z = \frac{r(r - a) - \sqrt{r^4 + m^2 a(2r - a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}},$$

a primeira positiva e a segunda negativa.

Estes dois valores são, respectivamente, \overline{AD} e \overline{Ab} .

Rivara designa cada um dos valores encontrados para z , \overline{AB} , \overline{AD} , \overline{Ad} e \overline{Ab} , por z , z' , z'' e z''' , respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} z &= \frac{-r(r-a) + \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} = \overline{AB} \\ z' &= \frac{r(r-a) + \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} = \overline{AD} \\ z'' &= \frac{-r(r-a) - \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} = \overline{Ad} \\ z''' &= \frac{r(r-a) - \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} = \overline{Ab}. \end{aligned} \quad [2.1]$$

Note-se que $|z''| = z'$ sendo z' e z'' valores correspondentes a segmentos de recta simétricos relativamente ao eixo das abcissas. O mesmo se verifica no caso de z e z''' .

Para simplificar as quatro expressões encontradas, Rivara representa por $2c$ a soma de z com z' . O autor terá usado estes dois valores positivos, z e z' , que não correspondem à mesma recta, para assegurar que $2c$ é o comprimento do segmento $[bD]$ (e $[Bd]$).

Então fica

$$\overline{AB} + \overline{AD} = 2c \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{r^4 + m^2 a(2r-a)}{r^2 + m^2}} = 2c \quad [2.2].$$

E diz Rivara: «pondo b em vez de $2r-a$, teremos $m^2 = \frac{r^4 - r^2 c^2}{c^2 - ab}$,

$$\sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)} = c\sqrt{r^2 + \frac{r^4 - r^2 c^2}{c^2 - ab}}, \quad \sqrt{r^2 + m^2} = \frac{r(r-a)}{\sqrt{c^2 - ab}} \quad \text{» (1815, p. 3).$$

Vejamos como Rivara terá chegado a estes resultados.

Substituindo $2r-a$ por b em [2.2] vem:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{r^4 + m^2 ab}{r^2 + m^2}} &= 2c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{r^4 + m^2 ab}{r^2 + m^2} &= c^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m^2 = \frac{r^4 - r^2 c^2}{c^2 - ab} \quad [2.3].$$

Usando novamente a expressão determinada em [2.2] vem :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{r^4 + m^2 a(2r - a)}{r^2 + m^2}} &= 2c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{r^4 + m^2 a(2r - a)} &= c\sqrt{r^2 + m^2}. \end{aligned}$$

Substituindo nesta expressão o valor de m^2 determinado em [2.3] vem:

$$\begin{aligned} \sqrt{r^4 + m^2 a(2r - a)} &= c\sqrt{r^2 + \frac{r^4 - r^2 c^2}{c^2 - ab}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{r^4 + m^2 a(2r - a)} &= \frac{cr(r - a)}{\sqrt{c^2 - ab}} \quad [2.4]. \end{aligned}$$

Substituindo agora em [2.2] o valor de $\sqrt{r^4 + m^2 a(2r - a)}$ encontrado em [2.4] vem

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{r^4 + m^2 a(2r - a)}{r^2 + m^2}} &= 2c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\frac{\frac{cr(r - a)}{\sqrt{c^2 - ab}}}{\sqrt{r^2 + m^2}} &= 2c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{r^2 + m^2} &= \frac{r(r - a)}{\sqrt{c^2 - ab}} \quad [2.5]. \end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrados em [2.4] e [2.5] nas expressões das raízes z , z' , z'' e z''' obtidas em [2.1], obtêm-se as expressões simplificadas

$$\begin{aligned} z &= c - \sqrt{c^2 - ab} = \overline{AB}, \\ z' &= c + \sqrt{c^2 - ab} = \overline{AD}, \\ z'' &= -c - \sqrt{c^2 - ab} = \overline{Ad}, \quad [2.7] \\ z''' &= -c + \sqrt{c^2 - ab} = \overline{Ab}, \end{aligned}$$

z e z' positivas e z'' e z''' negativas.

Neste caso, em que o ponto A está no interior da circunferência (a é positiva), \overline{AB} e \overline{Ad} têm sinais contrários e $[AB]$ e $[Ad]$ são “opostos” relativamente ao ponto comum A . O mesmo se verifica para o caso de $[AD]$ e $[Ab]$.

Rivara teve o cuidado de escolher uma substituição ($z + z' = 2c$) de forma a tornar as

expressões z , z' , z'' e z''' muito mais simples e fáceis de interpretar.

2.4.2. Caso do ponto pertencente à circunferência

Em seguida, Rivara resolve o caso em que o ponto A está na circunferência (ou seja, o caso de $a = 0$), tal que A e E coincidem.

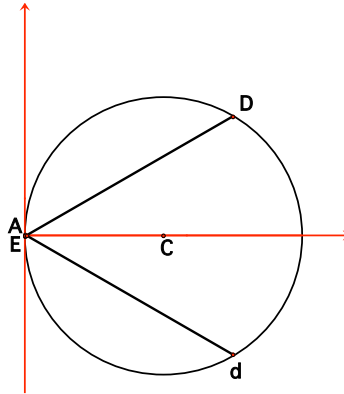


fig. 2.13

Substituindo a por 0 nas quatro expressões de z obtidas em [2.1] vem:

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{-r(r-0) + \sqrt{r^4 + m^2 \times 0 \times (2r-0)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} = 0 = \overline{AB} \\
 z' &= \frac{r(r-0) + \sqrt{r^4 + m^2 \times 0 \times (2r-0)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} = \frac{2r^2}{\sqrt{r^2 + m^2}} = 2c = \overline{AD} \\
 z'' &= \frac{-r(r-0) - \sqrt{r^4 + m^2 \times 0 \times (2r-0)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} = \frac{-2r^2}{\sqrt{r^2 + m^2}} = -2c = \overline{Ad} \\
 z''' &= \frac{r(r-0) - \sqrt{r^4 + m^2 \times 0 \times (2r-0)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} = 0 = \overline{Ab}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

E nas quatro expressões de z simplificadas obtidas em [2.7], vem

$$\begin{aligned}
 z &= c - \sqrt{c^2 - 0} = 0 = \overline{AB}, \\
 z' &= c + \sqrt{c^2 - 0} = 2c = \overline{AD}, \\
 z'' &= -c - \sqrt{c^2 - 0} = -2c = \overline{Ad}, \\
 z''' &= -c + \sqrt{c^2 - 0} = 0 = \overline{Ab}.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Segundo palavras de Rivara, $z = 0$ mostra que « a e z tem a mesma origem» (1815, p. 4)., ou seja, que E coincide com B e $z' = 2c$ mostra a Proposição I do Livro quarto dos *Elementos de Euclides*³³(1815, p. 4), ou seja, que existe um segmento inscrito na circunferência com um determinado comprimento não superior ao diâmetro, $2r$.

$2c$ não é maior do que o diâmetro do círculo porque se considerarmos as fórmulas de z' em [2.8] e em [2.9] vem que $\overline{AD} = 2c = \frac{2r^2}{\sqrt{r^2 + m^2}}$.

2.4.3. Caso do ponto pertencente ao exterior da circunferência

2.4.3.1. Resolução considerando a lei da continuidade

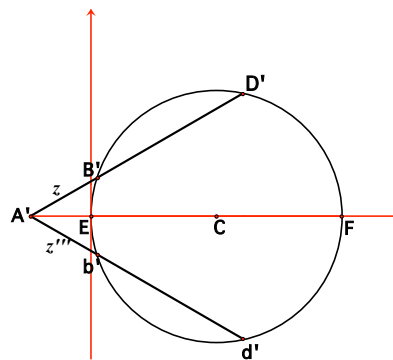


fig. 2.14

Diz Rivara relativamente ao caso anterior: «por quanto acabamos de ver, que $a = 0$, dá $z = 0$ e $z''' = 0$; he manifesto, que estas duas raízes mudarão de sinal, se for a negativo» (1815, p. 4).

De facto, para a “positivo”, tínhamos as expressões em [2.9],

$$z = c - \sqrt{c^2 - ab} = \overline{AB},$$

$$z' = c + \sqrt{c^2 - ab} = \overline{AD},$$

$$z'' = -c - \sqrt{c^2 - ab} = \overline{Ad},$$

$$z''' = -c + \sqrt{c^2 - ab} = \overline{Ab},$$

³³ Na proposição I do quarto livro dos *Elementos* de Euclides pode ler-se que «em hum circulo dado inscrever uma linha recta igual à outra dada, e não maior que o diametro do circulo dado» (Euclides, 1768, p. 130).

z e z' positivas e z'' e z''' negativas.

Sendo a “negativo” (ou seja, $\overline{A'E}$ negativo), substituindo nestas expressões a por $-a$ (Rivara usa apenas constantes positivas nas expressões) fica

$$\begin{aligned} z &= c - \sqrt{c^2 + ab}, \\ z' &= c + \sqrt{c^2 + ab}, \\ z'' &= -c - \sqrt{c^2 + ab}, \\ z''' &= -c + \sqrt{c^2 + ab}, \end{aligned}$$

e, de facto, z e z''' mudam de sinal como diz Rivara. Para a “positivo”, $c > \sqrt{c^2 - ab}$ e $z = c - \sqrt{c^2 - ab} = \overline{AB}$ é positivo e para a “negativo”, $c < \sqrt{c^2 + ab}$ e $z = c - \sqrt{c^2 + ab}$ é negativo.

Como consequência desta mudança de sinal, Rivara apresenta (1815, p.4) as expressões

$$\begin{aligned} -z &= \frac{-r(r+a) + \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \\ z' &= \frac{r(r+a) + \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \\ z'' &= \frac{-r(r+a) - \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \\ -z''' &= \frac{r(r+a) - \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \end{aligned}$$

das quais deduz

$$\begin{aligned} \overline{A'B'} &= \frac{r(r+a) - \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \\ \overline{A'D'} &= \frac{r(r+a) + \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad [2.10] \\ \overline{A'd'} &= \frac{-r(r+a) - \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \text{ e} \\ \overline{A'b'} &= \frac{-r(r+a) + \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}. \end{aligned}$$

As expressões de [2.10] resultam da mudança do sinal de a , z e z''' nas expressões de z , z' , z'' e z''' para o caso de A se encontrar no interior da circunferência determinadas em [2.1].

Rivara ter-se-á baseado, para tal mudança, na teoria de Carnot.

Esta conjectura é-me sugerida pelo facto de Rivara usar, na resolução do problema, o termo “primitivo” para se referir a uma quantidade de um sistema primitivo, conceito base da teoria de Carnot (1815, p. 10).

Consideremos, tal como Carnot, dois sistemas correlacionados:

O sistema primitivo

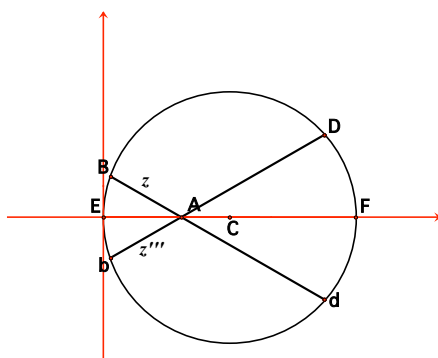


fig. 2.15

Fórmulas do Sistema Primitivo

Como $2c = \overline{AB} + \overline{AD}$ e
 $-2c = \overline{Ad} + \overline{Ab}$, vem que

$$z = \overline{AB} = 2c - \overline{AD} \text{ e}$$

$$z''' = \overline{Ab} = -\overline{Ad} - 2c.$$

O sistema transformado

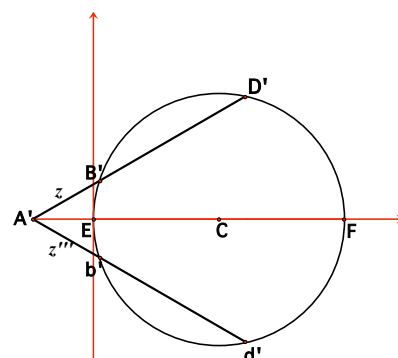


fig. 2.16

Fórmulas do Sistema Transformado

Como $2c = \overline{A'D'} - \overline{A'B'}$ e
 $-2c = \overline{A'd'} - \overline{A'b'}$, vem que

$$z = \overline{A'B'} = \overline{A'D'} - 2c \text{ e}$$

$$z''' = \overline{A'b'} = 2c + \overline{A'd'}.$$

z e z''' do sistema transformado são “simétricos” relativamente a z e z''' do sistema primitivo, ou seja, são, como diz Carnot, quantidades inversas.

Então, diz Carnot que se deve trocar o sinal das quantidades inversas, tal como faz Rivara relativamente a a , z e z''' :

«Puisque pour rendre les formules d'un système primitif, immédiatement applicables

à un système indirectement corrélatif, où il n'entreroit qu'une quantité inverse, il seroit nécessaire d'en changer le signe; il suit que réciproquement, si prenant pour inconnue dans ces formules, cette quantité devenue inverse, on en tire la valeur; ce qu'on obtiendra en résolvant l'équation ne sera pas la valeur même cherchée; mais cette même valeur affectée du signe négatif: car n'ayant pas changé le signe de cette quantité dans les formules primitives, il faut absolument le changer dans le résultat, pour qu'il soit exact; c'est-à-dire, applicable au système transformé» (Carnot, 1803, pp. 30-31).³⁴

De facto, se analisarmos à luz da actualidade, sendo $z = c - \sqrt{c^2 - ab} = \overline{AB}$ (positiva) para obter $\overline{A'B'}$ substitui-se a por $-a$ (como se pode ver pelas expressões [2.8] e [2.9] que se seguem).

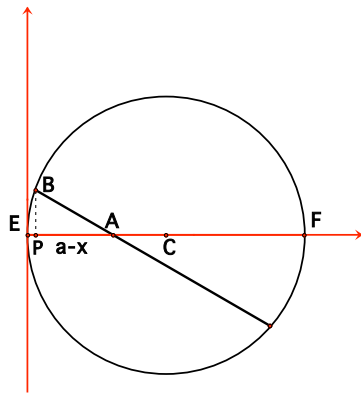


fig. 2.17

Fórmula actual para obter \overline{AB}

$$z^2 = (a - x)^2 + \frac{m^2}{r^2} (a - x)^2 \quad [2.8]$$

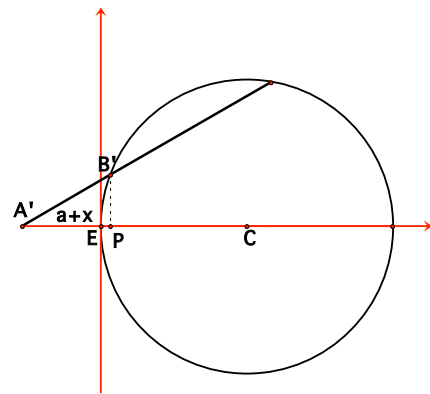


fig. 2.18

Fórmula actual para obter $\overline{A'B'}$

$$z^2 = (a + x)^2 + \frac{m^2}{r^2} (a + x)^2 \quad [2.9]$$

Então ao substituir-se a por $-a$ em $z = c - \sqrt{c^2 - ab} = \overline{AB}$ obtém-se $z = c - \sqrt{c^2 + ab}$ (negativa).

³⁴ «Dado que para tornar as fórmulas de um sistema primitivo, imediatamente aplicáveis a um sistema indirectamente correlativo, onde entraria apenas uma quantidade inversa, seria necessário mudar o seu sinal; segue-se que reciprocamente, se tomando para incógnita nestas fórmulas, esta quantidade que se torna oposta, tira-se o valor; aquele que se obterá resolvendo a equação não será o mesmo valor procurado; mas este mesmo valor afectado do sinal negativo: porque não alterando o sinal desta quantidade nas fórmulas primitivas, é absolutamente necessário alterá-lo no resultado, para que seja exacto; isto é, aplicável ao sistema transformado»

No caso do ponto estar no interior da circunferência, z e z'' correspondem a segmentos “opostos” relativamente ao ponto A , logo deveriam (de acordo com a definição de quantidades geométricas negativas) ter sinais contrários. Têm, como já foi visto. No caso do ponto estar no exterior da circunferência, z e z'' são segmentos que estão do mesmo “lado” do ponto A' , na recta $A'B'$, logo deveriam ter sinais iguais. Então, para obter $\overline{A'B'}$ positivo deve trocar-se o sinal de $z = c - \sqrt{c^2 + ab}$ para que z e z'' tenham o mesmo sinal (positivo) e fica $z = -c + \sqrt{c^2 + ab} = \overline{A'B'}$. O mesmo raciocínio se aplicaria para $\overline{A'b'}$.

Uma vez mais, para simplificar as expressões de z , z' , z'' e z''' , Rivara escreve as quatro em função de c , referindo que procede de modo similar ao anteriormente descrito relativamente ao caso do ponto no interior da circunferência, mas agora com $2r + a = b$ e

$$2c = \overline{A'D'} - \overline{A'B'} = 2\sqrt{\frac{r^4 - m^2a(2r + a)}{r^2 + m^2}}.$$

De facto, feitas as substituições do mesmo modo, com

$$\sqrt{r^4 - m^2a(2r + a)} = \frac{cr(r + a)}{\sqrt{c^2 + ab}} \text{ e } \sqrt{r^2 + m^2} = \frac{r(r + a)}{\sqrt{c^2 + ab}}, \text{ fica (Rivara, 1815, p. 5)}$$

$$z = -c + \sqrt{c^2 + ab} = \overline{A'B'},$$

$$z' = c + \sqrt{c^2 + ab} = \overline{A'D'},$$

$$z'' = -c - \sqrt{c^2 + ab} = \overline{A'd'},$$

$$z''' = c - \sqrt{c^2 + ab} = \overline{A'b'} \text{ (ver fig. 2.16).}$$

Estas quatro expressões foram determinadas, segundo Rivara, de acordo com a Lei da Continuidade (1815, p. 5). Como vimos antes, z e z''' mudam de sinal quando A de “desloca” para o exterior da circunferência e quando A pertence à circunferência, z e z''' são nulas, logo as duas quantidades mudam de sinal quando “passam” por zero.

2.4.3.2. Resolução sem considerar a Lei da Continuidade

Para confirmar os resultados obtidos considerando a lei da continuidade, Rivara faz o mesmo raciocínio que havia feito para o caso de A se encontrar no interior da circunferência sem, no entanto, apresentar todos passos com o mesmo pormenor.

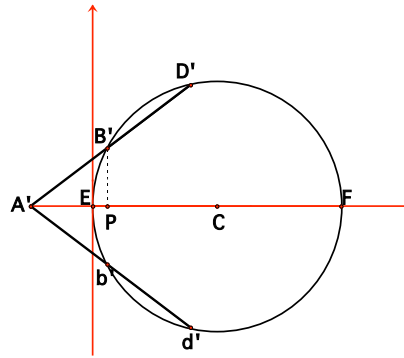


fig. 2.19

«A equação $y = \frac{m}{r}(a+x)$ determina a posição da recta $A'B'$, e a sua grandeza he conhecida pela equação $z^2 = (a+x)^2 + y^2$, das quais se tira $x = \frac{rz}{\sqrt{r^2+m^2}} - a$ e $x' = -\frac{rz}{\sqrt{r^2+m^2}} - a$; valores, que substituídos, e o de $y^2 = \frac{m^2 z^2}{r^2+m^2}$, na equação do circulo $y^2 = 2rx - x^2$ dão as equações $z^2 - \frac{2r(r+a)}{\sqrt{r^2+m^2}}z = -a(2r+a)$, $z^2 + \frac{2r(r+a)}{\sqrt{r^2+m^2}}z = -a(2r+a)$ e por conseguinte as raizes $z = \frac{r(r+a) \pm \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2+m^2}}$ e $z = \frac{-r(r+a) \pm \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2+m^2}}$ »
(Rivara, 1815, pp.5-6).

Com base na fig. 2.19, tira-se que $\frac{\tan \widehat{EA'B'}}{r} = \frac{y}{a+x}$, donde se deduz a equação da

recta secante $A'D'$,
$$y = \frac{m}{r}(a+x). \quad [2.10]$$

Sendo o comprimento do segmento $[A'B']$ determinado pela equação $z^2 = (a+x)^2 + y^2$, como refere Rivara, substitui-se y pelo valor encontrado em [2.10] e determinam-se

$$x = \frac{rz}{\sqrt{r^2+m^2}} - a \text{ e } x' = -\frac{rz}{\sqrt{r^2+m^2}} - a \quad [2.11]$$

valores que usados em [2.10] dão
$$y^2 = \frac{m^2 z^2}{r^2+m^2}. \quad [2.12]$$

Usando as equações [2.11] e [2.12] na equação da circunferência $y^2 = 2rx - x^2$, Rivara determina as raizes

$$z = \frac{r(r+a) \pm \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

e

$$z' = \frac{-r(r+a) \pm \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}},$$

que são, tal como este afirma, exactamente iguais às determinadas, considerando a Lei da Continuidade, as duas primeiras correspondentes a $\overline{A'B'}$ e $\overline{A'D'}$ e as outras duas a $\overline{A'b'}$ e $\overline{A'd'}$.

2.5. Translação do eixo das ordenadas

Depois de resolvido o problema, Rivara determina as raízes z , z' , z'' e z''' considerando como origem do referencial cartesiano não o ponto E , mas o centro da circunferência, C . O autor tê-lo-á feito para mostrar que a regra usada na resolução do problema analisado, considerando a lei da continuidade, nem sempre se aplicam, o que é revelador da preocupação de Rivara em expor com o rigor o seu trabalho.

Rivara começa por denominar \overline{CA} e \overline{CP} , respectivamente, por α e u , pelo que se depreende que o autor, além de considerar como origem das coordenadas o ponto C , muda o sentido do eixo das abcissas.

2.5.1 Caso do ponto pertencente ao interior da circunferência

Caso A esteja no interior da circunferência, $a = r - \alpha$.

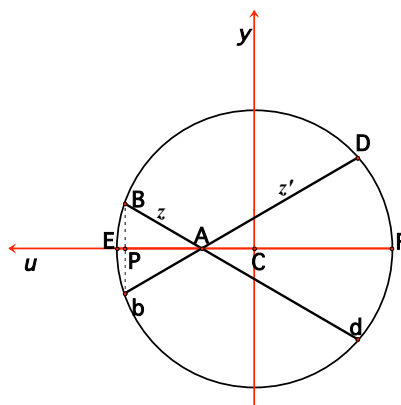


fig. 2.20

Substituindo a por $r - \alpha$ nas raízes encontradas por Rivara em [2.1] que são

$$z = \overline{AB} = \frac{-r(r-a) + \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}},$$

$$z' = \overline{AD} = \frac{r(r-a) + \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}},$$

$$z'' = \overline{Ad} = \frac{-r(r-a) - \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \text{ e}$$

$$z = \overline{Ab} = \frac{r(r-a) - \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \text{ obtém-se}$$

$$z = \overline{AB} = \frac{-\alpha r + \sqrt{r^4 + m^2 (r^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad [2.13]$$

$$z' = \overline{AD} = \frac{\alpha r + \sqrt{r^4 + m^2 (r^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad [2.14]$$

$$z'' = \overline{Ad} = \frac{-\alpha r - \sqrt{r^4 + m^2 (r^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \text{ e} \quad [2.15]$$

$$z''' = \overline{Ab} = \frac{\alpha r - \sqrt{r^4 + m^2 (r^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}. \quad [2.16]$$

Rivara apenas apresenta [2.13] e [2.15] que afirma serem valores de Lacroix (Rivara, 1815, p. 6).

Lacroix, no seu *Traité Élémentaire* na secção referente à aplicação da álgebra à geometria, apresenta um problema análogo ao de Rivara. Inicialmente, Lacroix pretendia encontrar as coordenadas dos pontos de intersecção de uma recta com uma circunferência mas, para chegar a resultados mais simples, considera como incógnita, a distância dum ponto a um dos pontos de intersecção da recta com a circunferência, tal como Rivara. No problema, Lacroix considera inicialmente uma recta que passa num ponto qualquer de coordenadas $(\alpha; \beta)$ e depois, um caso particular, em que o ponto pertence ao eixo das abcissas, tal como no problema de Rivara. Lacroix considera $(\alpha; 0)$ as coordenadas do ponto e a a tangente do ângulo que a recta forma com o eixo das abcissas medido numa circunferência de raio um e

obtem as raizes $z = \frac{-\alpha + \sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}}$ e $z'' = \frac{-\alpha - \sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}}$ (Lacroix,

1807, pp. 146-150). Estas raizes s3o, realmente, iguais 3s que obtem Rivara em [2.13] e [2.15], pois a tangente (m), em Rivara, 3e medida numa circunfer4ncia de raio r e a tangente (a), em Lacroix, 3e medida numa circunfer4ncia de raio 1 (Lacroix, 1807, pp. 122 e 137), ou seja, $\frac{m}{r} = a$.

Fazendo a substitui4o de m por ar em [2.13] vem

$$\begin{aligned} z = \overline{AB} &= \frac{-\alpha r + \sqrt{r^4 + m^2(r^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} = \\ &= \frac{-\alpha r + \sqrt{r^4 + a^2 r^2(r^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{r^2 + a^2 r^2}} = \\ &= \frac{-\alpha r + r\sqrt{r^2 + a^2(r^2 - \alpha^2)}}{r\sqrt{1+a^2}} = \\ &= \frac{-\alpha + \sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}}. \end{aligned}$$

O mesmo racioc4nio aplica-se a [2.16] para obter $z'' = \frac{-\alpha - \sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}}$.

2.5.2. Caso do ponto pertencente ao exterior da circunfer4ncia

Caso A esteja no exterior da circunfer4ncia, $a = \alpha - r$ (a 3e "negativo").

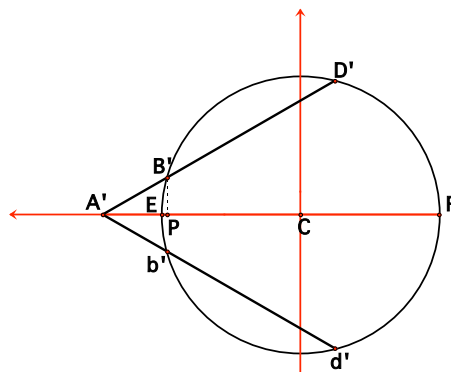


fig. 2.21

Rivara refere que neste caso não basta em [2.13] e [2.14] supor $\alpha > r$

«para termos os de $A'B'$ e $A'D'$, porque substituindo $\alpha - r$ em vez de a nas

raízes [2.7] teremos $z = \frac{\alpha r - \sqrt{r^4 - m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} = A'B'$,

$z' = \frac{\alpha r + \sqrt{r^4 - m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} = A'D'$; diferentes das que resultão da suposição

de $\alpha > r$ nas primeiras» (Rivara, 1815, pp. 6-7).

De facto, usando [2.13], [2.14], [2.15] e [2.16], ou seja,

$$z = \overline{AB} = \frac{-\alpha r + \sqrt{r^4 + m^2(r^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}},$$

$$z' = \overline{AD} = \frac{\alpha r + \sqrt{r^4 + m^2(r^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

$$z'' = \overline{Ad} = \frac{-\alpha r - \sqrt{r^4 + m^2(r^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

$$z''' = \overline{Ab} = \frac{\alpha r - \sqrt{r^4 + m^2(r^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}},$$

supondo $\alpha > r$, ou seja, a “negativo”, z e z''' mudam de sinal, como foi visto anteriormente,

e fica

$$-z = \frac{-\alpha r + \sqrt{r^4 + m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \Rightarrow \overline{A'B'} = \frac{\alpha r - \sqrt{r^4 + m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

$$z' = \overline{A'D'} = \frac{\alpha r + \sqrt{r^4 + m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [2.17]$$

$$z'' = \overline{A'd'} = \frac{-\alpha r - \sqrt{r^4 + m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

$$-z''' = \frac{\alpha r - \sqrt{r^4 + m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \Rightarrow \overline{A'b'} = \frac{-\alpha r + \sqrt{r^4 + m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

Mas, usando as expressões de z , z' , z'' e z''' determinadas em [2.7], que são

$$\overline{A'B'} = \frac{r(r+a) - \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}},$$

$$\overline{A'D'} = \frac{r(r+a) + \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}},$$

$$\overline{A'd'} = \frac{-r(r+a) - \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \text{ e}$$

$$\overline{A'b'} = \frac{-r(r+a) + \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}},$$

e substituindo a por $\alpha - r$, obtém-se

$$z = \overline{A'B'} = \frac{\alpha r - \sqrt{r^4 - m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

$$z' = \overline{A'D'} = \frac{\alpha r + \sqrt{r^4 - m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [2.18]$$

$$z'' = \overline{A'd'} = \frac{-\alpha r - \sqrt{r^4 - m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

$$z''' = \overline{A'b'} = \frac{-\alpha r + \sqrt{r^4 - m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

que são diferentes das encontradas em [2.17], tal como afirma Rivara.

Para confirmar os resultados encontrados em [2.18], Rivara determina z , z' , z'' e z''' usando as equações

$$u - \alpha = \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [2.19]$$

e

$$y = \frac{m}{r}(u - \alpha) \quad [2.20]$$

que o autor diz serem as usadas por Lacroix (Rivara, 1815, p.7) no seu *Traité Élémentaire*.

Lacroix, no seu *Traité*, na resolução do problema já referido anteriormente faz uso das equações (Lacroix, 1807, p.147)

$$x - \alpha = \frac{z}{\sqrt{1+a^2}} \quad [2.21]$$

e

$$y - \beta = \frac{az}{\sqrt{1+a^2}} \quad [2.22]$$

que efectivamente correspondem às de [2.19] e [2.20], com $a = \frac{m}{r}$ e $\beta = 0$ (a ordenada do ponto A).

De facto, substituindo a por $\frac{m}{r}$ em [2.21], vem

$$x - \alpha = \frac{z}{\sqrt{1 + \left(\frac{m}{r}\right)^2}} \Leftrightarrow x - \alpha = \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [2.23],$$

igual à de [2.19].

Substituindo a por $\frac{m}{r}$ e β por 0 em [2.22], vem

$$y = \frac{\frac{m}{r}z}{\sqrt{1 + \left(\frac{m}{r}\right)^2}} \Leftrightarrow y = \frac{mz}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [2.24].$$

De [2.23] vem que $\frac{z}{\sqrt{r^2 + m^2}} = \frac{x - \alpha}{r}$ [2.25].

Substituindo $\frac{z}{\sqrt{r^2 + m^2}}$ na expressão de [2.24] pelo valor encontrado em [2.25] fica

$$y = \frac{m}{r}(x - \alpha), \text{ igual à expressão de [2.20].}$$

As equações de [2.19] e de [2.20] poderiam ser deduzidas da mesma forma que Rivara deduziu as equações $y = \frac{m}{r}(a - x)$ e $a - x = \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}$, para o problema inicial (sendo E ser a origem do referencial).

Rivara refere que:

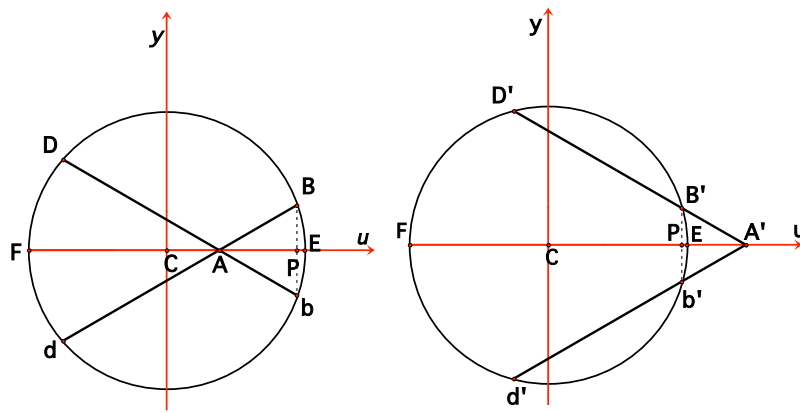
«sendo $\alpha > r$, ou existindo o ponto fóra do círculo, na passagem de A por E , onde temos $u - \alpha = \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} = \frac{r \cdot 0}{\sqrt{r^2 + m^2}}$, tornando-se negativo $\frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}$, e considerando o z negativo, se restitue positivo, então as sobreditas equações só nos

podem dar as raízes negativas $z''' = \frac{-\alpha r + \sqrt{r^4 - m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} = A'b'$,

$$z'' = \frac{-\alpha r - \sqrt{r^4 - m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} = A'd' \text{ » (Rivara, 1815, p. 7).}$$

De facto, quando A está no exterior da circunferência, $u - \alpha = \overline{CP} - \overline{CA'}$ é negativo

e $u - \alpha = \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}$ é negativo quando z é negativo.



$$\overline{CP} = u \text{ e } \overline{CA'} = \alpha$$

fig. 2.22

Logo, as duas equações [2.19] e [2.20] dão as soluções (negativas) correspondentes à recta $A'd'$,

$$z'' = \overline{A'd'} = \frac{-\alpha r - \sqrt{r^4 - m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

$$z''' = \overline{A'b'} = \frac{-\alpha r + \sqrt{r^4 - m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

que são iguais às de [2.18] e não às de [2.17].

Rivara demonstra assim que a mudança de sinais em \overline{AB} , \overline{AD} , \overline{Ad} e \overline{Ab} para obter $\overline{A'B'}$, $\overline{A'D'}$, $\overline{A'd'}$ e $\overline{A'b'}$, usada no caso da origem do referencial ser o ponto E , nem sempre é aplicável, como neste caso que acabamos de analisar (cuja origem o referencial cartesiano é o centro da circunferência, C).

Rivara com a mudança de eixos terá procurado mostrar que, independentemente dessa mudança, z e z' , que estão acima do eixo das abcissas, são positivas e z'' e z''' , que estão abaixo do eixo das abcissas, são negativas.

É de sublinhar que z as expressões de z' e z'' são iguais tanto no caso de A estar no interior da circunferência como no caso de estar no seu exterior, como se pode verificar ao compararmos as expressões [2.14] e [2.15] com as de [2.18].

2.6. Construção geométrica das soluções

Depois da resolução analítica do problema, Rivara, para confirmar a sua interpretação das soluções encontradas (algebricamente), constrói geometricamente as raízes z , z' , z'' e z''' ,

$$z = c - \sqrt{c^2 - ab} = \overline{AB},$$

$$z' = c + \sqrt{c^2 - ab} = \overline{AD},$$

$$z'' = -c - \sqrt{c^2 - ab} = \overline{Ad},$$

$$z''' = -c + \sqrt{c^2 - ab} = \overline{Ab}.$$

Na época, a geometria ainda era usada como forma de validar os resultados algébricos.

Para as construir segue uma série de passos dos quais resulta a figura seguinte.

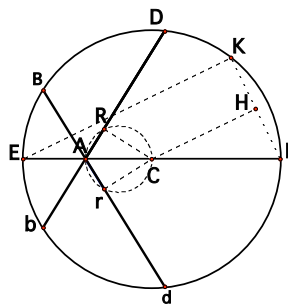


fig. 2.23

Pelo ponto A e pelo centro da circunferência traçamos o diâmetro $[EF]$. Em seguida inscrevemos, na circunferência, o segmento de recta $[EK]$ tal que $\overline{EK} = 2c = \overline{bD}$. Desenhemos $[FK]$ e obtemos o triângulo rectângulo $[EKF]$ (inscrito numa

semicircunferência).

Em seguida, traçamos $[CH]$ paralelo a $[EK]$ e obtemos dois triângulos rectângulos semelhantes, $[CFH]$ e $[EFK]$.

Desenhamos a circunferência $CRAr$, com $[AC]$ como diâmetro e $[CR]$ e $[Cr]$ geometricamente iguais a $[HK]$.

Por fim, construímos as rectas Ar e AR .

E diz Rivara que «*deste modo ficarão determinadas as posições das rectas Db e Bd iguaes cada uma a $2c$* » (1815, p. 7).

O autor justifica-o dizendo:

«tirando-se CD , o triangulo rectangulo CRD dá $RD^2 = CD^2 - CR^2$, mas he $CR^2 = HK^2 = \frac{1}{4}FK = r^2 - c^2$, logo $RD^2 = r^2 - r^2 + c^2$, isto he, $RD = \pm c$; e o triangulo rectângulo ACR dá tambem $AR^2 = AC^2 - CR^2$; isto he, $AR^2 = (r - a)^2 + c^2 - r^2 = c^2 - ab$, ou $AR = \pm\sqrt{c^2 - ab}$ »³⁵ (1815, pp. 7-8).

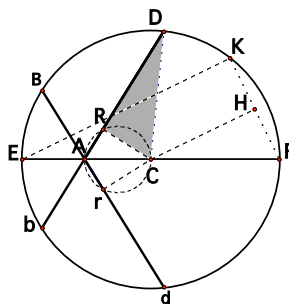


fig. 2.24

Vejamos com maior pormenor como Rivara deduz esta justificação.

$[ACR]$ é um triângulo rectângulo³⁶ e $[DCR]$ também, donde vem que

$$\overline{RD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{CR}^2 \quad [2.26].$$

³⁵ Onde está $\frac{1}{4}FK$ deveria estar $\frac{1}{4}FK^2$.

³⁶ porque $\sphericalangle ARC$ está inscrito numa semicircunferência.

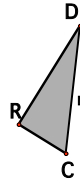


fig. 2.25

Por outro lado, $\overline{CR}^2 = r^2 - c^2$, pois

$$\overline{CR}^2 = \overline{HK}^2 = \left(\frac{1}{2}\overline{FK}\right)^2 = \frac{(2r)^2 - (2c)^2}{4} = r^2 - c^2 \quad [2.27].$$

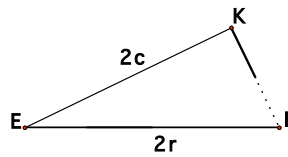


fig. 2.26

Então, substituindo \overline{CR}^2 em [2.26] pelo valor encontrado em [2.27] fica $\overline{RD}^2 = r^2 - (r^2 - c^2) \Leftrightarrow \overline{RD}^2 = c^2$.

Logo, $\overline{RD} = \pm c$, metade de \overline{bD} . Então, de acordo com a interpretação de Rivara, $\overline{DR} = c$, acima do eixo das abcissas e $\overline{dr} = -c$, abaixo do eixo das abcissas.

Em relação ao triângulo rectângulo $[ACR]$, também vem que $\overline{AR}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CR}^2$ [2.28].

Substituindo em [2.28] \overline{AC} por $r - a$ e \overline{CR}^2 pelo valor encontrado em [2.27] resulta

$$\begin{aligned} \overline{AR}^2 &= (r - a)^2 - (r^2 - c^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{AR}^2 &= r^2 - 2ar + a^2 - r^2 + c^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{AR}^2 &= c^2 - a(2r - a) \end{aligned}$$

Como $b = 2r - a$, fica $\overline{AR}^2 = c^2 - ab$.

Então, $\overline{AR} = \sqrt{c^2 - ab}$, acima do eixo das abcissas e $\overline{Ar} = -\sqrt{c^2 - ab}$, abaixo do eixo das abcissas.

Logo,

$$\overline{AB} = -(\overline{rd} - \overline{Ar}) = c - \sqrt{c^2 - ab}$$

$$\overline{AD} = \overline{AR} + \overline{RD} = c + \sqrt{c^2 - ab}$$

$$\overline{Ad} = \overline{Ar} + \overline{rd} = -c - \sqrt{c^2 - ab}$$

$$\overline{Ab} = -(\overline{RD} - \overline{AR}) = -c + \sqrt{c^2 - ab}.$$

Ficam assim construídas as raízes z , z' , z'' e z''' .

2.7. Máximo e mínimo

Depois de construir geometricamente as raízes do problema, Rivara mostra quais os valores máximo e mínimo de \overline{Bd} (ou \overline{bD}).

Diz o autor:

«He fácil de ver pela construção antecedente, que se o ponto K ajustasse em F , teríamos $\overline{CR} = \sqrt{r^2 - c^2} = 0$, e a tangente $m = \frac{r\sqrt{r^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - ab}} = 0$, que nos daria $c = \pm r$ » (1815, p. 8).

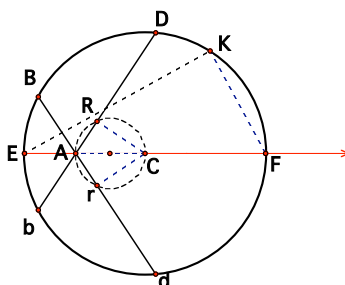


fig. 2.27

Como foi visto na construção das raízes, $\overline{CR} = \sqrt{r^2 - c^2}$.

Então, ao coincidirem K e F , $c = \pm r$ porque $\overline{KF} = 0 = 2\overline{CR}$ e $\overline{CR} = \sqrt{r^2 - c^2} = 0$.

Além disso, a expressão de m , que resulta de $\frac{m}{r} = \frac{\overline{CR}}{\overline{AR}}$, dá $m = 0$.

De facto, ao aproximar-se K de F , o ponto R aproxima-se de C (\overline{CR} é metade de \overline{KF}) e as inclinações das rectas Bd e bD aproximam-se da inclinação do diâmetro e por conseguinte o valor da tangente aproxima-se de zero.

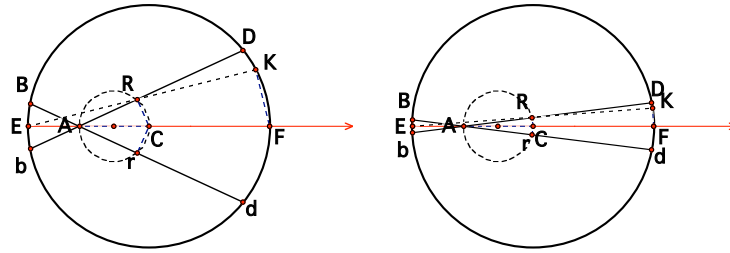


fig. 2.28

E diz Rivara, sobre a expressão $\sqrt{r^2 - c^2}$, que «*porque se conhece a impossibilidade de $c > r$, então seria $2c$ a máxima*» (1815, p.8).

Segundo parece, Rivara, nesta afirmação, querer dizer que a expressão $\sqrt{r^2 - c^2}$ é impossível (imaginária) para $c > r$ e como já vimos que, no caso de $m = 0$, $c = \pm r$, $2c = 2r$ é o valor máximo para \overline{Bd} (e \overline{bD}). Isto é, o comprimento máximo de $[Bd]$ (e $[bD]$) é $2r$, valor máximo de $2c$.

Por outro lado, diz Rivara que «*ajustando-se R a A , teríamos $AR = \sqrt{c^2 - ab} = 0$, isto he, $c^2 = ab$, ou $a : c :: c : b$; e $m = \frac{r\sqrt{r^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - ab}} = \infty$ »³⁷ (1815, p.8).*

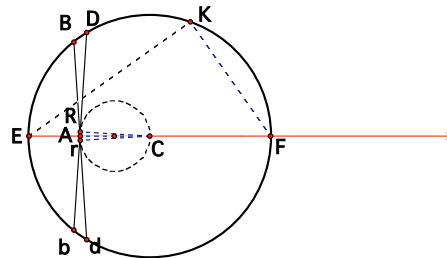


fig. 2.29

De facto, à medida que R se aproxima de A , $\overline{AR} = \sqrt{c^2 - ab}$ aproxima-se de zero e quando $\overline{AR} = \sqrt{c^2 - ab} = 0$, $c^2 = ab \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ e $m = \frac{r\sqrt{r^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - ab}} = \frac{r\sqrt{r^2 - c^2}}{0} = \infty$.

³⁷ $a : b :: c : d$ representa a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Segundo Cajori, na segunda metade do sec. XVIII, esta notação $A : B :: C : D$ usada para representar a igualdade das duas razões $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$, era comum em praticamente toda a Europa Continental (Cajori, 1993, p. 295).

Então, no caso de R coincidir com A , as rectas Bd e bD são perpendiculares ao diâmetro, donde, como diz Rivara, se infere a proposição XIII do Livro sexto dos *Elementos de Euclides*³⁸ (1815, p. 8) pois c (metade de \overline{bD}) é a média proporcional entre a e b (partes de \overline{EF}).

Do mesmo modo que no caso anterior, Rivara diz, ao analisar a expressão $\sqrt{c^2 - ab}$ «que não he possível $c < \sqrt{ab}$, e consequentemente viria a ser $2c$ a mínima» (Rivara, 1815, pp. 8 e 9).

Isto significa que como $c \geq \sqrt{ab}$ (para a expressão $\sqrt{c^2 - ab}$ não ser imaginária) e $c = \pm\sqrt{ab}$, no caso de $m = \infty$, $2c = 2\sqrt{ab}$ é o valor mínimo para o comprimento de $[Bd]$ (e de $[bD]$).

Em resumo, Rivara demonstra que, estando o ponto A no interior da circunferência, caso Bd (ou bD) tenha inclinação nula, $[Bd]$ é o diâmetro $[EF]$, pelo que $2r$ seria o comprimento máximo de $[Bd]$. No caso de Bd (ou bD) ter como inclinação 90° , $[Bd]$ é perpendicular ao diâmetro e terá o comprimento mínimo, que é $2\sqrt{ab}$.

Em seguida, Rivara mostra que estes máximo e mínimo podem também ser determinados recorrendo ao cálculo diferencial. No entanto, muitos dos passos para a dedução das fórmulas não são apresentados.

Rivara refere apenas que

«se da expressão geral $c = \sqrt{\frac{r^4 \pm m^2 ab}{r^2 + m^2}}$, significando ϕ o angulo EAB , deduzirmos a seguinte $c = \frac{\text{sen}\phi}{r} \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}$, a propriedade sabida do maximo, ou do minimo nos dará a equação $\cos^3 \phi - r^2 \cos \phi = 0$, donde resulta $\cos.\phi = r$, $\cos.\phi = -r$, e $\cos.\phi = 0$, isto he, $\phi = 0^\circ$, $\phi = 180^\circ$, e $\phi = 90^\circ$ » (1815, pp. 8 e 9)³⁹

Vejamos como tal se poderá obter.

³⁸ Na proposição XIII do Livro sexto dos *Elementos de Euclides* pode ler-se «Dadas duas linhas rectas, achar entre ellas huma media proporcional» (Euclides, 1768, p. 222).

³⁹ \cot é a notação usada para cotangente.

A partir da expressão geral $c = \sqrt{\frac{r^4 \pm m^2 ab}{r^2 + m^2}}$ ⁴⁰, deduz-se a expressão

$c = \frac{\text{sen}\phi}{r} \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}$, sendo ϕ o ângulo $E\hat{A}B$, do seguinte modo:

$$c = \sqrt{\frac{r^4 \pm m^2 ab}{r^2 + m^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{m^2}{r^2 + m^2} \left(\frac{r^4}{m^2} \pm ab \right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{m}{\sqrt{r^2 + m^2}} \sqrt{r^2 \left(\frac{r}{m} \right)^2 \pm ab} \quad [2.29].$$

Como $\frac{\sqrt{r^2 + m^2}}{m} = \frac{r}{\text{sen}\phi}$ e $\frac{r}{m} = \frac{\text{cos}\phi}{\text{sen}\phi}$,

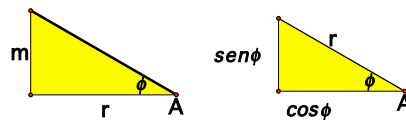


fig. 2.30

substituindo em [2.29], $\sqrt{r^2 + m^2}$ por $\frac{mr}{\text{sen}\phi}$ e $\frac{r}{m}$ por $\frac{\text{cos}\phi}{\text{sen}\phi}$ vem

$$c = \frac{m}{\frac{r \cdot m}{\text{sen}\phi}} \sqrt{r^2 \left(\frac{\text{cos}\phi}{\text{sen}\phi} \right)^2 \pm ab} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{\text{sen}\phi}{r} \sqrt{\left(r \frac{\text{cos}\phi}{\text{sen}\phi} \right)^2 \pm ab} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{\text{sen}\phi}{r} \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}. \quad [2.30]$$

Aplicando a esta expressão [2.30] o cálculo diferencial, isto é, derivando-a em ordem a

⁴⁰ $c = \sqrt{\frac{r^4 + m^2 ab}{r^2 + m^2}}$ no caso de A estar no interior da circunferência e $c = \sqrt{\frac{r^4 - m^2 ab}{r^2 + m^2}}$ no caso de A se encontrar no exterior da circunferência.

ϕ , (pois c é função de ϕ) fica

$$\begin{aligned}
c' &= \frac{\cos \phi}{r} \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab} + \frac{\operatorname{sen} \phi (\cot^2 \phi \pm ab)'}{2r \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}} = \\
&= \frac{\cos \phi}{r} \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab} + \frac{\operatorname{sen} \phi (\cot^2 \phi)'}{2r \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}} \stackrel{\cot \phi = r \frac{\cos \phi}{\operatorname{sen} \phi}}{=} \\
&= \frac{\cos \phi}{r} \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab} + \frac{\operatorname{sen} \phi \left(2 \frac{r \cos \phi}{\operatorname{sen} \phi} \left(\frac{r \cos \phi}{\operatorname{sen} \phi} \right)' \right)}{2r \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}} = \\
&= \frac{\cos \phi}{r} \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab} + \frac{\operatorname{sen} \phi \left(2 \frac{r \cos \phi}{\operatorname{sen} \phi} \left(\frac{-r \operatorname{sen}^2 \phi - r \cos^2 \phi}{\operatorname{sen}^2 \phi} \right)' \right)}{2r \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}} \stackrel{\operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi = r^2}{=} \\
&= \frac{\cos \phi}{r} \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab} - \frac{\cos \phi \left(\frac{r^3}{\operatorname{sen}^2 \phi} \right)'}{\sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}} = \\
&= \frac{\cos \phi}{r} \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab} - \frac{r^3 \cos \phi}{\operatorname{sen}^2 \phi \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}} = \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi (\cot^2 \phi \pm ab) - r^4 \cos \phi}{r \operatorname{sen}^2 \phi \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}} \stackrel{\cot \phi = r \frac{\cos \phi}{\operatorname{sen} \phi}}{=} \\
&= \frac{\cos \phi (r^2 \cos^2 \phi \pm ab \cdot \operatorname{sen}^2 \phi) - r^4 \cos \phi}{r \operatorname{sen}^2 \phi \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}} \stackrel{b=2r-a}{=} \\
&= \frac{\cos \phi (r^2 \cos^2 \phi \pm a(2r-a) \cdot \operatorname{sen}^2 \phi) - r^4 \cos \phi}{r \operatorname{sen}^2 \phi \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}} \stackrel{\operatorname{sen}^2 \phi = r^2 - \cos^2 \phi}{=} \\
&= \frac{\cos \phi (r^2 \cos^2 \phi \pm 2ar^3 \mp 2ar \cdot \cos^2 \phi \mp a^2 r^2 \pm a^2 \cos^2 \phi - r^4)}{r \operatorname{sen}^2 \phi \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}} = \\
&= \frac{\cos^3 \phi (r^2 \mp 2ar \pm a^2) - r^2 \cos \phi (r^2 \mp 2ar \pm a^2)}{r \operatorname{sen}^2 \phi \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}}.
\end{aligned}$$

Donde, finalmente

$$c' = \frac{(r^2 \mp ab)(\cos^3 \phi - r^2 \cos \phi)}{r \operatorname{sen}^2 \phi \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}}.$$

Para determinar o máximo e o mínimo de c , $c' = 0$ é condição necessária.

Então,

$$\begin{aligned} c' = 0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(r^2 \mp ab)(\cos^3 \phi - r^2 \cos \phi)}{r \operatorname{sen}^2 \phi \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (r^2 \mp ab)(\cos^3 \phi - r^2 \cos \phi) = 0 \wedge r \operatorname{sen}^2 \phi \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab} \neq 0. \end{aligned}$$

De $(r^2 \mp ab)(\cos^3 \phi - r^2 \cos \phi) = 0$ vem que

$$\begin{aligned} \cos^3 \phi - r^2 \cos \phi &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos \phi (\cos^2 \phi - r^2) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos \phi = 0 \vee \cos \phi = r \vee \cos \phi = -r &\Leftrightarrow_{0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ} \\ \Leftrightarrow \phi = 90^\circ \vee \phi = 0^\circ \vee \phi = 180^\circ. \end{aligned}$$

Substituindo estes valores em [2.30], obtêm-se os valores de c :

- Para $\phi = 0^\circ$,

Substituindo ϕ directamente em [2.30], obtém-se $c = \frac{\operatorname{sen} 0^\circ}{r} \sqrt{\cot^2 0^\circ \pm ab} = 0 \times \infty$.

Então, $c = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{r^2} (\cot^2 \phi \pm ab)} = \sqrt{\cos^2 \phi \pm \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{r^2} ab}$ e substituindo ϕ por 0° fica

$c = r$.

Se $0^\circ < \phi < 90^\circ$, então $c' = \frac{(r^2 \mp ab) \cos \phi (\cos^2 \phi - r^2)}{r \operatorname{sen}^2 \phi \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}} < 0$ porque $(\cos \phi > 0)$.

Logo, em $\phi = 0^\circ$, c tem um valor máximo (r).

- Para $\phi = 180^\circ$

O raciocínio é similar ao caso anterior.

$$c = \sqrt{\frac{\text{sen}^2 \phi}{r^2} (\cot^2 \phi \pm ab)} = \sqrt{\cos^2 \phi \pm \frac{\text{sen}^2 \phi}{r^2} ab} \text{ e substituindo } \phi \text{ por } 180^\circ, \text{ fica}^{41}$$

$$c = \sqrt{\cos^2 180^\circ \pm 0} = \sqrt{(-r)^2 \pm 0} = r.$$

$$\text{Se } 90^\circ < \phi < 180^\circ, \text{ então } c' = \frac{(r^2 \mp ab) \cos \phi (\cos^2 \phi - r^2)}{r \text{sen}^2 \phi \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}} > 0 \text{ (porque } \cos \phi < 0 \text{)}.$$

Logo, em $\phi = 180^\circ$, c tem um valor máximo (r).

- Para $\phi = 90^\circ$,

$$c = \frac{\text{sen} 90^\circ}{r} \sqrt{\cot^2 90^\circ \pm ab} \Leftrightarrow c = \sqrt{\pm ab}.$$

$$\text{Se } \phi < 90^\circ, \text{ então } c' = \frac{(r^2 \mp ab) \cos \phi (\cos^2 \phi - r^2)}{r \text{sen}^2 \phi \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}} < 0 \text{ (porque } \cos \phi > 0 \text{)};$$

$$\text{Se } \phi > 90^\circ, \text{ então } c' = \frac{(r^2 \mp ab) \cos \phi (\cos^2 \phi - r^2)}{r \text{sen}^2 \phi \sqrt{\cot^2 \phi \pm ab}} > 0 \text{ (porque } \cos \phi < 0 \text{)}.$$

Logo, em $\phi = 90^\circ$, c tem um valor mínimo (\sqrt{ab}).

Como a expressão de c determinada em [2.30], $c = \frac{\text{sen} \phi}{r} \sqrt{\cot^2 \phi + ab}$,

corresponde a A pertencente ao interior da circunferência e $c = \frac{\text{sen} \phi}{r} \sqrt{\cot^2 \phi - ab}$ ao caso

de A pertencente ao seu exterior, \sqrt{ab} e $\sqrt{-ab}$ são os valores de c obtidos no caso de A estar no interior e no exterior da circunferência, respectivamente.

Então, sendo $\sqrt{-ab}$ um número imaginário, no caso de A estar no exterior da

⁴¹ Nos seus Principios Mathematicos, Anastácio da Cunha apresenta um corolário onde $\cos 180^\circ \left[= \cos(90^\circ + 90^\circ) = \frac{0 \times 0 - r \times r}{r} \right] = -r$ baseado na proposição VIII que refere que $\cos(\zeta + z) = \frac{\cos(\zeta) \cos z - \text{sen}(\zeta) \text{senz}}{r}$ (Anastácio da Cunha, 1790, p. 208)

circunferência, «ahi unicamente terá lugar o máximo» (Rivara, 1815, p. 9).

Portanto, no caso do ponto A estar no interior da circunferência, para 0° e 180° , c corresponde a r e para 90° , c corresponde a \sqrt{ab} . No caso de A estar no exterior da circunferência, para 0° e 180° , c corresponde a r e para 90° , c corresponde a $\sqrt{-ab}$.

Confirmemos estes resultados graficamente.

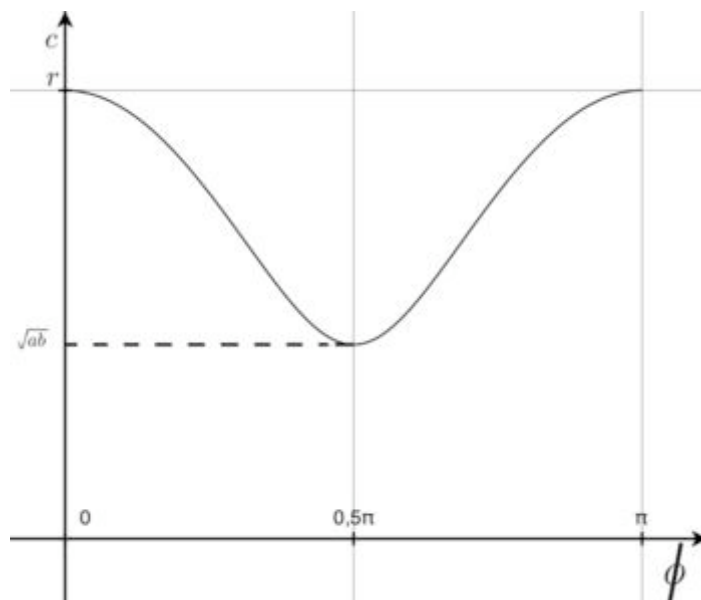


fig. 2.31 – Gráfico de c em função de ϕ quando A está no interior da circunferência.

Ao observar o gráfico da fig. 2.31, podemos confirmar que $[Bd]$ tem o comprimento máximo ($2r$, o diâmetro) no caso de $\phi = 0^\circ$ ou $\phi = 180^\circ$ e o mínimo ($2\sqrt{ab}$) no caso de $\phi = 90^\circ$, ou seja, no caso de $[Bd]$ ser um segmento perpendicular ao diâmetro $[EF]$.

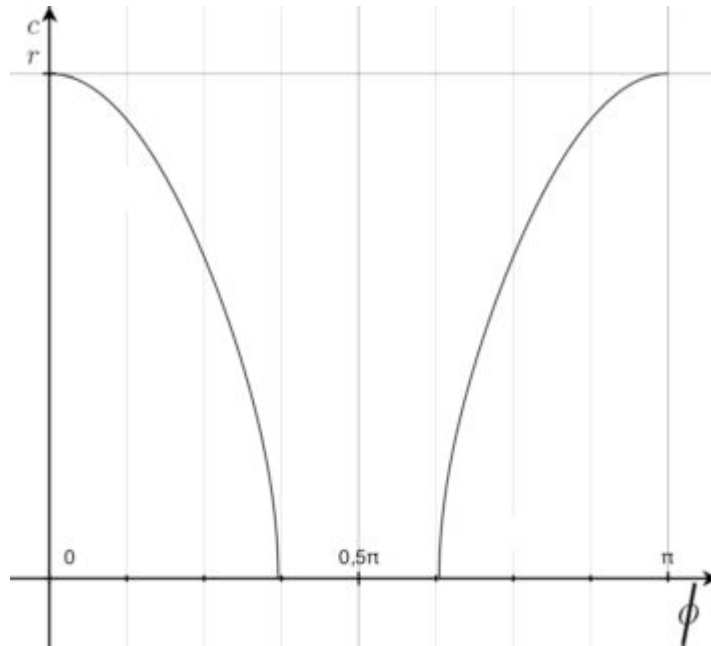


fig. 2.32 – Gráfico de c em função de ϕ quando A está no exterior da circunferência.

Do mesmo modo, ao observar o gráfico da fig. 2.32, podemos confirmar que $[B'D']$ tem o comprimento máximo ($2r$, o diâmetro) para $\phi = 0^\circ$ ou $\phi = 180^\circ$.

No entanto, no caso de $\phi = 180^\circ$, $[B'D']$ seria o diâmetro de uma nova circunferência simétrica à dada, em relação a um eixo perpendicular ao diâmetro no ponto A' .

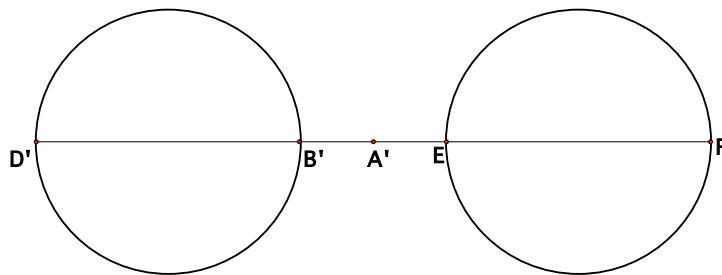


fig. 2.33

Pelo gráfico podemos também ver que o valor mínimo de c ($\frac{1}{2} \overline{B'D'}$) é zero, que correspondente a $A'B'$ tangente à circunferência.

No caso de $\phi = 90^\circ$, a semi-recta com origem em A' não intersecta a circunferência, como se vê na fig. 2.34, pelo que aí c ($\frac{1}{2} \overline{B'D'}$) não terá mínimo, como afirma Rivara.

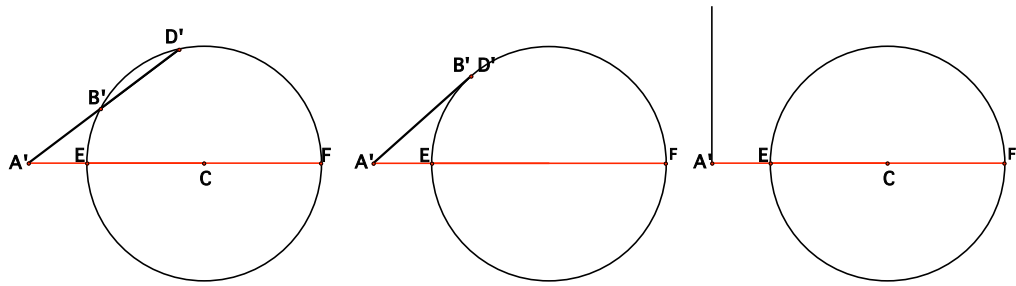


fig. 2.34

É de salientar que Rivara, refere que para $\phi = 0^\circ$ e $\phi = 180^\circ$ se tem $c = r$ e $c = -r$, respectivamente. Parece que o matemático português terá usado $-r$ para indicar que o segmento de recta correspondente a c , para $\phi = 180^\circ$, “cai para o lado oposto” ao do segmento de recta correspondente a c , para $\phi = 0^\circ$.

Capítulo 3

Estudo comparativo: o problema de Rivara noutros autores

Depois de estudado o problema, Rivara procura responder a algumas dúvidas levantadas por D'Alembert nos seus *Opuscles Mathematiques* e corrigir, segundo palavras do matemático português, um erro de Bezout (Rivara, 1815, pp. 11-13).

3.1. A interpretação de D'Alembert

D'Alembert nos seus *Opuscles Mathematiques* refere que, na resolução de problemas geométricos, as quantidades negativas, geralmente, tomam-se como “opostas” às quantidades positivas embora, tal não esteja, ainda, bem esclarecido e careça de demonstração (D'Alembert, 1780, p. 270). O autor de *Opuscles* procura clarificar o assunto, apresentando alguns exemplos sendo um deles similar ao problema de Rivara já analisado, exemplo ao qual D'Alembert se refere como sendo um dos casos embaraçosos no que concerne à posição das quantidades negativas.

3.1.1 O problema em D'Alembert

O enunciado do problema é o seguinte:

«Un cercle *BEFDO* étant donné, & le point *A* étant placé sur le diametre *BD* prolongé, mener la ligne *AEF* telle que *EF* soit égale à une ligne donnée *f* »⁴²
(D'Alembert, 1780. p. 272),

baseado na figura 3.1.

⁴² «Sendo dado um círculo *BEFDO*, e estando o ponto *A* colocado sobre o diâmetro *BD* prolongado, traçar a linha *AEF* tal que *EF* seja igual a uma dada linha *f* »

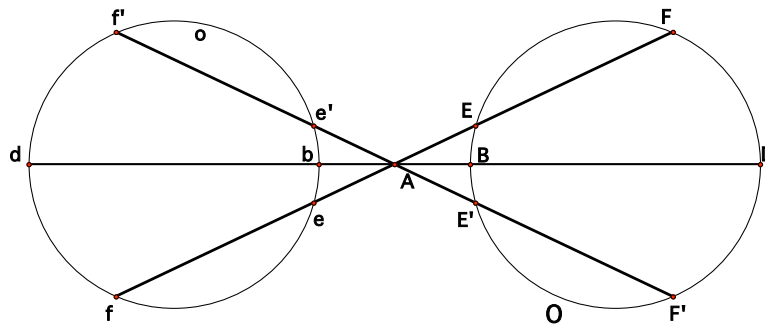


fig. 3.1 – Figura 49 de (D'Alembert, 1780, Tomo VII)

Neste problema, o objectivo é determinar uma recta que passe no ponto A , de modo que, a parte da recta que fica no interior da circunferência tenha um determinado comprimento, f . Para responder ao problema, D'Alembert busca as partes da recta entre o ponto A e a circunferência, as mesmas que Rivara procura no seu problema. Na verdade, conhecendo \overline{AE} e \overline{AF} , fica determinada a recta pretendida.

D'Alembert toma $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$ e $\overline{AE} = x$ para escrever a equação $(x + f)x = ab$, que resulta do corolário da proposição XXXVI do Livro Terceiro dos *Elementos* de Euclides⁴³, segundo o qual $\overline{AF} \cdot \overline{AE}$ é igual a $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ (D'Alembert, 1780, p. 272).

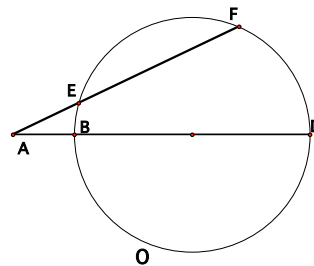


fig. 3.2

É de referir que no problema de D'Alembert não está implícita a ideia de eixos coordenados, como no exemplo apresentado por Rivara. Este problema inserese na “geometria não coordenada”.

As raízes da equação $(x + f)x = ab$, $x = -\frac{1}{2}f \pm \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + ab}$, são interpretadas por

⁴³ No corolário da proposição XXXVI do Livro Terceiro dos *Elementos* de Euclides pode ler-se «se de hum ponto qualquer A fóra de hum circulo se tirarem duas rectas, que cortem o circulo, os rectangulos comprehendidos pelas rectas inteiras, e pelas partes dellas, que ficão entre o dito ponto, e o convexo da circunferencia, serão iguaes entre si» (Euclides, 1768, p. 127).

D'Alembert como sendo \overline{AE} a raiz positiva e \overline{AF} a negativa, embora o autor alerte que $[AF]$ e $[AE]$ estejam do mesmo "lado" da recta EF , relativamente ao ponto A . E acrescenta que, se o ponto A estivesse no interior da circunferência, a equação seria $fx - x^2 = ab$ e os dois valores de x seriam positivos mas, «comme il est aisé de le voir»⁴⁴, estariam em "lados opostos" da recta EF relativamente a A (D'Alembert, 1780, p. 272).

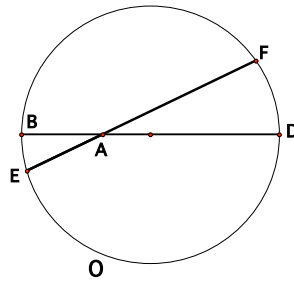


fig. 3.3

Ao analisar a interpretação de D'Alembert, compreende-se que o matemático francês, ao interpretar as soluções da equação $(x+f)x = ab$, considerou as raízes $x = -\frac{1}{2}f + \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + ab}$ (positiva) e $x = -\frac{1}{2}f - \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + ab}$ (negativa) como os comprimentos dos dois segmentos $[AE]$ e $[AF]$, respectivamente. Mas na verdade, na equação $(x+f)x = ab$, x representa \overline{AE} e $x+f$ representa \overline{AF} , daí que, sendo $\overline{AE} = -\frac{1}{2}f + \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + ab}$, para obter \overline{AF} adiciona-se f a x , donde resulta $\overline{AF} = x + f = \frac{1}{2}f + \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + ab}$. Assim, de facto, ambas as soluções do problema \overline{AE} e \overline{AF} são positivas e estão do mesmo "lado" da recta EF , relativamente a A .

O outro valor de x , $x = -\frac{1}{2}f - \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + ab}$, simétrico de \overline{AF} , pode ser interpretado como \overline{Af} e $x+f = \frac{1}{2}f - \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + ab}$ (negativa) como \overline{Ae} . Neste caso, ambas as soluções

⁴⁴ «como é fácil de ver»

\overline{Af} e \overline{Ae} são negativas e estão do mesmo “lado” da recta Af relativamente ao ponto A e correspondem a segmentos “opostos” a $[AF]$ e $[AE]$, respectivamente.

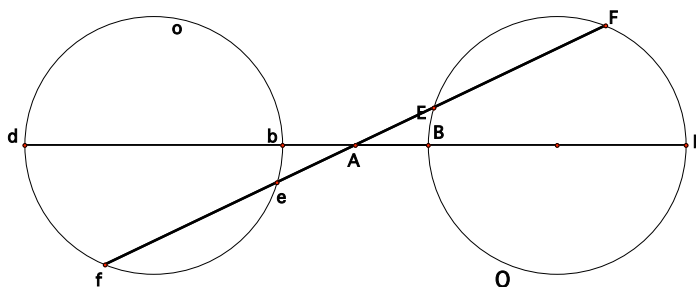


fig. 3.4

D’Alembert procura responder à dúvida que ele próprio coloca relativamente ao facto de soluções com sinais contrários se encontrarem do mesmo “lado” de uma recta. O Matemático Francês refere que esta dificuldade poderia ser ultrapassada considerando que ab resulta tanto do produto de \overline{AB} por \overline{AD} como de \overline{Ab} por \overline{Ad} (simétricos de \overline{AB} e \overline{AD} , respectivamente), de tal modo que a raiz negativa seria \overline{Af} , simétrica de \overline{AF} e neste caso as duas raízes da equação, a positiva e a negativa, corresponderiam a \overline{AE} e \overline{Af} , dois segmentos de recta “opostos”:

«On pourroit répondre à cette difficulté que le produit ab étant aussi-bien celui de $-a$ par $-b$, que de $+a$ par $+b$, ce produit représenteroit également $AB \times AD$, & $Ab \times Ad$, en faisant Ab & Ad égales & de sens contraire à AB e AD ; de sorte que la racine négative est indiquée par Af égale & de sens contraire à AF » (D’Alembert, 1780, pp. 272 - 273)⁴⁵

No entanto, D’Alembert refere, conflitualmente, que tal resposta não lhe parece satisfatória e procura refutá-la com uma série de argumentos e questões (D’Alembert, 1780, p. 273) :

- 1.º: D’Alembert refere que se as soluções do problema fossem \overline{AE} e \overline{Af} deveria haver outras duas soluções, \overline{Ae} e \overline{AF} (D’Alembert, 1780, p. 273), que para D’Alembert não

⁴⁵ «Poder-se-ia responder a esta dificuldade em que o produto ab sendo também o de $-a$ por $-b$, tal como o de $+a$ por $+b$, este produto representaria igualmente $AB \times AD$, & $Ab \times Ad$, originando Ab e Ad iguais e de sentido contrário a AB e AD ; por forma que a raiz negativa seja indicada por Af igual e de sentido contrário a AF »

existem. Mas há, de facto, porque da equação $(x + f)x = ab$ resultam dois valores para x , um positivo e um negativo e dois valores para $x + f$, também com sinais contrários, que poderiam ser interpretados como \overline{AE} e \overline{Af} , no caso de x e \overline{Ae} e \overline{AF} , no caso de $x + f$, tal como já foi referido anteriormente.

- 2.º: D'Alembert levanta a seguinte questão: como \overline{AE} é a raiz positiva da equação, sendo $[AE]$ e $[Ae]$ segmentos "opostos" de igual comprimento, porque razão não pode ser \overline{Ae} a raiz negativa (D'Alembert, 1780, p. 273)? Realmente \overline{Ae} é uma solução negativa do problema correspondente a $x + f$ para o caso de $x = \overline{AF}$. Mas segundo D'Alembert, a raiz negativa seria (apenas) $x = -\frac{1}{2}f - \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + ab}$ que não poderia corresponder a \overline{Ae} porque não é o simétrico de $\overline{AE} = -\frac{1}{2}f + \sqrt{\frac{1}{4}f^2 + ab}$ (D'Alembert, 1780, p. 273).

- 3.º: D'Alembert apresenta o facto de x ter de corresponder a um segmento de recta que "começa" em A e "termina" na circunferência dada (de diâmetro \overline{BD}), como acontece com \overline{AE} e \overline{AF} pelo que, na opinião de D'Alembert, \overline{AF} parece ser traduzido pelo segundo valor de x (D'Alembert, 1780, p. 273) e não por \overline{Af} que "termina" num outro círculo, de diâmetro $[bd]$.

Na verdade, ao considerar-se o produto ab como resultante de $-a \times (-b)$, são introduzidas novas soluções, \overline{Ae} e \overline{Af} , correspondentes ao círculo de diâmetro $[bd]$.

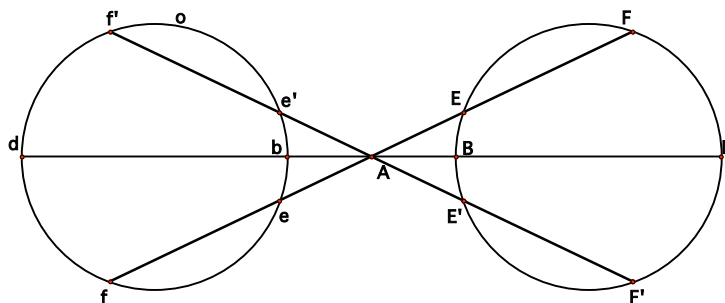


fig. 3.5

- 4.º: D'Alembert refere que a solução que se busca corresponde a um segmento que

“termina” na semicircunferência de diâmetro $[BD]$ acima da recta BD , caso contrário, $\overline{AE'}$ e $\overline{AF'}$ satisfariam igualmente o problema, e assim, diz o matemático francês, a equação do problema deveria ter quatro raízes, e consequentemente, seria do quarto grau e não do segundo (D'Alembert, 1780, p. 273).

Na verdade, percebe-se que o que teria quatro soluções seria o problema e não a equação. Os valores de x são as soluções da equação e os valores de x e de $x + f$ são as soluções do problema.

Ao assumir que as soluções do problema devem corresponder à semicircunferência de diâmetro $[BD]$ acima da recta BD , D'Alembert levanta a questão sobre qual motivo para considerar a semicircunferência de diâmetro $[bd]$ abaixo da recta bd , uma vez que, \overline{Ab} e \overline{Ad} são igualmente negativos para a semicircunferência de diâmetro $[bd]$ acima da recta bd ; e neste caso a negativa seria $\overline{Af'}$ que não corresponde a um segmento “oposto” a $[AF]$ (D'Alembert, 1780, p. 273). D'Alembert refere que se se considera \overline{Af} como solução do problema, correspondente à semicircunferência de diâmetro $[bd]$ abaixo da recta bd , por ser $-a \times (-b) = ab$, também poderia considerar-se a solução $\overline{Af'}$.

À luz da actualidade, ao considerarmos a recta AF , é plausível que as soluções correspondam a \overline{AE} , \overline{AF} , \overline{Ae} e \overline{Af} e no caso da recta AF' seriam $\overline{AE'}$, $\overline{AF'}$, $\overline{Ae'}$ e $\overline{Af'}$.

Após estes argumentos, D'Alembert refere que \overline{AE} e \overline{AF} são as soluções para o problema que lhe parecem mais naturais. E acrescenta: Considerando $\overline{AF} = x$ em vez de $\overline{AE} = x$, a equação que traduz o problema é $x^2 - fx - ab = 0$, que difere da equação $x^2 + fx - ab = 0$ encontrada para $\overline{AE} = x$. No caso de $x^2 - fx - ab = 0$, D'Alembert diz que o valor positivo de x é \overline{AF} e o negativo \overline{AE} e, no caso de $x^2 + fx - ab = 0$, \overline{AF} é o valor negativo porque, segundo o matemático francês, ao mudar o sinal de fx , \overline{AF} torna-se positivo e «*les racines négatives d'une équation sont celles qui deviennent positives en*

changeant les signes des termes pairs»⁴⁶ (D'Alembert, 1780, p.274).

Entende-se, uma vez mais, que D'Alembert ao interpretar as soluções obtidas da nova equação, $x^2 - fx - ab = 0$, não considerou que sendo $x = \overline{AF}$, seria $\overline{AE} = x - f$ e não o outro valor de x .

D'Alembert também faz referência, num parágrafo, ao caso do ponto A estar no interior da circunferência. A equação que traduz este problema é $x^2 - fx + ab = 0$, que resulta da aplicação da proposição XXXV do Livro Terceiro dos *Elementos* de Euclides⁴⁷ e cujas duas raízes são positivas embora, segundo D'Alembert, correspondam a segmentos “opostos”, porque «dans quelque sens qu'on prenne x , on aura toujours $(f - x)x = ab$, & la valeur de x positive»⁴⁸ (D'Alembert, 1780, p. 274).

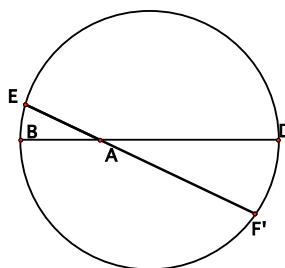


fig. 3.6

Infere-se, de facto que, quer se considere $\overline{AE} = x$, quer $\overline{AF} = x$, a equação que traduz o problema é $(f - x)x = ab$ e as soluções da equação são positivas.

Tal como no caso de A pertencer ao exterior da circunferência, no caso de A se encontrar no seu interior, o matemático francês também terá confundido os dois valores de x com as partes \overline{AE} e $\overline{AF'}$ (ou $\overline{AE'}$ e \overline{AF}). Como $\overline{AB} = -a$ e $\overline{AD} = b$ (por $[AB]$ e $[AD]$ serem segmentos “opostos” em relação a A), a equação $(f - x)x = ab$ resulta de

⁴⁶ «as raízes negativas duma equação são aquelas que se tornam positivas mudando os sinais dos termos pares». Em relação aos termos pares pode ler-se no artigo *Terme* da *Encyclopédie*: «Dans une équation, on prend ordinairement pour le premier terme celui où la lettre inconnue a la plus haute dimension: le terme qui contient la Racine élevée à la puissance plus basse immédiatement apres, est appellée le second terme, &c» (*Encyclopédie*, art. *Terme*, p. 125).

⁴⁷ Na proposição XXXV do Livro Terceiro dos *Elementos* de Euclides pode ler-se «se dentro de hum circulo qualquer, duas linhas rectas se cortarem; será o rectângulo comprehendido pelos segmentos de huma igual ao rectângulo comprehendido pelos segmentos da outra» (Euclides, 1768, p. 122).

⁴⁸ «em qualquer sentido que se considere x , ter-se-á sempre $(f - x)x = ab$, e o valor de x positivo»

$|x - f|x = |-a|b$ e D'Alembert, ao interpretar os valores de x encontrados, não considerou que sendo $x = \overline{AE}$ (ou $x = \overline{AF}$), seria $\overline{AF'} = x - f$ (ou $\overline{AE'} = x - f$), pelo que, os dois segmentos "opostos" não correspondem às duas raízes (positivas) da equação.

3.1.2. A resposta de Rivara

Rivara, na sua obra, procura responder às dúvidas que D'Alembert terá deixado na mente dos leitores dos seus *Opuscules*, relativamente à interpretação das raízes negativas.

Para tal, o matemático português resolve o seu problema recorrendo a uma equação semelhante à usada por D'Alembert nos seus *Opuscules*, deduzida com base no corolário da proposição XXXVI do Terceiro Livro dos *Elementos de Euclides*, primeiro para o caso do ponto A estar no interior da circunferência e depois para o caso de A estar no exterior da circunferência.

3.1.2.1. Caso do ponto pertencente ao interior da circunferência

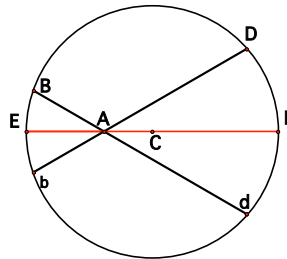


fig. 3.7

Rivara usa as raízes já determinadas,

$$z = c - \sqrt{c^2 - ab} \quad (\overline{AB})$$

e

$$z' = c + \sqrt{c^2 - ab} \quad (\overline{AD}),$$

para deduzir a equação

$$zz' = ab, \quad [3.1]$$

que é equivalente a $z(2c - z) = ab$, equação semelhante à usada por D'Alembert nos seus *Opuscules*, $x(f - x) = ab$.

A equação [3.1] corresponde a $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AE} \cdot \overline{AF}$ que resulta da propriedade da circunferência descrita na proposição XXXV do Livro Terceiro dos *Elementos* de Euclides⁴⁹, como refere o matemático português (Rivara, 1815, p. 9).

Da equação [3.1]

e

$$\text{da equação } z + z' = 2c \quad [3.2]$$

obtêm-se as raízes positivas

$$z = c - \sqrt{c^2 - ab} = \overline{AB} \quad \text{e} \quad z' = c + \sqrt{c^2 - ab} = \overline{AD} \quad [3.3]$$

que não correspondem a dois segmentos “opostos” relativamente a A , como refere D’Alembert nos seus *Opuscules*.

Rivara tem aqui o cuidado de usar, para resolver o problema, as duas equações $zz' = ab$ e $z + z' = 2c$, e não apenas a equação $z(2c - z) = ab$ como faz D’Alembert (Bezout e Anastácio da Cunha, como veremos mais à frente). Das equações de Rivara resultam quatro soluções enquanto da equação usada por D’Alembert procedem duas soluções. Parece que terá sido este facto que induziu em erro D’Alembert, considerando os dois valores de z resultantes da equação $z(2c - z) = ab$ como \overline{AB} e \overline{Ad} , apesar de ambos positivos e não z e $2c - z$.

Este aspecto é revelador do rigor e cuidado que Rivara aplica no seu trabalho.

Relativamente a isto, Lacroix, no seu *Traité*, chama atenção para a interpretação das soluções de uma equação similar à de D’Alembert (e de Rivara). Relativamente à fig. 3.8 diz «*Si l'on avait $x^2 - ax = b^2$, il faudrait faire $x = AD'$, on aurait alors $AD = x - a$ et $x(x - a) = b^2$* » (Lacroix, 1807, pp. 98).

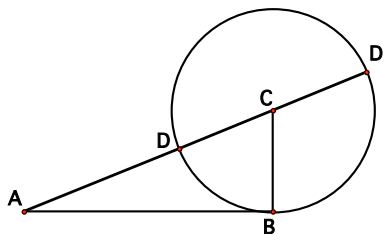


fig. 3.8 – Fig. 28 de (Lacroix, 1807)

⁴⁹ ver nota de rodapé n° 47.

D'Alembert, para reforçar a sua interpretação de que as soluções da equação correspondem a segmentos “opostos”, embora tenham o mesmo sinal, diz que, quer z seja $c - \sqrt{c^2 - ab}$, quer seja $c + \sqrt{c^2 - ab}$, a equação que traduz o problema é sempre $z(2c - z) = ab$ e as suas raízes positivas. O matemático francês interpreta z e z' , primeiro, como $z = c - \sqrt{c^2 - ab} = \overline{AB}$ e $z' = c + \sqrt{c^2 - ab} = \overline{Ad}$ e depois troca z com z' e interpreta-os $z = c + \sqrt{c^2 - ab} = \overline{Ad}$ e $z' = c - \sqrt{c^2 - ab} = \overline{AB}$.

Na expectativa de contestar este argumento de D'Alembert, Rivara, após considerar a interpretação de [3.3], interpreta as “novas” soluções que resultam da troca de z com z' , ou seja,

$$z = c + \sqrt{c^2 - ab} \text{ e } z' = c - \sqrt{c^2 - ab} \quad [3.4]$$

que são positivas e resultam da mesma equação, $z(2c - z) = ab$, tal como afirma D'Alembert.

No entanto, a interpretação do matemático português das “novas” soluções não corresponde, no contexto do seu trabalho, como para D'Alembert, à troca dos dois segmentos, ou seja, à troca de \overline{AB} com \overline{AD} .

Para as interpretar, Rivara parece ter-se baseado na teoria de Carnot, recorrendo a duas figuras correlacionadas (ou sistemas correlacionados) ⁵⁰, conjectura feita com base na afirmação do matemático português, transcrita a seguir, onde é referenciada uma quantidade como primitiva que corresponderá a uma “linha” dum sistema primitivo:

«Em quanto às linhas, que se exprimem pelas outras raízes igualmente positivas $z = c + \sqrt{c^2 - ab}$ e $z' = c - \sqrt{c^2 - ab}$, que resultão das mesmas equações, advirta-se, que se tomarmos o b primitivo igual a a , isto he, $\alpha F = a$, será $x = 2r - a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} = EP'$ » (Rivara, 1815, pp. 9-10).

Rivara representa os dois sistemas numa nova figura, a figura 2 da sua obra.

⁵⁰ De acordo com a teoria de Carnot, quando há duas figuras geométricas relacionadas entre si, isto é, sobre as quais se possam fazer raciocínios análogos, à figura “original” chamase figura ou sistema primitivo, e a outra que com ela está relacionada figura ou sistema transformado ou correlativo (Carnot, 1803, p. xxvi).

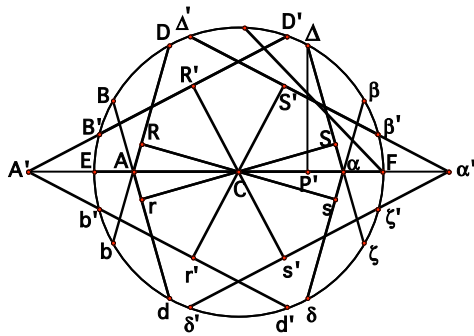


fig. 3.9 – Figura 2 de (Rivara, 1815)

Tal como a figura 1 da obra de Rivara, também esta, parece, à primeira vista, bastante confusa e como tal, nas próximas figuras deste trabalho constam apenas alguns dos elementos geométrico que aparecem na fig. 3.9, os necessários para acompanhar os raciocínios expostos.

Os dois sistemas correlacionados são

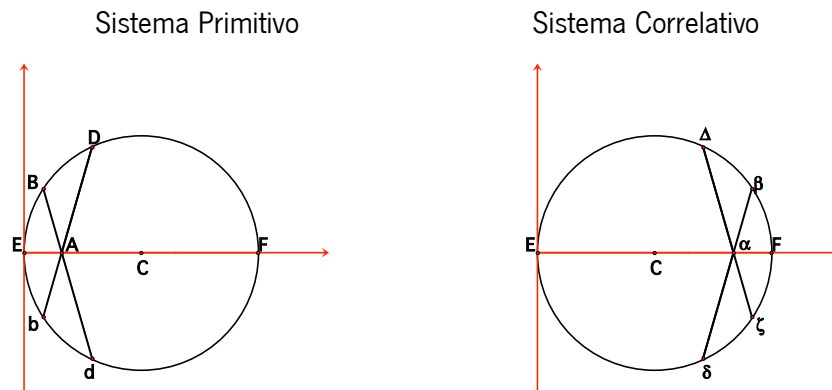


fig. 3.10

tais que, no sistema primitivo, $\overline{EA} = a$ e $\overline{AF} = b$ e no sistema correlativo, $\overline{E\alpha} = b$ e $\overline{\alpha F} = a$.

Aos dois sistemas correlacionados da fig. 3.10 podem aplicar-se os mesmos raciocínios e fórmulas similares, tal como refere a teoria de Carnot. Para ambos, a “fórmula” é $z(2c - z) = ab$, da qual resultam $c + \sqrt{c^2 - ab}$ e $c - \sqrt{c^2 - ab}$, como já foi referido anteriormente.

Rivara interpreta as duas soluções obtidas em [3.4] como comprimentos de segmentos de recta do sistema correlativo. z e z' , no sistema primitivo, são interpretados como

$$z = \overline{AB} \text{ e } z' = \overline{AD}$$

e no sistema correlativo, como

$$z = \overline{\alpha\Delta} (= \overline{AD}) \text{ e } z' = \overline{\alpha\beta} (= \overline{AB}). \quad [3.5]$$

Em [3.5] observamos que Rivara não escreve $z' = \overline{\alpha\Delta} (= \overline{AD})$ e $z = \overline{\alpha\beta} (= \overline{AB})$. Esta troca de z com z' poderá ser explicada pelo facto de ao “deslocar-se” o ponto A de modo a que coincida com α , $[Bd]$ coincide com $[\Delta\zeta]$ e $[BA]$ coincide com $[\Delta\alpha]$ e não com $[\beta\alpha]$. O mesmo acontece no caso do segmento de recta $[Db]$.

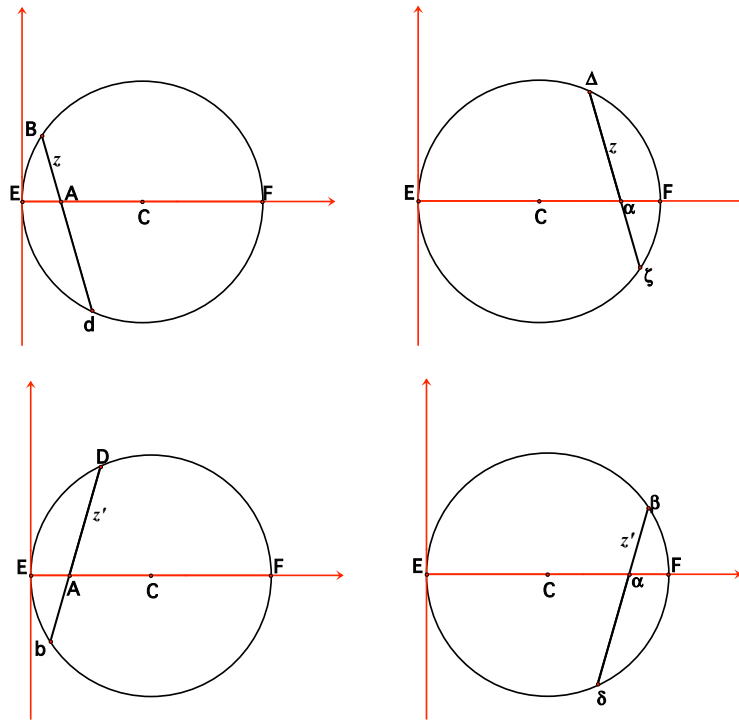


fig. 3.12

Rivara tem o cuidado de determinar analiticamente as soluções do sistema correlativo para mostrar que, de facto, os segmentos deste sistema, $[\alpha\Delta]$ e $[\alpha\beta]$, correspondem aos “novos” z e z' :

«se tomarmos o b primitivo igual a a , isto he, $\alpha F = a$, será $x = 2r - a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} = EP'$, e feita a substituição na equação do circulo $y^2 = 2rx - x^2$, teremos, $z^2 - \frac{2r(r-a)}{\sqrt{r^2 + m^2}} z = a(2r-a)$, que, pondo b em vez de a primitivo, ou $2r-a$, nos dá $z = c + \sqrt{c^2 - ab} = \Delta\alpha = AD$ e $z'' = -c + \sqrt{c^2 - ab} = \overline{\alpha\zeta} = \overline{Ab}$ » (Rivara, 1815, p. 10).

De facto, tomando $\overline{E\alpha} = b$ e $\overline{\alpha F} = a$,

$$x = b - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} = 2r - a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} = \overline{EP'}$$

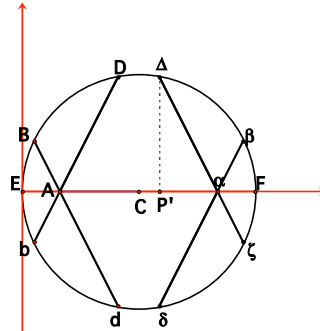


fig. 3.12

Feita a substituição de x por $2r - a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}$ e y^2 por $\frac{m^2 z^2}{r^2 + m^2}$ ⁵¹ na equação

da circunferência $y^2 = 2rx - x^2$, vem

$$\begin{aligned} \frac{m^2 z^2}{r^2 + m^2} &= 2r \left(2r - a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} \right) - \left(2r - a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} \right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{m^2 z^2}{r^2 + m^2} &= 4r^2 - 2ar - 4r^2 + 4ar - a^2 - \frac{2r^2 z}{\sqrt{r^2 + m^2}} + \frac{4r^2 z}{\sqrt{r^2 + m^2}} - \frac{2arz}{\sqrt{r^2 + m^2}} - \frac{r^2 z^2}{r^2 + m^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{m^2 z^2}{r^2 + m^2} &= (-a^2 + 2ar) + \left(\frac{2r^2 - 2ar}{\sqrt{r^2 + m^2}} \right) z - \frac{r^2}{r^2 + m^2} z^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{r^2 + m^2} + \frac{r^2}{r^2 + m^2} \right) z^2 &- \left(\frac{2r^2 - 2ar}{\sqrt{r^2 + m^2}} \right) z = a(2r - a) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z^2 - \frac{2r(r - a)}{\sqrt{r^2 + m^2}} z - a(2r - a) &= 0 \quad [3.6]. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação [3.6], vem que $z = \frac{r(r - a) \pm \sqrt{r^4 + m^2 a(2r - a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$.

Para simplificar as raízes, usamos $2c = 2\sqrt{\frac{r^4 + m^2 a(2r - a)}{r^2 + m^2}}$ e $m^2 = \frac{r^4 - c^2 r^2}{c^2 - ab}$ (tal

⁵¹ As expressões de x e y^2 são iguais às do sistema primitivo mas a é substituído por b ou $2r - a$.

como no sistema primitivo), e fica

$$z = \frac{r(r-a)}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{r^4 - c^2 r^2}{c^2 - ab}\right)}} \pm c \stackrel{b=2r-a}{\Leftrightarrow} z = \frac{r(r-a)}{\sqrt{r^2 + \frac{r^4 - r^2 c^2}{c^2 - a(2r-a)}}} \pm c.$$

Simplificando, vem

$$\begin{aligned} z &= \frac{r(r-a)}{\sqrt{\frac{c^2 r^2 - a(2r-a)r^2 + r^4 - r^2 c^2}{c^2 - a(2r-a)}}} \pm c = \\ &= \frac{r-a}{\sqrt{r^2 - a(2r-a)}} \sqrt{c^2 - a(2r-a)} \pm c = \\ &= \frac{r-a}{\sqrt{r^2 - 2ar + a^2}} \sqrt{c^2 - a(2r-a)} \pm c \stackrel{a < r}{=} \\ &= \sqrt{c^2 - a(2r-a)} \pm c. \end{aligned}$$

Substituindo $2r-a$ por b ,

$$\begin{aligned} z &= \overline{\alpha\Delta} = \overline{AD} = c + \sqrt{c^2 - ab} \quad \text{e} \\ z'' &= \overline{\alpha\zeta} = \overline{Ab} = -c + \sqrt{c^2 - ab}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, obteríamos

$$\begin{aligned} z' &= \overline{\alpha\beta} = \overline{AB} = c - \sqrt{c^2 - ab} \quad \text{e} \\ z''' &= \overline{\alpha\delta} = \overline{Ad} = -c - \sqrt{c^2 - ab}, \end{aligned}$$

$$\text{no caso de } x = b + \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} = 2r - a + \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}.$$

Portanto, z e z' , segundo a interpretação de Rivara representam, no novo sistema, $\overline{\alpha\Delta}$ e $\overline{\alpha\beta}$ e também não correspondem a segmentos “opostos”, ao contrário do que afirma D’Alembert nos seus *Opuscules*.

3.1.2.2. Caso do ponto pertencente ao exterior da circunferência

No caso do ponto A se encontrar no exterior da circunferência, Rivara procede de modo análogo para determinar as equações que traduzem os sistemas correlacionados.

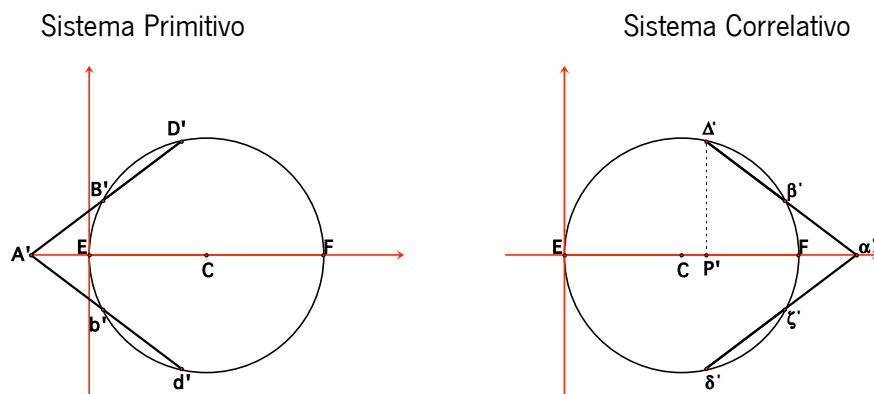


fig. 3.13

Multiplicando as raízes $z = -c + \sqrt{c^2 + ab}$ e $z' = c + \sqrt{c^2 + ab}$, resulta a equação $z(z + 2c) = ab$, que traduz os sistemas representados na fig. 3.13 e donde procedem as raízes $z = -c + \sqrt{c^2 + ab}$; $z' = c + \sqrt{c^2 + ab}$

e

$$z = -c - \sqrt{c^2 + ab}; z' = c - \sqrt{c^2 + ab} \quad [3.7].$$

Para responder à dúvida levantada por D'Alembert nos seus *Opuscules* relativamente à interpretação destas soluções, Rivara relaciona os dois sistemas para o caso de A se encontrar no interior da circunferência (fig. 3.10), com os dois sistemas da fig. 3.13.

O matemático português começa por construir a fig. 3.14.

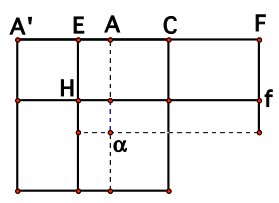


fig.3.14 – Figura 3 de (Rivara, 1815)

Partindo dum segmento de comprimento igual ao diâmetro da circunferência de centro C , \overline{EF} , o matemático português constrói um quadrado de lado \overline{AE} (ou $\overline{A'E}$) cujos vértices “opostos” são H e α .

Da proposição V do segundo livro dos *Elementos* de Euclides⁵² resulta que $\overline{EA.AF} + \overline{CA}^2 = \overline{EC}^2 \Leftrightarrow \overline{EA.AF} = \overline{EC}^2 - \overline{CA}^2$. Assim, observando a fig. 3.15, se α coincide com A' , o rectângulo “positivo” $\overline{EA.AF} = \overline{EC}^2 - \overline{CA}^2$, que Rivara designa por αf , transforma-se no rectângulo $\overline{EC}^2 - \overline{CA}^2$ “negativo” (porque $\overline{EC}^2 < \overline{A'C}^2$). Então, de acordo com a teoria de Carnot, deve mudar-se o sinal de $\overline{EA'.A'F}$.

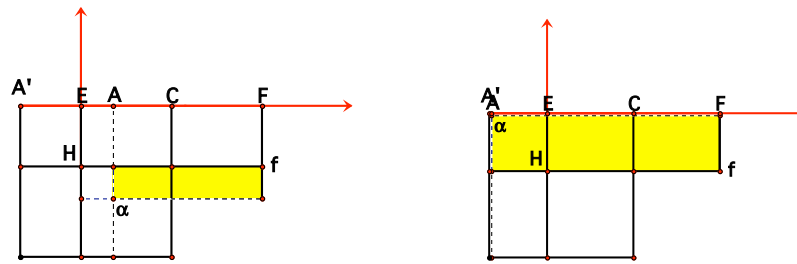


fig.3.15

Rivara tem o cuidado de referir que se verifica a lei da continuidade relativamente à área do rectângulo αf . O autor escreve que se $\overline{CA} = \overline{EC}$ (ou seja, se A coincide com E), α coincide com H e a área do rectângulo é $\overline{EA.AF} = 0$ (Rivara, 1815, p. 10).

Como quando $\overline{CA} < \overline{EC}$ (A está no interior da circunferência), $\overline{EA.AF}$ é positivo e quando $\overline{CA} > \overline{EC}$ (A está no exterior da circunferência), $\overline{EA.AF}$ é negativo, então verifica-se que a área do rectângulo αf muda de sinal na “passagem” por zero.

Transportando este raciocínio para o problema, caso A se encontre no interior da circunferência, $\overline{AB.\Delta\alpha} = \overline{EC}^2 - \overline{CA}^2$. Esta equação resulta do seguinte:

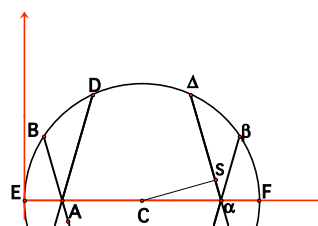


fig.3.16

⁵² Na proposição V do segundo Livro dos *Elementos* de Euclides por ler-se que «se huma linha recta for dividida em duas partes iguaes, e em outras duas desiguaes; será o rectângulo comprehendido pelas partes desiguaes juntamente com o quadrado da parte entre as duas secções, igual ao quadrado da metade da linha proposta» (Euclides, 1768, p. 63).

Pela proposição V do segundo livro dos *Elementos* de Euclides⁵³,
 $\overline{AB} \cdot \overline{\alpha\Delta} + \overline{\alpha S}^2 = \overline{\Delta S}^2$ [3.8].

Do triângulo rectângulo $[CS\Delta]$ vem que $\overline{\Delta S}^2 = \overline{\Delta C}^2 - \overline{CS}^2$. Substituindo este valor em [3.8] vem que $\overline{AB} \cdot \overline{\alpha\Delta} + \overline{\alpha S}^2 = \overline{\Delta C}^2 - \overline{CS}^2$ [3.9].

Do triângulo $[CS\alpha]$ vem que $\overline{CS}^2 = \overline{C\alpha}^2 - \overline{\alpha S}^2$. Substituindo este valor em [3.9] vem que $\overline{AB} \cdot \overline{\alpha\Delta} + \overline{\alpha S}^2 = \overline{\Delta C}^2 - (\overline{C\alpha}^2 - \overline{\alpha S}^2)$ [3.10].

Como $\overline{\Delta C} = \overline{EC} = r$ e $\overline{C\alpha} = \overline{CA}$, substituindo estes valores em [3.10] fica $\overline{AB} \cdot \overline{\alpha\Delta} + \overline{\alpha S}^2 = \overline{EC}^2 - \overline{CA}^2 + \overline{\alpha S}^2$ e, portanto, $\overline{AB} \cdot \overline{\alpha\Delta} = \overline{EC}^2 - \overline{CA}^2$.

Mas ao passar A para A' , $\overline{AB} = c - \sqrt{c^2 - ab}$ torna-se negativo ($c - \sqrt{c^2 + ab}$), como já foi referido no segundo capítulo, assim como \overline{AE} se torna negativo no exemplo referente à figura 3.15.

Logo, pode aplicar-se o raciocínio anterior para concluir que os rectângulos $\overline{AB} \cdot \overline{\Delta\alpha}$ e $\overline{EA} \cdot \overline{AF}$ também são negativos em que A coincide com A' .

Então, deve ser mudado o sinal do rectângulo $ab = \overline{EA} \cdot \overline{AF} = \overline{AB} \cdot \overline{\Delta\alpha}$ nas expressões das raízes

$$\overline{AB} = c - \sqrt{c^2 - ab} \text{ e } \overline{\Delta\alpha} = c + \sqrt{c^2 - ab}$$

que resultam em

$$c - \sqrt{c^2 + ab} \text{ e } c + \sqrt{c^2 + ab}, \text{ a primeira negativa e a segunda positiva.}$$

Mas, de acordo com os cálculos efectuados no capítulo anterior, $\overline{A'B'}$ é positiva, e portanto, na passagem de A para A' , $\overline{A'B'} = c - \sqrt{c^2 + ab}$ converte-se em $\overline{A'B'} = -c + \sqrt{c^2 + ab}$ e, na passagem de α para α' , $\overline{\alpha'\Delta'} = c + \sqrt{c^2 + ab}$ deverá converter-se, em $\overline{\alpha'\delta'} = -c - \sqrt{c^2 + ab}$, «para se restituir negativo» o rectângulo $\overline{AB} \cdot \overline{\Delta\alpha}$, tal como refere Rivara (1815, p.11).

Depois de interpretadas as soluções de [3.7], depreende-se que Rivara se propõe

⁵³ Ver nota de rodapé n° 52.

determinar a sua posição e comparar as posições dos segmentos dos dois sistemas correlacionados da fig. 3.13 para, ao que parece, concluir que raízes com sinais contrários correspondem a segmentos “opostos”, contrariamente ao que afirma D’Alembert nos seus *Opuscles* (D’Alembert, 1780, p. 272).

O matemático português começa por considerar o caso particular de $b = r$, para A pertencente ao exterior da circunferência. Para esta conjectura baseamo-nos no facto de Rivara usar para este caso particular o valor de c correspondente a A exterior à circunferência (Rivara, 1815, p. 11).

No entanto, $b = r$ significa que $a = r$ e que A coincide com C , pelo que, não pode estar no exterior da circunferência, como supõe Rivara. Se A pertencesse ao seu exterior, então seria $b = 2r + a$, como já foi visto anteriormente e, por conseguinte, b seria maior do que $2r$ (uma vez que, a constante a assumir, na expressão, apenas valores positivos).

Rivara, considerando como verdadeira a hipótese de A pertencer ao exterior da circunferência com $b = r$, usa a expressão de c , $c = \sqrt{\frac{r^4 - m^2 a(2r + a)}{r^2 + m^2}}$, e substitui b por r e r por $-a$ (para ser $b = 2r + a = r$), obtendo

$$c^2 = \frac{a^4 + m^2 a^2}{a^2 + m^2} = a^2. \quad [3.11]$$

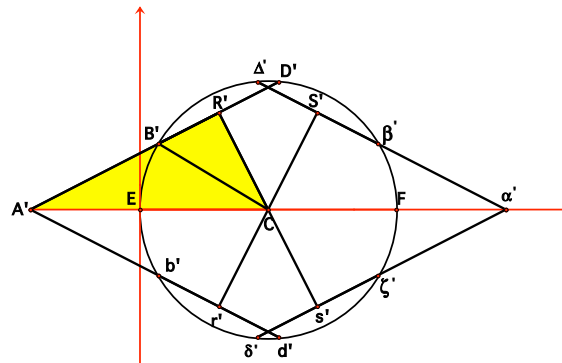


fig. 3.17

O matemático português, com base no triângulo rectângulo $[B'CR']$, deduz, tal como no caso de A pertencente ao interior da circunferência, que

$$r^2 = c^2 + \overline{CR'}^2 \Leftrightarrow \overline{CR'} = \pm\sqrt{r^2 - c^2} \quad [3.12].$$

e com base no triângulo rectângulo $[A'CR']$ que

$$(a + r)^2 = \overline{CR'}^2 + \overline{A'R'}^2 \quad [3.13].$$

Substituindo \overline{CR} em [3.13] pelo valor encontrado em [3.12], vem

$$\begin{aligned} \overline{A'R'}^2 &= (a+r)^2 - r^2 + c^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{A'R'}^2 &= c^2 + a(2r+a) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{A'R'} &= \pm\sqrt{c^2 + ab} . \quad [3.14] \end{aligned}$$

Substituindo c nas expressões [3.12] e [3.14] pelo valor encontrado em [3.11], Rivara conclui que $\overline{A'R'}$ e $\overline{CR'}$ são iguais a zero. No entanto, sendo $\overline{A'R'} = \pm\sqrt{c^2 + ab}$, este é sempre um valor diferente de zero porque $c^2 + ab \neq 0$. $\overline{CR'}$ seria zero apenas quando a recta tivesse declive nulo.

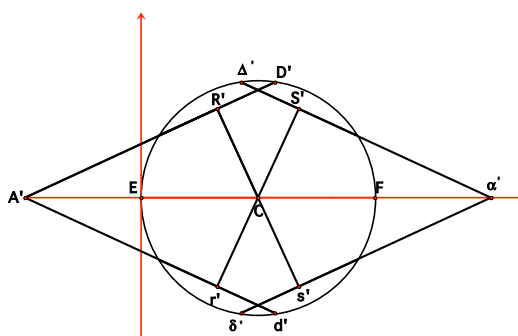


fig. 3.18

Ao afirmar que, para $b = r$, $\overline{A'R'}$ e $\overline{CR'}$ são iguais a zero, Rivara pretende mostrar que a interpretação que apresenta em seguida, está de acordo com a Lei da Continuidade, ou seja, que $\overline{A'R'}$ e $\overline{CR'}$ mudam de sinal na passagem por zero.

Rivara refere que:

« $\sqrt{c^2 + ab}$ exprimirá as linhas $A'R'$ e $\alpha'S'$ e $-\sqrt{c^2 + ab}$ as oppostas $\alpha's'$ e $A'r'$. Semelhantemente $\sqrt{r^2 - c^2}$ dará as linhas CR' e CS' ; e $-\sqrt{r^2 - c^2}$ as oppostas Cs' e Cr' » (Rivara, 1815, p. 11).

Partindo do pressuposto de que $[\alpha's']$ e $[A'R']$ são segmentos “opostos”, o matemático português conclui que o segmento $[\alpha'\delta']$, que corresponde à raiz negativa $z'' = -c - \sqrt{c^2 + ab}$, é “oposto” a $[A'D']$, representado pela raiz positiva $z' = c + \sqrt{c^2 + ab}$. E do pressuposto de que $[\alpha'S']$ e $[A'r']$ são “opostos” conclui que o segmento $[A'd']$, representado pela raiz negativa z'' , é “oposto” a $[\alpha'\Delta']$, representado pela raiz positiva z' .

Desta forma Rivara terá procurado contestar a ideia de D'Alembert de que, embora $[A'D']$ e $[A'B']$ não sejam segmentos “opostos”, a raiz positiva é dada por $\overline{A'B'}$ e a negativa por $\overline{A'D'}$. Rivara procura mostrar que a raiz negativa $-c - \sqrt{c^2 + ab}$ é dada por um segmento “oposto” à raiz positiva $c + \sqrt{c^2 + ab} = \overline{A'B'}$, que o matemático português afirma ser $[\alpha'\delta']$ e não $[A'D']$ nem nenhum segmento correspondente a uma nova circunferência, também sugerido por D'Alembert nos seus *Opuscules*. No entanto, parece-nos que as deduções utilizadas para chegar a tal conclusão não serão claras.

3.2. A interpretação de Bezout

Nos seus *Elementos de Analyse*, na secção dedicada à aplicação da álgebra à Geometria, Bezout apresenta um problema semelhante ao de Rivara, alusivo apenas ao caso do ponto A pertencer ao exterior da circunferência e que se enquadra no campo da “geometria não coordenada”, tal como o de D'Alembert.

3.2.1. O problema em Bezout

O enunciado do problema diz o seguinte:

«Do ponto dado A [...] fóra do circulo BCD tirar a recta AE , de sorte que a parte DE intercepta no circulo seja igual a huma linha dada c » (Bezout, 1825, p. 247).

com base na figura 3.19.

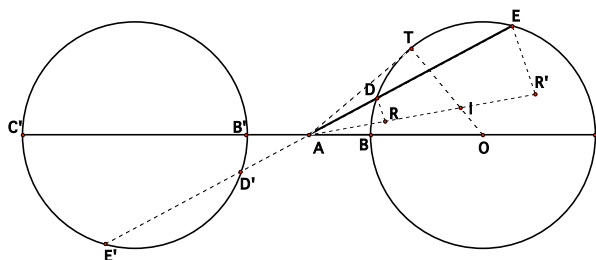


fig. 3.19 – Figura 25 (Bezout, 1825)

Tal como no problema apresentado por D'Alembert nos seus *Opuscules*, o objectivo deste é determinar uma recta que passe no ponto A , de modo que, o segmento da recta que

fica no interior da circunferência tenha um determinado comprimento, c .

Assim como D'Alembert, Bezout, para achar a recta pretendida, determina as partes da recta entre o ponto A e a circunferência, as partes determinadas por Rivara na resolução do seu problema.

Bezout considera $\overline{DE} = c$, $\overline{AD} = x$, $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC} = b$ (Bezout, 1825, pp. 248-9). Repare-se que para Bezout, a corda $[DE]$ corresponde a c enquanto para Rivara corresponde a $2c$ e para D'Alembert corresponde a f .

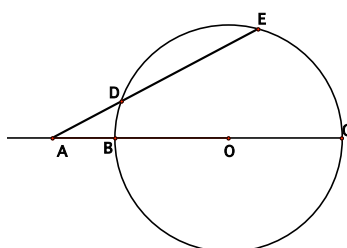


fig.3.20 – Figura 25 (Bezout, 1825)

Usando, tal como D'Alembert, o corolário da proposição XXXVI do Livro Terceiro dos *Elementos de Euclides*⁵⁴, o autor dos *Elementos de Analyse* obtém $\overline{AE} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$, ou

seja, $(x + c)x = ab$ e as suas soluções $x = -\frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$ ou $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$.

Bezout interpreta $x = -\frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$ como \overline{AD} , referindo que este valor de x é o que satisfaz o problema “actual” (Bezout, 1825, p. 148), ou seja, o problema que corresponde à circunferência de diâmetro $[BC]$, enquanto $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$ corresponde à circunferência de diâmetro $[B'C']$.

As construções geométricas das soluções que Bezout apresenta, mostram isso mesmo. Estas serão apresentadas em seguida, complementadas com alguns elementos geométricos que não compõem a figura original (de Bezout) mas que permitirão uma melhor compreensão

⁵⁴ Ver nota de rodapé n° 43.

do descrito e que resultam da interpretação do trabalho do matemático francês.

Também em Bézout se vê o recurso à geometria para comprovar as soluções algébricas encontradas.

Bezout começa por construir $x = -\frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$, traçando a recta tangente à circunferência AT e o raio $[TO]$ (1825, p. 243).

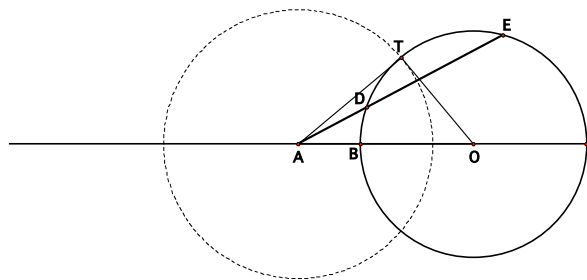


fig. 3.21

Para determinar o ponto de tangência T pode construir-se uma circunferência de centro A e raio $\sqrt{AO^2 - r^2}$, pois $[TO]$ é perpendicular a $[AT]$.

Considerando $\overline{TI} = \frac{1}{2}c$, Bezout obtém $\overline{AI} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + \overline{AT}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$ (1825, p. 243).

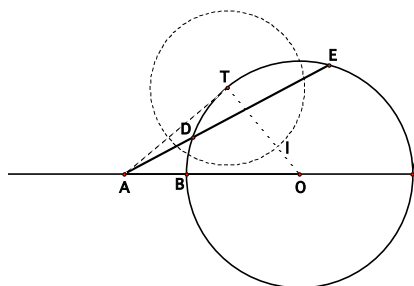


fig. 3.22

De facto, com $\overline{TI} = \frac{1}{2}c$, tem-se, por ser rectângulo em T o triângulo $[ATI]$,

$$\overline{AI} = \sqrt{\overline{TI}^2 + \overline{AT}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}, \text{ como obtém Bezout.}$$

A última igualdade resulta da proposição XXXVI do Livro Terceiro dos *Elementos* de

Euclides⁵⁵, segundo a qual $\overline{AT}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

Como $x = \overline{AD} = -\frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$ com $\overline{AI} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$ e $\overline{TI} = \frac{1}{2}c$, Bezout,

para construir x , determina R tal que $\overline{IR} = \overline{TI}$, de modo que $\overline{AR} = \overline{AI} - \overline{IR} = x$.

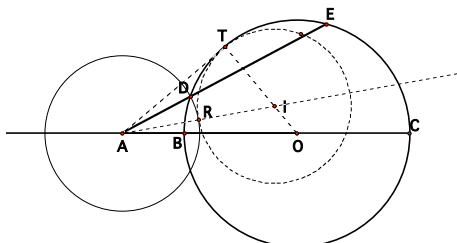


fig. 3.23

Então, o «arco RD descrito do ponto A com o raio AR » determinará, ao intersectar o segmento de recta $[AE]$, o ponto D procurado (Bezout, 1825, p. 248).

Fica assim construído $x = \overline{AD}$.

Em relação ao outro valor de x ,

$$x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}, \quad [3.15]$$

Bezout menciona que este «cahe para a parte contrária a AD » (1825, p. 248) e que é solução dum outro problema, referente à circunferência de diâmetro $[B'C']$.

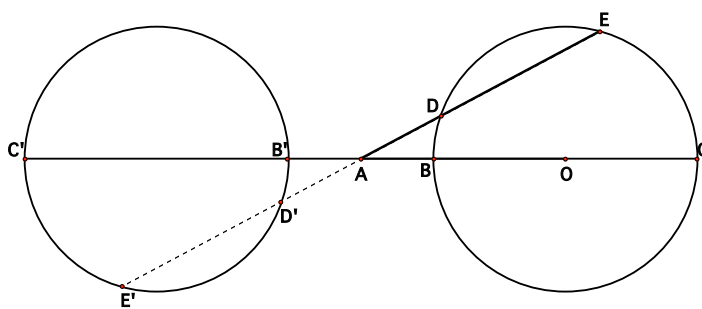


fig. 3.24

⁵⁵ «se de hum ponto qualquer, fora do circulo se tirarem duas linhas rectas, das quaes huma corte o circulo, e a outra o toque; será o rectangulo comprehendido por esta recta, que corta o circulo, e pela parte della, que fica entre o dito ponto, e a circunferência convexa (ver nota de rodapé n° 26) do circulo, igual ao quadrado da tangente» (1768, pp. 124-125).

Para justificar esta afirmação, Bezout usa, e bem, o seguinte argumento: como $-a(-b) = ab$, a equação $x^2 + cx = ab$ resolve tanto ao caso de $a = \overline{AB}$ como de $a = \overline{AB'}$, ou seja, resolve tanto o caso da circunferência de diâmetro $[BC]$ como da circunferência de diâmetro $[B'C']$ e a este último pertence o valor de x negativo [3.15] que corresponde ao segmento $[AE']$, “oposto” a $[AD]$ (Bezout, 1825, p. 248).

Este argumento também foi apresentado por D’Alembert nos seus *Opuscules*, embora o refute apresentando uma série de argumentos, como já vimos.

Bezout, para confirmar que $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$ corresponde a $\overline{AE'}$, constrói geometricamente esta solução.

Sabendo que $\overline{AI} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$ e $\overline{TI} = \frac{1}{2}c$, Bezout determina R' tal que $\overline{IR'} = \overline{IT}$

de modo que $\overline{AR'} = \overline{AI} + \overline{IR'} = \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$.

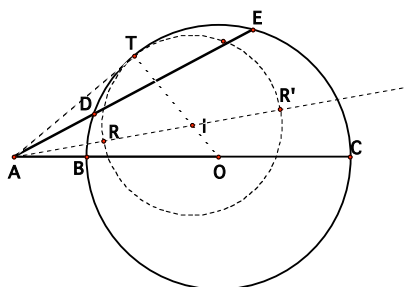


fig. 3.25

E diz Bezout que o arco de circunferência de centro A e raio $[AR']$ «marcará o ponto E' tal, que a parte intercepta $E'D'$ será igual a c » (1825, pp. 248-249).

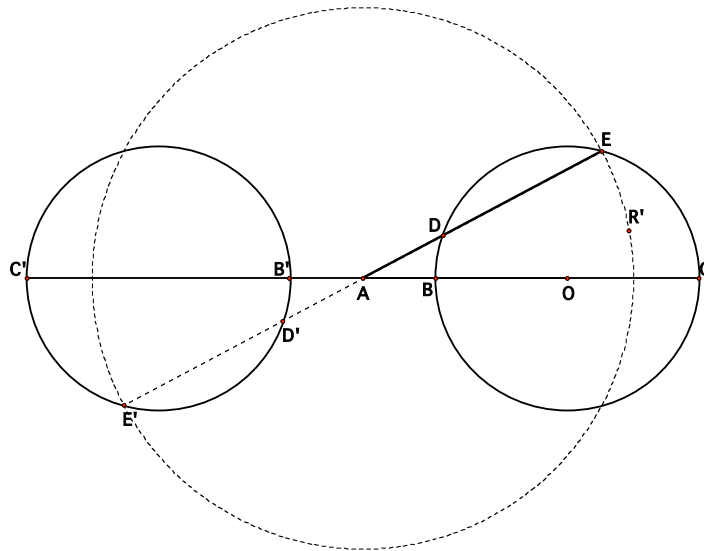


fig. 3.26

E em seguida comenta:

«Como os dois círculos são iguais, e estão situados da mesma maneira, ambas as soluções podem pertencer ao mesmo círculo, de sorte que descrevendo do ponto A com o raio AR' o arco $R'E$, a linha AE também resolverá o problema» (Bezout, 1825, p. 249).

Das palavras de Bezout podemos inferir que como as duas circunferências (de diâmetros $[B'C']$ e $[BC]$ são simétricas (relativamente a um eixo perpendicular a $[C'C]$ em A) e sendo $[AE]$ raio da circunferência de centro A e raio $[AE']$, \overline{AE} também pode ser solução do problema.

Então, ao considerar \overline{AE} como solução do problema, Bezout refere que ambas as soluções podem corresponder à mesma circunferência. As duas soluções a que se refere serão \overline{AD} e \overline{AE} , que correspondem à mesma circunferência de raio $[BO]$ e centro O .

Mas Bezout conclui que:

«das duas soluções que dá o cálculo, a primeira cahe da direita de A , e pertence ao ponto D da circunferencia convexa; a segunda cahe da esquerda, e pertence ao ponto E' da circunferencia concava» (Bezout, 1825, p. 249).

3.2.2. A resposta de Rivara

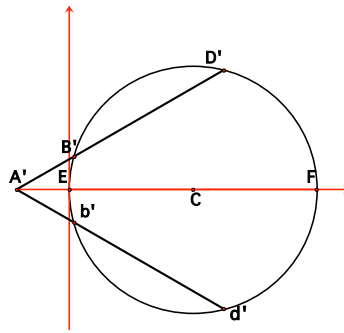


fig. 3.27

Rivara na sua obra refere que Bezout, «*procurando descobrir a linha respectiva á raiz negativa z'' , considera A' origem de $A'E$* », ou seja, considera $\overline{A'E'}$ positiva (Rivara, 1815, p. 12). Para Bezout, $\overline{A'E'}$ (a) e $\overline{A'F'}$ (b) são positivas e as que lhe são “opostas”, relativamente a A' , são negativas ($\overline{A'E''}$ e $\overline{A'F''}$, respectivamente).

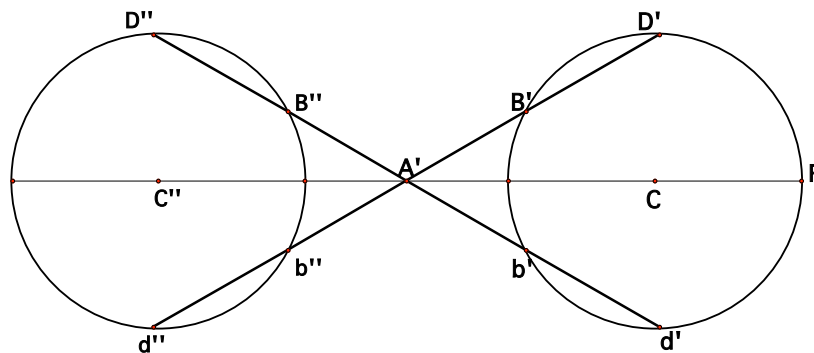


fig. 3.28

Se analisarmos atentamente o ponto 14. da página 12 da obra de Rivara, podemos inferir que o autor procura mostrar que para a e b negativos as soluções negativas $z = c - \sqrt{c^2 + ab}$ e $z = -c - \sqrt{c^2 + ab}$ não correspondem a uma nova circunferência, como afirma Bezout, mas à mesma circunferência de centro C e raio $[CF]$.

Começa por determinar a em função de c a partir da expressão de c determinada em [2.16].

Resolvendo a equação de [2.16] em ordem a a fica

$$c = \frac{\sin \phi}{r} \sqrt{\cot^2 \phi - a(2r + a)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cr = \sin \phi \sqrt{\cot^2 \phi - a(2r + a)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{cr}{\sin \phi \neq 0} = \sqrt{\cot^2 \phi - a(2r+a)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2 r^2}{\sin^2 \phi} - \cot^2 \phi + 2ra + a^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -r \pm \sqrt{r^2 - \frac{r^2 c^2}{\sin^2 \phi} + \cot^2 \phi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -r \pm \frac{\sqrt{r^2 \sin^2 \phi - r^2 c^2 + \sin^2 \phi \cot^2 \phi}}{\sin \phi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -r \pm \frac{\sqrt{r^2 \sin^2 \phi - r^2 c^2 + r^2 \cos^2 \phi}}{\sin \phi} \Leftrightarrow$$

$$\text{cot } \phi = r \frac{\cos \phi}{\sin \phi}$$

$$\Leftrightarrow a = -r \pm \frac{\sqrt{r^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) - r^2 c^2}}{\sin \phi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -r \pm \frac{1}{\sin \phi} \sqrt{r^2 (r^2 - c^2)} \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = r^2$$

$$\Leftrightarrow a = -r \pm \frac{r}{\sin \phi} \sqrt{r^2 - c^2} .$$

Rivara interpreta $a = -r - \frac{r}{\sin \phi} \sqrt{r^2 - c^2}$ como sendo $\overline{\alpha'E}$ e, por conseguinte,

$$b = 2r + a \Leftrightarrow b = r - \frac{r\sqrt{r^2 - c^2}}{\sin \phi} = \overline{\alpha'F} .$$

Em seguida, Rivara analisa o sinal de b comparando $\sqrt{r^2 - c^2}$ com $\sin \phi$.

Recordemos que $\sqrt{r^2 - c^2}$ representa \overline{CS} , $\overline{C\sigma}$ e $\overline{CS'}$. Relembremos também que Rivara, para determinar $\sin \phi$, se baseia num triângulo rectângulo com hipotenusa igual ao raio, triângulo esse semelhante aos triângulos rectângulos $[CS\alpha]$, $[C\sigma F]$ e $[CS'\alpha']$, com $\phi = C\hat{\alpha}S$, $\phi = C\hat{F}\sigma$ e $\phi = C\hat{\alpha}'S'$, respectivamente.

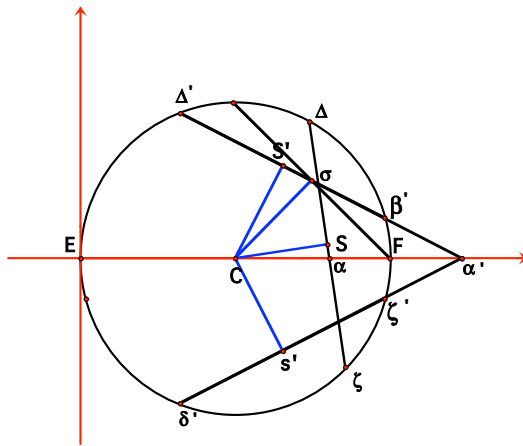


fig. 3.29

Então, no caso de α estar no interior da circunferência, no triângulo rectângulo $[CS\alpha]$ a hipotenusa, $\overline{C\alpha}$, é inferior ao raio da circunferência, pelo que $\overline{CS} = \sqrt{r^2 - c^2} < \sin\phi$.

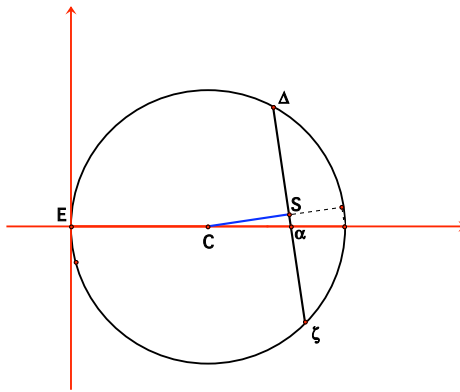


fig. 3.30

No caso de α coincidir com F , ou seja, do triângulo $[CF\sigma]$, a hipotenusa \overline{CF} seria igual ao raio da circunferência, pelo que $\overline{C\sigma} = \sqrt{r^2 - c^2} = \sin\phi$.

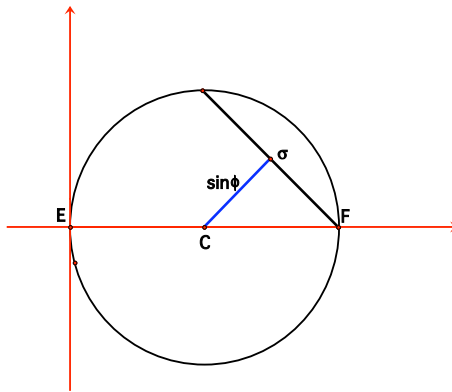


fig. 3.31

No caso de α estar no exterior da circunferência, no triângulo $[CS'\alpha']$ a hipotenusa $\overline{C\alpha'}$ é superior ao raio da circunferência, pelo que $\overline{CS'} = \sqrt{r^2 - c^2} > \sin \phi$.

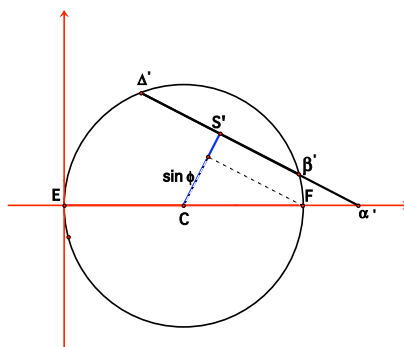


fig. 3.32

No caso de A estar no exterior da circunferência, como $\overline{CS'} = \sqrt{r^2 - c^2} > \sin \phi$, $\frac{r\sqrt{r^2 - c^2}}{\sin \phi} > r$ e a expressão de b , $b = r - \frac{r\sqrt{r^2 - c^2}}{\sin \phi} = \overline{\alpha'F}$, é negativa.

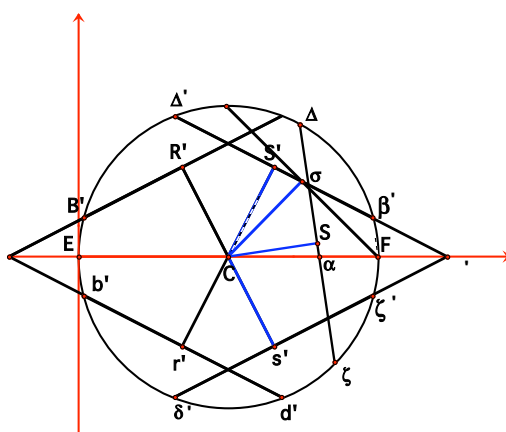


fig. 3.33

Então, a e b negativos representam para Rivara, respectivamente, $\overline{\alpha'E}$ e $\overline{\alpha'F}$ do “sistema transformado” e não necessariamente valores referentes a outra circunferência, como na interpretação de Bezout.

Além disso, o matemático português refere que aos valores negativos de a e b , $a = \frac{-r\sqrt{r^2 - c^2}}{\sin \phi} - r = \overline{\alpha'E}$ e $b = r - \frac{r\sqrt{r^2 - c^2}}{\sin \phi} = \overline{\alpha'F}$, «corresponde $-\sqrt{r^2 - c^2}$ que representa Cs' » (Rivara, 1815, p. 12).

Então, diz Rivara, as soluções negativas do problema equacionado por $z^2 + 2cz = ab$, no caso de se considerarem a e b negativos, serão $z''' = c - \sqrt{c^2 + ab} = \alpha'\zeta'$ e

$$z'' = -c - \sqrt{c^2 + ab} = \alpha' \delta' \text{ (Rivara, 1815, p. 12).}$$

Mas em seguida, Rivara refere o seguinte:

«Pela disposição symetrica de z e z' nas equações $z + z' = 2c$ e $z.z' = ab$, se vê que unicamente podem conseguir-se as linhas pertencentes á circunferência suposta positiva; porque mudando-se z em z' , e reciprocamente, resultão as mesmas funções $z' + z$ e $z'.z$ e consequentemente tem $z + z'$ o só valor $2c$. Mas exprimindo $2c$ a diferença entre z' e z , feita huma semelhante mudança, $z' - z$ recebe o valor $-2c$, e por conseguinte z e z' não serão as raízes de huma mesma equação» (Rivara, 1815, p. 12).

Segundo parece, Rivara considera que as equações $z' - z = 2c$ e $z.z' = ab$, usadas no caso de A estar no exterior da circunferência, apenas permitem determinar as soluções para a e b supostamente positivos (Bézout supõe a e b positivos para o sistema primitivo) porque a expressão que traduz a diferença entre z' e z será $2c$ ou $-2c$, consoante a ordem das raízes.

Vejamos,

No caso de A se encontrar no interior da circunferência:

- no sistema primitivo (a e b positivos)

$$z = c - \sqrt{c^2 - ab} = \overline{AB} \text{ e}$$

$$z' = c + \sqrt{c^2 - ab} = \overline{AD},$$

Então,

$$z.z' = ab \text{ e } z + z' = 2c.$$

- no sistema transformado (a e b negativos)

$$z = c + \sqrt{c^2 - ab} = \overline{\alpha\Delta} \text{ e}$$

$$z' = c - \sqrt{c^2 - ab} = \overline{\alpha\beta},$$

Então,

$$z.z' = ab \text{ e } z + z' = 2c.$$

No entanto, no caso de A se encontrar no exterior da circunferência:

- no sistema primitivo (a e b supostamente positivos, segundo Bezout)

$$z = -c + \sqrt{c^2 + ab} = \overline{A'B'} \text{ e}$$

$$z' = c + \sqrt{c^2 + ab} = \overline{A'D'},$$

Então,

$$z.z' = ab \text{ e } z' - z = 2c.$$

- no sistema transformado (a e b negativos)

$$z = c + \sqrt{c^2 + ab} = \overline{\alpha' \Delta'}$$
 e

$$z' = -c + \sqrt{c^2 + ab} = \overline{\alpha' \beta'}$$
 ,

Então,

$$z \cdot z' = ab \quad \text{e} \quad z' - z = -2c .$$

Reparemos que no caso do sistema primitivo é $z' - z = 2c$ e no transformado a diferença entre z' e z é $z' - z = -2c$.

Este argumento parece ter sido usado por Rivara para mostrar que Bezout não poderia, em sua opinião, determinar as soluções correspondentes à circunferência com a e b negativos através da equação que o matemático francês usa nos seus *Elementos*, no caso de A estar no exterior da circunferência.

Rivara refere que no caso do caso do ponto (A' ou α') se encontrar no exterior da circunferência as soluções são:

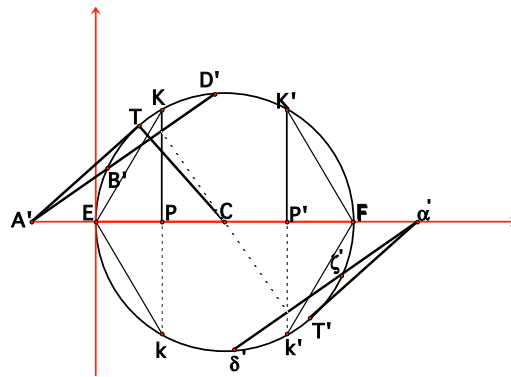


fig. 3.34 – Figura 4 de (Rivara, 1815)

- Se c é positivo, ou seja, se $z' > z$

$$z' = c + \sqrt{c^2 + ab} = \overline{A'D'}$$
 no “sistema primitivo” e

$$z' = c - \sqrt{c^2 + ab} = \overline{\alpha'\zeta'}$$
 no “sistema transformado”.

- Se $c = 0$, ou seja, $z' = z$

$$z' = \sqrt{ab} = \overline{A'T'}$$
 , no “sistema primitivo” e

$$z' = -\sqrt{ab} = \overline{\alpha'T'}$$
 no “sistema transformado”;

- Se c é negativo, ou seja, $z' < z$

$$z' = -c + \sqrt{c^2 + ab} = \overline{A'B'}$$
 no “sistema primitivo” e

$$z' = -c - \sqrt{c^2 + ab} = \overline{\alpha'\delta'}$$
 no “sistema transformado”.

Rivara, para comprovar a sua interpretação, no caso que ainda não analisara (da recta tangente à circunferência), acrescenta que para $c = 0$ tem-se⁵⁶ $m = \frac{r^2}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \sqrt{ab} = \frac{r^2}{m}$.

Como ⁵⁷ $\cot \widehat{CAT} = r \frac{\overline{A'T}}{r} = r \frac{r}{m} = \sqrt{ab}$, então $\sqrt{ab} = \overline{A'T}$.

Logo, $\overline{A'T} = \sqrt{\overline{A'E} \cdot \overline{A'F}}$, que traduz a proposição XXXVI do Livro Terceiro dos *Elementos de Euclides*⁵⁸ ($\overline{A'E} \cdot \overline{A'F} = \overline{A'T}^2$).

3.3. O problema noutros autores:

3.3.1. A interpretação de Anastácio da Cunha

Nos seus *Princípios Mathematicos*, Anastácio da Cunha, no livro XIII dedicado à “geometria não coordenada”, apresenta uma série de problemas, entre os quais se encontra um similar ao problema I de Rivara.

Ao contrário de Rivara, Anastácio da Cunha, tal como D’Alembert e Bezout, aborda o problema na perspectiva da “geometria não coordenada”.

O enunciado do problema nos *Princípios* é o seguinte:

«Em hum circulo dado ABC inscrever huma recta dada BD [menor que o diametro] de sorte que produzida passe por hum ponto E » (Anastácio da Cunha, 1790, pp. 163).

Este baseia-se na figura seguinte:

⁵⁶ No caso de A pertencer ao exterior da circunferência, $m^2 = \frac{r^4 - r^2 c^2}{c^2 + ab}$.

⁵⁷ $\cot \widehat{CAT} = r \frac{\cos \widehat{CAT}}{\sin \widehat{CAT}} = r \frac{r}{m} = r \frac{\overline{A'T}}{r}$.

⁵⁸ Na proposição XXXVI do terceiro livro dos *Elementos* de Euclides pode ler-se: «se de hum ponto qualquer, fora de hum circulo se tirarem duas linhas rectas, das quaes huma corte o circulo e a outra o toque; será o rectangulo comprehendido por toda a recta, que corta o circulo, e pela parte della, que fica entre o dito ponto, e a circunferência convexa do circulo, igual ao quadrado da tangente» (Euclides, 1768, pp. 124-125).

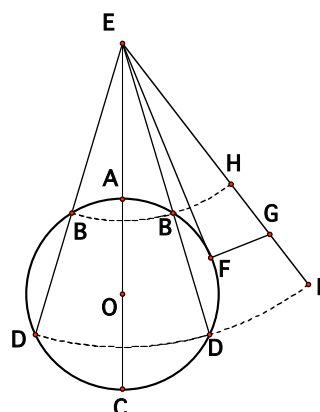


fig. 3.35 – Figura de (Anastácio da Cunha, 1790, Livro XIII - problema VII)

Tal como no problema apresentado por D'Alembert nos seus *Opuscules* e por Bezout nos seus *Elementos de Álgebra*, o objectivo é traçar uma recta que passe no ponto E , de modo que, o segmento da recta que fica no interior da circunferência tenha um determinado comprimento, c .

Assim como D'Alembert e Bezout, Anastácio da Cunha para achar a recta pretendida, determina as partes da recta entre o ponto A e a circunferência, as partes determinadas por Rivara na resolução do seu problema.

No entanto, relativamente à posição do ponto E , tanto nos *Principios Mathematicos de Anastácio da Cunha*, como nos *Elementos de Álgebra* de Bezout é resolvido apenas o caso do ponto pertencente ao exterior da circunferência, enquanto nos seus *Opuscules*, D'Alembert faz também referência ao caso do ponto pertencer ao interior da circunferência.

Anastácio da Cunha considera $\overline{BD} = c$, $\overline{EB} = x$, $\overline{EC} = a$ e $\overline{EA} = b$ (1790, p. 163). Repare-se que para o matemático português, a corda $[BD]$ corresponde a c tal como para Bezout, enquanto para D'Alembert corresponde a f e para Rivara corresponde a $2c$.

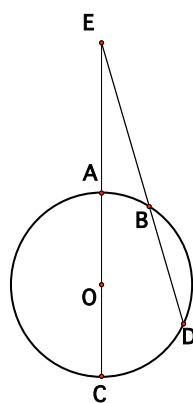


fig. 3.36

Anastácio da Cunha apresenta a equação que traduz o problema, $x(x+c) = ab$, que resulta da aplicação do corolário da proposição XXXVI do Livro Terceiro dos *Elementos* de Euclides⁵⁹ e cujas raízes são $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + ab\right)}$.

Relativamente à interpretação das soluções, Anastácio da Cunha, tal como D'Alembert, considera que os valores de x correspondem a \overline{EB} e \overline{ED} (Anastácio da Cunha, 1790, p. 163) e não toma $x+c$ como \overline{ED} , quando x representa \overline{EB} .

No entanto, na sua interpretação, o matemático português, contrariamente a D'Alembert, alerta que os valores obtidos são

«certos na quantidade, que são EB e ED ; mas errados nos sinais, pois não fazem para partes oppostas como o calculo indica; deveria dar $\sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + ab\right)} \pm \frac{1}{2}c$ » (Anastácio da Cunha, 1790, p. 163).

Então, para Anastácio da Cunha, os valores obtidos são os de \overline{EB} e \overline{ED} , mas em valor absoluto, ou seja,

$$\overline{EB} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + ab\right)} - \frac{1}{2}c \text{ e } \overline{ED} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + ab\right)} + \frac{1}{2}c, \quad [3.16]$$

uma vez que segmentos de uma mesma recta que estão do mesmo "lado" devem ter o mesmo sinal. E os valores de [3.16] coincidem com a interpretação de Rivara.

Depois da sua interpretação das soluções obtidas, Anastácio da Cunha, constrói $\sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + ab\right)} \pm \frac{1}{2}c$, o que demonstra que também Anastácio da Cunha recorre à geometria para comprovar os resultados encontrados algebricamente.

O autor dos *Princípios* começa por construir a tangente EF

⁵⁹ Ver nota de rodapé n.º 43.

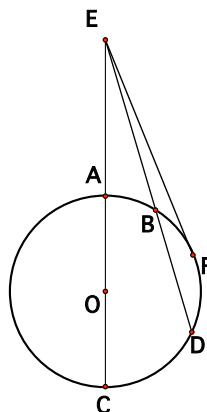


fig. 3.37

de tal modo que $\overline{EF}^2 = ab$ (proposição XXXVI do Livro Terceiro dos *Elementos* de Euclides)⁶⁰.

Em seguida, constrói o segmento perpendicular a EF , $[FG]$ de tal modo que

$$\overline{FG} = \frac{1}{2}c.$$

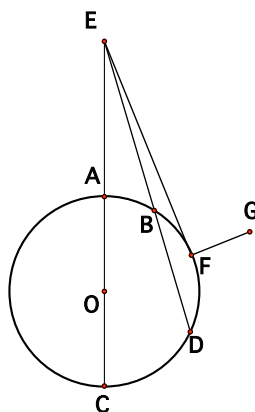


fig. 3.38

Por fim, é construída EG , sendo $\overline{EG} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + ab\right)}$, a hipotenusa do triângulo rectângulo $[EFG]$.

⁶⁰ Ver nota de rodapé n.º 58.

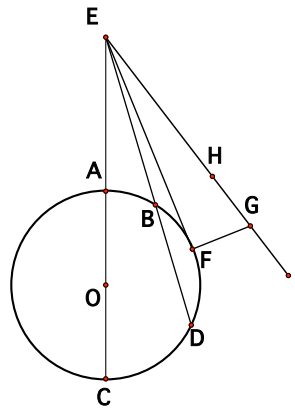


fig. 3.39

Os pontos I e H da recta EG são tais que $\overline{GH} = \overline{GI} = \frac{1}{2}c$.

Então,

$$\overline{EH} = \overline{EG} - \overline{GH} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + ab\right)} - \frac{1}{2}c = \overline{EB}$$

e

$$\overline{EI} = \overline{EG} + \overline{GI} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + ab\right)} + \frac{1}{2}c = \overline{ED}.$$

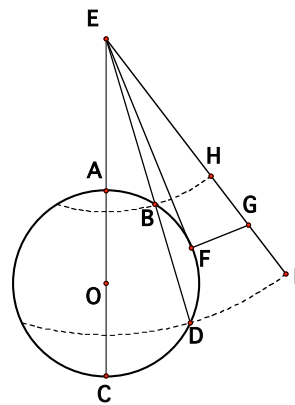


fig. 3.40

Ficam assim construídas \overline{EB} e \overline{ED} .

3.3.2. A interpretação de Lacroix

No seu *Traité Élémentaire*, Lacroix apresenta um exemplo similar ao de Rivara. Aquele,

ao contrário de D'Alembert, Bezout e Anastácio da Cunha, abordou o problema no campo da "geometria coordenada", tal como Rivara, considerando no entanto, como origem do referencial cartesiano, o centro da circunferência.

Tal como já foi referido no segundo capítulo, inicialmente Lacroix pretendia encontrar as coordenadas dos pontos de intersecção de uma recta com uma circunferência. No entanto, segundo o próprio, para chegar a resultados mais simples, considera como incógnita a distância dum ponto a um dos pontos de intersecção da recta com a circunferência, ou seja, determinar as partes da recta, tal como faz Rivara.

No problema Lacroix considera, primeiramente, uma recta que passa num ponto qualquer de coordenadas $(\alpha; \beta)$ e depois, um caso particular, que coincide com o estudado por Rivara, em que o ponto pertence ao eixo das abcissas. (Lacroix, 1807, pp. 146-150).

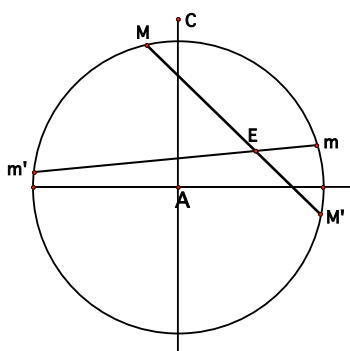


fig. 3.41 – Figura 44 de (Lacroix, 1807)

Comparemos a resolução do problema nos dois autores:

Segundo Lacroix (1807, p. 146-150)

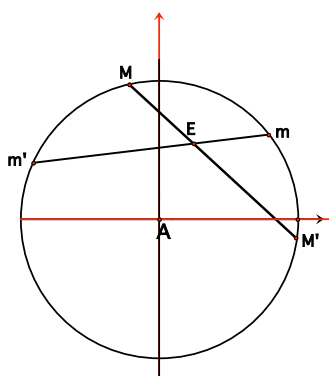


fig. 3.42

Sejam $E(\alpha, \beta)$ e $M(x, y)$;

e as equações

Segundo Rivara (1815, p. 7)

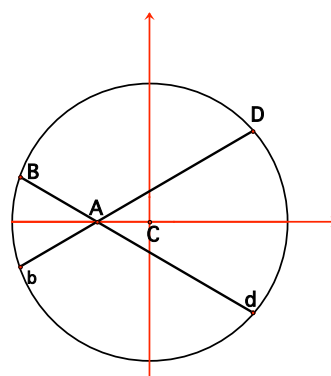


fig. 3.43

Sejam $A(\alpha, 0)$ e $B(u, y)$;

e as equações

da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$;

da recta $y - \beta = a(x - \alpha)$ (a o valor da tangente considerando o raio igual a 1).

A distância, z , de E a M é

$$z = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}.$$

Substituindo $y - \beta$ por $a(x - \alpha)$ fica

$$z^2 = (x - \alpha)^2 + a^2(x - \alpha)^2 \quad \text{da qual}$$

resultam

$$x = \alpha + \frac{z}{\sqrt{1 + a^2}} \text{ e}$$

$$y = \frac{az}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Substituindo estes dois valores em $x^2 + y^2 = r^2$ resulta a equação do segundo grau

$$z^2 + \frac{2(\alpha + a\beta)}{\sqrt{1 + a^2}}z + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0.$$

As suas raízes são

$$z = \frac{-(\alpha + \beta a) + \sqrt{r^2(1 + a^2) - (\beta - a\alpha)^2}}{\sqrt{1 + a^2}}$$

e

$$z = \frac{-(\alpha + \beta a) - \sqrt{r^2(1 + a^2) - (\beta - a\alpha)^2}}{\sqrt{1 + a^2}},$$

que correspondem, respectivamente, a \overline{EM} e $\overline{EM'}$ (Lacroix, 1807, p. 149).

da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$;

da recta $y = \frac{m}{r}(u - \alpha)$ (m o valor da tangente considerando o raio igual a r).

A distância, z , de A a B é

$$z = \sqrt{(u - \alpha)^2 + y^2}.$$

Substituindo y por $\frac{m}{r}(u - \alpha)$ fica

$$z^2 = (u - \alpha)^2 + \frac{m^2}{r^2}(u - \alpha)^2 \quad \text{da qual}$$

resultam $u = \alpha + \frac{zr}{\sqrt{r^2 + m^2}}$ e

$$y = \frac{mz}{\sqrt{r^2 + m^2}}.$$

Substituindo estes valores em $x^2 + y^2 = r^2$ resulta a equação do segundo grau

$$z^2 + \frac{2r\alpha}{\sqrt{r^2 + m^2}}z + (\alpha^2 - r^2) = 0.$$

As suas raízes são

$$z = \frac{-\alpha r + \sqrt{r^4 + m^2(r^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}$$

e

$$z = \frac{-\alpha r - \sqrt{r^4 + m^2(r^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [3.18]$$

que correspondem, respectivamente, a \overline{AB} e \overline{Ad} , no caso de A estar no interior da circunferência e correspondem a $\overline{A'b'}$ e $\overline{A'd'}$, no caso de A estar no exterior da circunferência, tal como foi visto

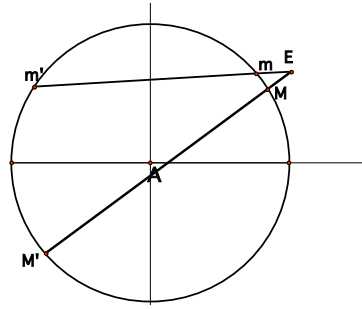


fig. 3.44

Lacroix, refere o caso particular de o ponto E estar sobre o eixo das abscissas, que é na realidade a situação descrita por Rivara. Neste caso, as coordenadas do ponto E são $(\alpha, 0)$ e as raízes

$$z = \frac{-\alpha + \sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}} \text{ e}$$

$$z = \frac{-\alpha - \sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}}, \quad [3.17]$$

exactamente iguais às de Rivara se o raio por ele considerado fosse 1.

anteriormente (comparar [2.13] e [2.14] com [2.18]).

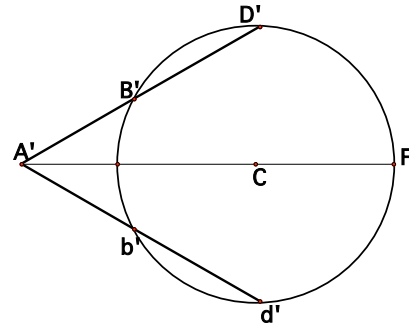


fig. 3.45

Vejamos que as raízes obtidas em [3.18] e em [3.17] são iguais.

Como para Lacroix o valor da tangente a é determinado considerando uma circunferência de raio igual a 1 (Lacroix, 1807, p. 137) e para Rivara o valor da tangente m é determinado considerando uma circunferência de raio r , então, $a = \frac{m}{r}$.

Substituindo na primeira das duas raízes obtidas em [3.17], a por $\frac{m}{r}$ vem que

$$z = \frac{-\alpha + \sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-\alpha + \sqrt{r^2\left(1 + \frac{m^2}{r^2}\right) - \frac{m^2}{r^2}\alpha^2}}{\sqrt{1 + \frac{m^2}{r^2}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-\frac{\alpha r}{r} + \sqrt{\frac{r^2}{r^2}(r^2 + m^2) - \frac{m^2}{r^2}\alpha^2}}{\sqrt{\frac{r^2 + m^2}{r^2}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-\alpha r + \sqrt{r^2(r^2 + m^2) - m^2\alpha^2}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-\alpha r + \sqrt{r^4 + m^2(r^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \text{ a primeira das duas raízes de [3.18].}$$

Da mesma forma se mostraria a igualdade entre a segunda raiz de [3.17] e a segunda raiz de [3.18].

Relativamente ao caso de E se encontrar no exterior da circunferência, Lacroix refere que as duas raízes da equação que traduz o problema têm o mesmo sinal, uma vez que, o último termo da equação, $\alpha^2 + \beta^2 - r^2$, representa o produto das suas duas raízes e é positivo (Lacroix, pp. 148-149). Isto porque $\alpha^2 + \beta^2$ é igual ao quadrado da distância do ponto E ao centro da circunferência (A) que é maior que r^2 .

No caso de E se encontrar no interior da circunferência, acrescenta Lacroix que $\alpha^2 + \beta^2 < r^2$, pelo que, as duas raízes da equação têm sinais contrários (Lacroix, p. 149).

O mesmo pode ser constatado em relação ao problema em Rivara. No caso do ponto A pertencer ao interior da circunferência, o último termo da equação é $\alpha^2 - r^2$ (ou $-a(2r - a)$, se considerarmos a equação no caso da origem das coordenadas ser E) que é negativo e as soluções têm sinais contrários e no caso de A pertencer ao exterior da circunferência, o último termo é $\alpha^2 - r^2$ (ou $a(2r + a)$), que é positivo e as soluções têm o mesmo sinal, o que coincide com as conclusões de Lacroix.

3.4. Um caso particular

3.4.1. O caso em D'Alembert

D'Alembert, nos seus *Opuscles*, apresenta um outro problema para mostrar uma dificuldade, segundo o autor, do mesmo género da exposta anteriormente relativamente à

interpretação geométrica das quantidades negativas. É o caso particular do problema estudado em Rivara em que o ponto A pertence à circunferência (D'Alembert, 1780, p.274).

Neste, D'Alembert usa as coordenadas, o que não se verifica no primeiro problema dos *Opuscules* anteriormente analisado neste trabalho.

O problema tem por base a figura seguinte:

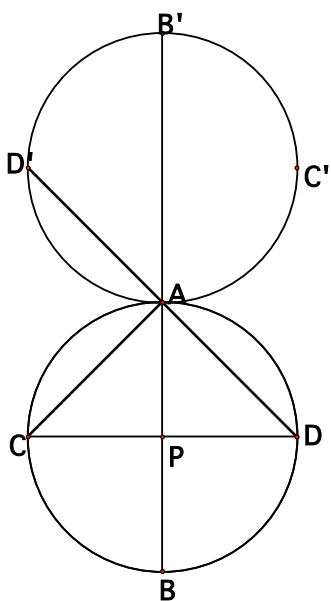


fig. 3.46 – figura 50 de (D'Alembert, 1780)

D'Alembert considera x a abscissa dos pontos de uma circunferência, tomada depois do «sommel»⁶¹ (o ponto A), $2a$ o seu diâmetro e z o comprimento das cordas dos arcos correspondentes a x , \overline{AC} e \overline{AD} .

⁶¹ *Sommel* (Zénite) é, em geral, o ponto mais elevado de uma figura. *Sommel* (Zénite) de uma curva, é a extremidade do eixo de uma curva que tem duas partes iguais e similarmente situadas em relação ao seu eixo; é o ponto onde uma curva é intersectada pelo seu eixo ou seu diâmetro. Assim, uma curva tem “*Sommets*” tanto sobre o mesmo eixo como sobre o mesmo diâmetro porque há pontos onde ela é intersectada pelo eixo ou pelo diâmetro (*Encyclopédie*, art. *Sommel*, p. 336).

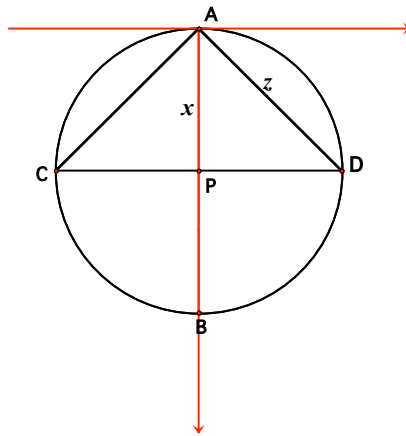


fig. 3.47

O matemático francês apresenta a equação que traduz o problema $z^2 = 2ax$ e respectivas soluções $z = \pm\sqrt{(2ax)}$ (D'Alembert, 1780, p. 274).

A equação $z^2 = 2ax$ resulta da semelhança dos triângulos $[APD]$ e $[ABD]$.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}, \text{ ou seja, } \frac{z}{2a} = \frac{x}{z} \Leftrightarrow z^2 = 2ax.$$

D'Alembert apresenta a interpretação geométrica da solução negativa $-\sqrt{(2ax)}$ que lhe parece mais plausível. Na sua opinião, $-\sqrt{2ax}$ corresponderá ao segmento de recta $[AC]$ e $\sqrt{(2ax)}$ a $[AD]$, sublinhando que os dois segmentos de recta se situam em “lados opostos” relativamente ao diâmetro. Contudo, diz que as duas cordas $[AC]$ e $[AD]$ não são segmentos com “sentidos opostos” e mesmo quando $x = 2a$, elas coincidem (D'Alembert, 1780, p. 274) e, portanto, não são opostas.

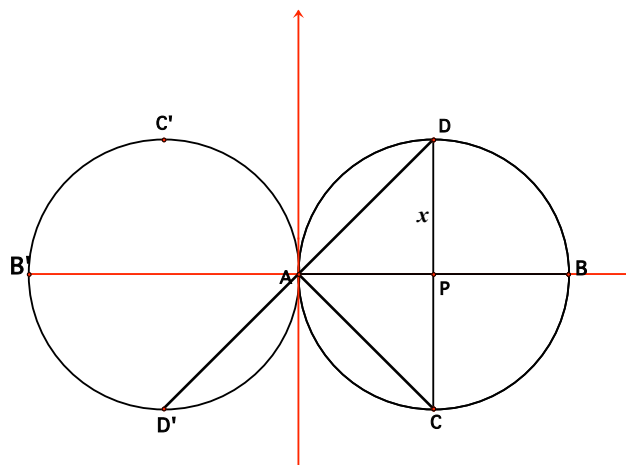


fig. 3.48

Na sequência destas dúvidas, D'Alembert levanta a questão retórica: não seria a raiz $-\sqrt{(2ax)}$ correspondente à circunferência de diâmetro $[AB']$ e não à de diâmetro $[AB]$? E responde que neste caso, seriam \overline{AD} e \overline{AD}' as soluções (positiva e negativa, respectivamente) correspondentes a dois segmentos de recta com “sentidos opostos” (1780, p. 275).

No entanto, o matemático francês refuta tal interpretação: 1.º- refere que \overline{AD} e \overline{AD}' correspondem a duas circunferências distintas o que, na opinião de D'Alembert, é contrário ao que sugere o problema; 2.º- refere que sendo $-x$ as abcissas da circunferência à qual corresponde \overline{AD}' , \overline{AD} e \overline{AD}' correspondem a abcissas simétricas (positiva e negativa, respectivamente) e como $\overline{AD}' = -\sqrt{2ax}$ e x é negativa, $-\sqrt{2ax}$ seria, segundo palavras de D'Alembert, imaginário ($-\sqrt{-2ax}$) (D'Alembert, 1780, p.275).

Relativamente ao segundo argumento apresentado por D'Alembert, $-\sqrt{2ax}$ não representa, de facto, um número imaginário, uma vez que, o teorema euclideano⁶², usado para deduzir a equação $z^2 = 2ax$, só é válido para valores absolutos e portanto na situação em apreço é usado $|x|$. Quanto ao primeiro argumento, como $2ax = 2a|-x|$, a equação $z^2 = 2ax$ traduz tanto o problema referente à circunferência de raio $[AB]$, como de raio $[AB']$.

D'Alembert conclui voltando a referir que lhe parece «*que la corde $-\sqrt{2ax}$ doit être représentée par AC, quoique AC & AD ne soient pas opposés en ligne droite*»⁶³ (D'Alembert, 1780, p. 275).

3.4.2. A resposta de Rivara

Na última parte do seu Problema I, Rivara propõem-se responder a esta dúvida, que D'Alembert não consegue esclarecer nos seus *Opuscules*.

⁶² Proposição XIII do Livro sexto dos *Elementos de Euclides*.

⁶³ «que a corda $-\sqrt{2ax}$ deve ser representada por AC, desde que AC & AD não sejam opostas em linha recta»

Antes de analisarmos a resposta de Rivara, apresenta-se em seguida um esquema comparativo da notação usada por ambos para facilitar a leitura do que em seguida se expõe.

Segundo D'Alembert (1780, p. 274)

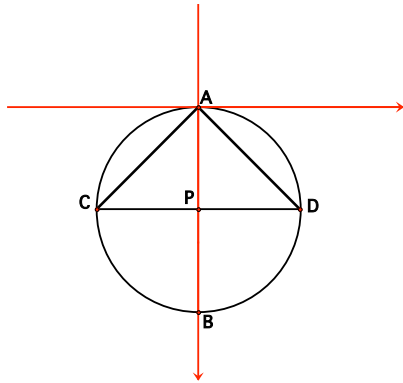


fig. 3.49

Diâmetro: $2a$;

$\overline{AP} = x$;

$\overline{AD} = z$.

Equação: $z^2 = 2ax$

Soluções: $z = \pm\sqrt{2ax}$.

Segundo Rivara (1815, p.13)

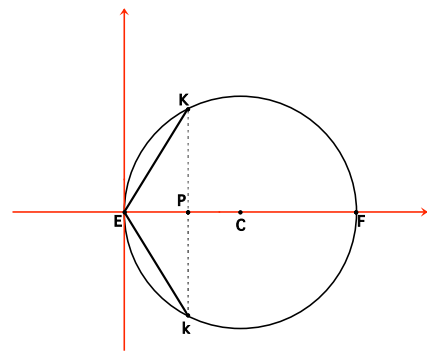


fig. 3.50

Diâmetro: $2c$;

$\overline{EP} = x$;

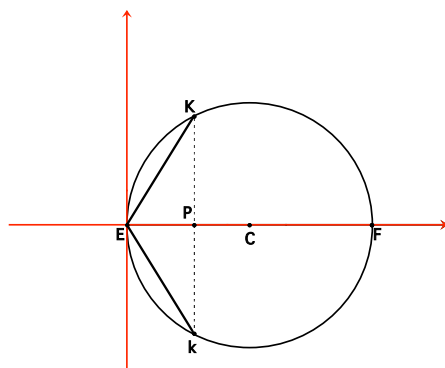
$\overline{EK} = z'$.

Equação: $z'^2 = 2rx'$

Soluções: $z' = \pm\sqrt{2rx'}$.

Rivara para comprovar a interpretação de D'Alembert interpreta, geometricamente, primeiro a raiz positiva $\sqrt{2rx'}$ e depois a raiz negativa $-\sqrt{2rx'}$, no sistema primitivo e no sistema transformado.

Sistema Primitivo



Sistema Transformado

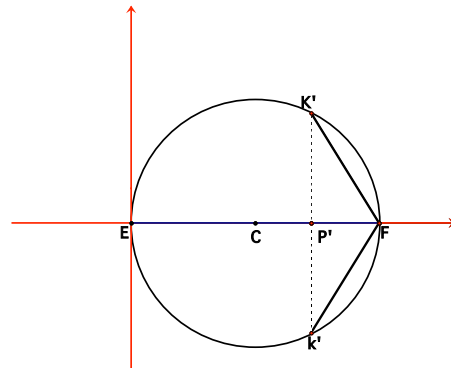


fig.3.51

Lembremos que, no sistema primitivo, no caso de A estar no interior da circunferência, $z + z' = \overline{AB} + \overline{AD} = 2c$ e $z'' + z''' = \overline{Ad} + \overline{Ab} = -2c$.

Em relação a $[Bd]$, temos

$$x = \overline{EP} = a - \frac{rz''}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [3.19]$$

e

$$z'' = \overline{Ad} = \frac{-r(r-a) - \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [3.20]$$

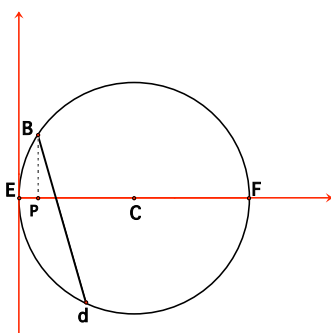


fig.3.52

Então, no caso de A coincidir com E , $\overline{AE} = a = 0$, $z = 0$ e $z'' = \overline{Ek} = -2c$. E substituindo a por 0 em [3.19] e [3.20], vem

$$x = \overline{EP} = \frac{-rz''}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [3.21]$$

e

$$z'' = \overline{EK} = \frac{-2r^2}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad [3.22]$$

tal como refere Rivara (1815, p. 13).

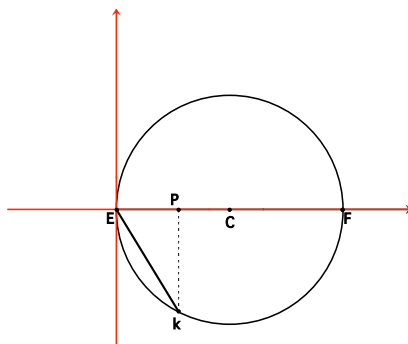


fig. 3.53

De [3.21] e de [3.22] vem que

$$\sqrt{r^2 + m^2} = -\frac{rz''}{x} \quad [3.23]$$

e

$$\sqrt{r^2 + m^2} = \frac{-2r^2}{z'}. \quad [3.24]$$

Então, de [3.23] e [3.24] vem que $\frac{z''}{x} = \frac{2r}{z'}$, ou seja, $z'' = -\sqrt{2rx}' = \overline{Ek}$ (Rivara, 1815, p.13).

Portanto, \overline{Ek} representa a raiz negativa $-\sqrt{2rx}$, no sistema primitivo.

Rivara não apresenta os passos desta dedução. Apresenta apenas $z'' = -\sqrt{2rx} = -2c = \overline{Ek}$.

Em relação a $[bD]$, temos

$$x' = \overline{EP} = a + \frac{rz'}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [3.25]$$

e

$$z' = \overline{AD} = \frac{r(r-a) + \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [3.26]$$

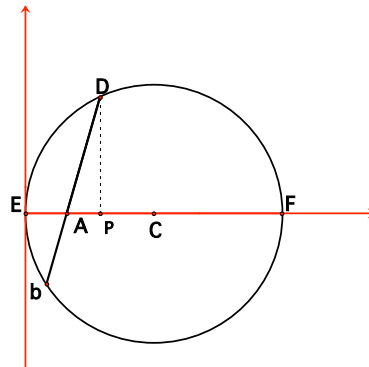


fig. 3.54

Então, no caso de A coincidir com E , $\overline{AE} = a = 0$, $z''' = 0$ e $z' = \overline{EK} = 2c$. E substituindo a por 0 em [3.25] e [3.26], vem

$$x' = \overline{EP} = \frac{rz'}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [3.27]$$

e

$$z' = \overline{EK} = \frac{2r^2}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad [3.28]$$

tal como refere Rivara (1815, p. 13).

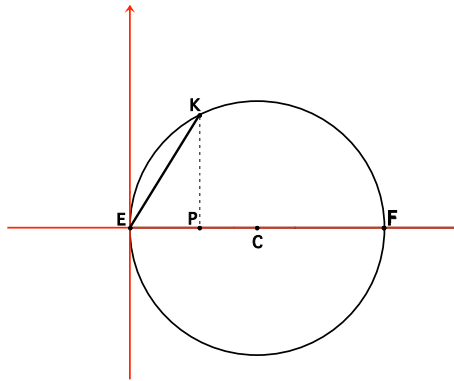


fig. 3.55

De [3.27] e de [3.28] vem que

$$\sqrt{r^2 + m^2} = \frac{rz'}{x'} \quad [3.29]$$

e

$$\sqrt{r^2 + m^2} = \frac{2r^2}{z'}. \quad [3.30]$$

Então, de [3.29] e [3.30] vem que $\frac{z'}{x'} = \frac{2r}{z'}$, ou seja, $z' = \sqrt{2rx'} = \overline{EK}$ (Rivara, 1815,

p.13).

Portanto, \overline{EK} representa a raiz positiva $\sqrt{2rx'}$, no sistema primitivo.

Do mesmo modo, Rivara interpreta as raízes $\pm\sqrt{2rx}$ no sistema transformado.

Lembremos que, no sistema transformado, no caso de α estar no interior da circunferência, $z + z' = \overline{\alpha\Delta} + \overline{\alpha\beta} = 2c$ e $z'' + z''' = \overline{\alpha\beta} + \overline{\alpha\delta} = -2c$.

Em relação a $[\Delta\zeta']$ temos

$$x = \overline{EP'} = 2r - a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [3.31]$$

e

$$z = \overline{\alpha\Delta} = \frac{r(r-a) + \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [3.32]$$

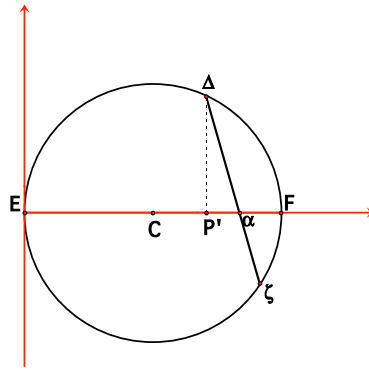


fig. 3.56

Então, no caso de α coincidir com F , $\overline{\alpha F} = a = 0$, $z'' = 0$; $z = \overline{FK'} = 2c$. E substituindo a por 0 em [3.21] e em [3.22] vem

$$x = \overline{EP'} = 2r - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [3.33]$$

e

$$z = \overline{FK'} = \frac{2r^2}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \quad [3.34]$$

tal como refere Rivara (1815, p.13).

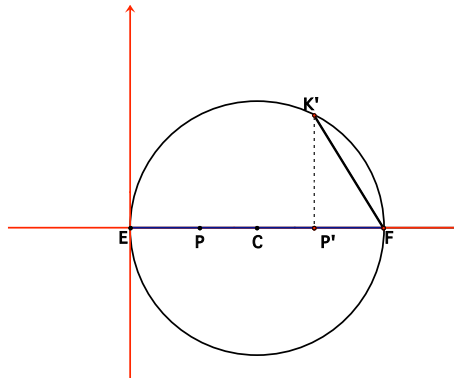


fig.3.57

De [3.33] e [3.34] vem que

$$\sqrt{r^2 + m^2} = \frac{rz}{2r - x} \quad [3.35]$$

e

$$\sqrt{r^2 + m^2} = \frac{2r^2}{z}. \quad [3.36]$$

Então, de [3.35] e [3.36] resulta $\frac{z}{2r - x} = \frac{2r}{z}$, ou seja,

$$z = \sqrt{2r(2r-x)} = 2c = \overline{FK'} \quad [3.37],$$

como refere Rivara (1815, p.13).

Mas $x' = \overline{EP} = \overline{FP}' = 2r - \overline{EP}' = 2r - x$. Então, substituindo $2r - x$ por x' em [3.37] vem que $z = \sqrt{2rx'} = \overline{FK}'$ (Rivara, 1815, p. 13).

Portanto, a raiz positiva $\sqrt{2rx'}$ corresponde a \overline{FK}' no sistema transformado.

Em relação a $[\beta\delta]$ temos

$$x' = \overline{EP}' = 2r - a + \frac{rz''}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad (\text{ou } x = \overline{FP}' = a - \frac{rz''}{\sqrt{r^2 + m^2}}) \quad [3.38]$$

e

$$z'' = \overline{\alpha\delta} = \frac{-r(r-a) - \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [3.39].$$

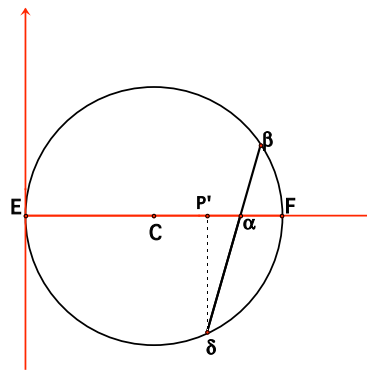


fig. 3.58

Então, no caso de α coincidir com F , $\overline{\alpha F} = a = 0$, $z' = 0$; $z'' = \overline{Fk}' = -2c$. E substituindo a por zero em [3.38] e [3.39], vem

$$x' = \overline{EP}' = 2r - \frac{rz''}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [3.40]$$

e

$$z'' = \overline{Fk}' = -\frac{2r^2}{\sqrt{r^2 + m^2}} \quad [3.41],$$

como refere Rivara (1815, p.13).

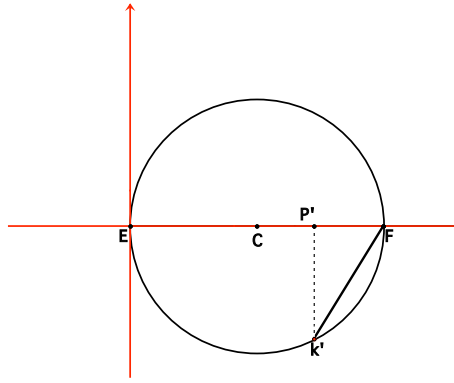


fig. 3.59

De [3.40] e [3.41] vem que

$$\sqrt{r^2 + m^2} = -\frac{rz''}{2r - x'} \quad [3.42]$$

e

$$\sqrt{r^2 + m^2} = -\frac{2r^2}{z''} \quad [3.43].$$

Então, de [3.42] e [3.43] resulta $\frac{z''}{2r - x'} = \frac{2r}{z''}$, ou seja,

$$z'' = -\sqrt{2r(2r - x')} = -2c = \overline{Fk'} \quad [3.44].$$

Mas $x = \overline{EP} = \overline{FP'} = 2r - \overline{EP'} = 2r - x'$. Então, substituindo $2r - x'$ por x em [3.44] vem que $z = -\sqrt{2rx} = \overline{Fk'}$ (Rivara, 1815, p. 13).

Portanto, a raiz negativa $-\sqrt{2rx}$ corresponde a $\overline{Fk'}$ no sistema transformado.

Resumindo, a raiz positiva $\sqrt{2rx}$ corresponde a \overline{EK} no sistema primitivo e a $\overline{FK'}$, no sistema transformado e a negativa $-\sqrt{2rx}$ corresponde a \overline{Ek} no sistema primitivo e a $\overline{Fk'}$ no sistema transformado.

Rivara confirma a interpretação de D'Alembert nos seus *Opuscules*, quanto a este último problema, de que as raízes negativa e positiva se encontram em “lados opostos” do diâmetro $[EF]$ mas não têm “sentidos opostos”. Ambos os autores, consideram \overline{EK} e \overline{Ek} como sendo as raízes positiva e negativa do problema, respectivamente.

Capítulo IV

O problema de Rivara: um caso concreto

Neste capítulo é explorado um caso concreto do problema de Rivara para que a sua interpretação das quantidades geométricas negativas fique mais clara.

4.1. Caso do ponto pertencente à circunferência

4.1.1. Recta Ek

Suponhamos que $m = 4$; $r = 4$ e $a = 0$.

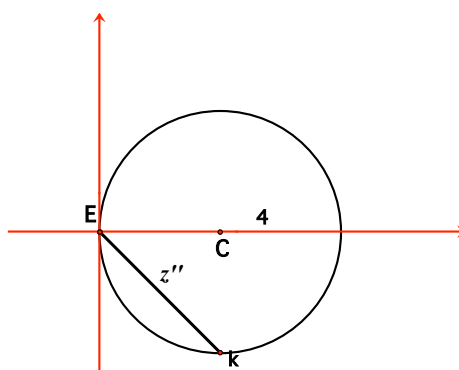


fig 4.1

$$\text{Recta } Bd: y = -x \quad [4.1]$$

$$\text{Circunferência de centro } C(4;0) \text{ e raio } 4: x^2 + y^2 - 8x = 0 \quad [4.2]$$

$$\text{Distância } z: z^2 = x^2 + y^2 \quad [4.3]$$

Determinemos as coordenadas dos pontos de intersecção da recta de [4.1] com a circunferência de [4.2].

Substituindo y por $-x$ em [4.2], obtém-se $2x^2 - 8x = 0$ cujas raízes são

$$x = 0 \vee x = 4 \quad [4.4].$$

Substituindo, em [4.1], x pelos valores encontrados em [4.4], fica $y = 0 \vee y = -4$.

Então,

- as coordenadas do ponto B são

$$x = 0 \text{ e } y = 0.$$

O valor de z é 0, ou seja, $\overline{AB} = 0$.

- as coordenadas do ponto d são

$$x = 4 \text{ e } y = -4.$$

O valor de z é determinado substituindo, em [4.3], x e y pelas coordenadas de d .

$$z^2 = y^2 + x^2 \Leftrightarrow z = \pm 4\sqrt{2}.$$

Considerando os valores negativos abaixo do eixo das abscissas toma-se, tal como Rivara, \overline{Ad} negativo.

$$\text{Logo } \overline{Ad} = -4\sqrt{2}.$$

4.1.2. Recta EK

Continuemos a supor que $m = 4$; $r = 4$ e $a = 0$.

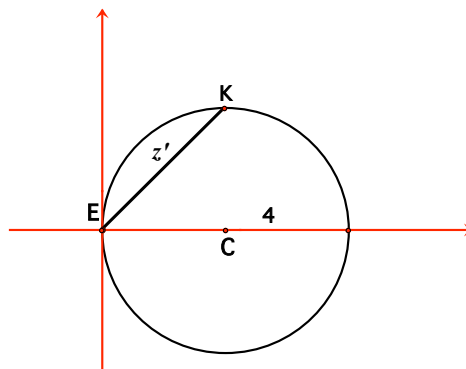


fig 4.2

$$\text{Recta } bD: y = x \quad [4.5]$$

$$\text{Circunferência de centro } C(4;0) \text{ e raio } 4: x^2 + y^2 - 8x = 0 \quad [4.6]$$

$$\text{Distância } z: z^2 = x^2 + y^2 \quad [4.7]$$

Determinemos as coordenadas dos pontos de intersecção da recta de [4.5] com a circunferência de [4.6].

Substituindo y por x em [4.6], obtém-se $2x^2 - 8x = 0$ cujas raízes são

$$x = 0 \vee x = 4 \quad [4.8].$$

Substituindo, em [4.5], x pelos valores encontrados em [4.8], fica $y = 0 \vee y = 4$.

Então,

- As coordenadas do ponto b são

$$x = 0 \text{ e } y = 0.$$

O valor de z é 0, ou seja, $\overline{Ab} = 0$.

- As coordenadas do ponto D são

$$x = 4 \text{ e } y = 4.$$

O valor de z é determinado substituindo em [4.7] x e y pelas coordenadas de D :

$$z^2 = y^2 + x^2 \Leftrightarrow z = \pm 4\sqrt{2}.$$

Considerando os valores positivos acima do eixo das abcissas toma-se, tal como Rivara, \overline{AD} positivo.

$$\text{Logo, } \overline{AD} = 4\sqrt{2}.$$

Portanto, \overline{AD} e \overline{Ad} correspondem a segmentos que se encontram em “lados opostos” do diâmetro $[EF]$ e têm sinais contrários.

4.2. Caso do ponto pertencente ao interior da circunferência

Suponhamos que $m = 4$; $r = 4$ e $a = 3$.

4.2.1. Recta Bd

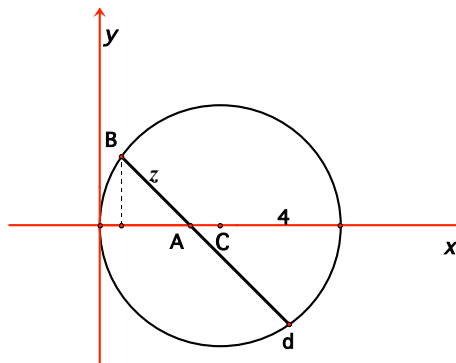


fig. 4.1

$$\text{Recta } Bd: y = 3 - x \quad [4.9]$$

$$\text{Circunferência de centro } C(4; 0) \text{ e raio } 4: x^2 + y^2 - 8x = 0 \quad [4.10]$$

$$\text{Distância } z: z^2 = (x - 3)^2 + y^2 \quad [4.11]$$

Determinemos as coordenadas dos pontos de intersecção da recta de [4.9] com a circunferência de [4.10].

Substituindo y por $3-x$ em [4.10], obtém-se $2x^2 - 14x + 9 = 0$ cujas raízes são

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{31}}{2} \quad [4.12].$$

Substituindo x por $\frac{7 \pm \sqrt{31}}{2}$ em [4.9] fica $y = \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{2}$.

Então,

• as coordenadas do ponto B são

$$x = \frac{7 - \sqrt{31}}{2} \text{ e } y = \frac{-1 + \sqrt{31}}{2}.$$

Os valores de z são determinados substituindo, em [4.11], x e y pelas coordenadas de B :

$$z^2 = y^2 + (3-x)^2 \Leftrightarrow$$

$$z^2 = 2(3-x)^2 \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\sqrt{2}(3-x) \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\sqrt{2}\left(\frac{-1 + \sqrt{31}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\frac{\sqrt{31}-1}{\sqrt{2}} \quad [4.13].$$

• as coordenadas do ponto d são

$$x = \frac{7 + \sqrt{31}}{2} \text{ e } y = \frac{-1 - \sqrt{31}}{2}.$$

Os valores de z são determinados substituindo, em [4.11], x e y pelas coordenadas de d :

$$z^2 = y^2 + (3-x)^2 \Leftrightarrow$$

$$z^2 = 2(3-x)^2 \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\sqrt{2}(x-3) \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\sqrt{2}\left(\frac{1 + \sqrt{31}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\frac{\sqrt{31}+1}{\sqrt{2}} \quad [4.14].$$

Considerando os valores positivos acima do eixo das abcissas e os negativos abaixo toma-se, tal como Rivara, \overline{AB} positivo e \overline{Ad} negativo.

$$\text{Logo, } \overline{AB} = \frac{-1 + \sqrt{31}}{\sqrt{2}} \text{ e } \overline{Ad} = \frac{-1 - \sqrt{31}}{\sqrt{2}} \quad [4.15].$$

Para confirmarmos que os sinais das duas partes “opostas”, \overline{AB} e \overline{Ad} , são contrários, sigamos os passos da resolução de Rivara.

Substituindo y pela expressão de [4.9] na equação de [4.11], vem

$$z^2 = (x-3)^2 + (x-3)^2 \text{ que resolvida em ordem a } x \text{ dá } x = 3 \pm \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

Substituindo x por $3 \pm \frac{z}{\sqrt{2}}$ em [4.9], fica $y = \mp \frac{z}{\sqrt{2}}$.

• Se $x = 3 - \frac{z}{\sqrt{2}}$ e $y = \frac{z}{\sqrt{2}}$:

Substituindo na equação [4.10] vem

$$\left(3 - \frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8\left(3 - \frac{z}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \frac{2z}{\sqrt{2}} - 15 = 0 \quad [4.16]$$

• Se $x' = 3 + \frac{z}{\sqrt{2}}$ e $y' = -\frac{z}{\sqrt{2}}$:

Substituindo na equação [4.10] vem

$$\left(3 + \frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8\left(3 + \frac{z}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - \frac{2z}{\sqrt{2}} - 15 = 0 \quad [4.17]$$

Como o termo independente das equações [4.16] e [4.17] é negativo (-15), as duas raízes (das duas equações) têm sinais contrários. Isto confirma que as “linhas opostas” \overline{AB} e \overline{Ad} têm sinais contrários.

Resolvendo as duas equações, [4.16] e [4.17], confirmam-se os valores de z já determinados em [4.13] e [4.14].

• Da equação [4.16] resultam

$$z = \frac{-1 - \sqrt{31}}{\sqrt{2}} \vee z = \frac{-1 + \sqrt{31}}{\sqrt{2}}.$$

• Da equação [4.17] resultam,

$$z = \frac{1 + \sqrt{31}}{\sqrt{2}} \vee z = \frac{1 - \sqrt{31}}{\sqrt{2}}.$$

De acordo com a interpretação de Rivara, as soluções do problema são dadas pela equação [4.16], que coincidem com as determinadas em [4.15].

4.2.2. Recta bD

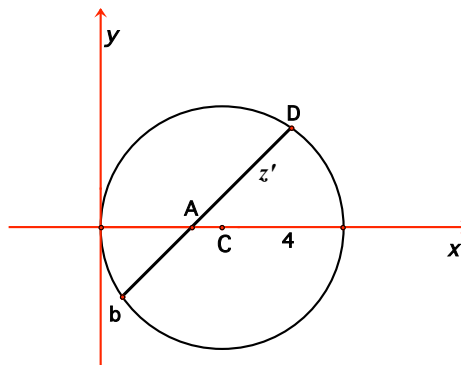


fig 4.2

$$\text{Recta } bD: y = x - 3 \quad [4.18]$$

$$\text{Circunferência de centro } C(4;0) \text{ e raio 4: } x^2 + y^2 - 8x = 0 \quad [4.19]$$

$$\text{Distância } z: z^2 = (x - 3)^2 + y^2 \quad [4.20]$$

Determinemos as coordenadas dos pontos de intersecção da recta de [4.18] com a circunferência de [4.19].

Substituindo y por $x - 3$ em [4.19], obtém-se $2x^2 - 14x + 9 = 0$ cujas soluções são $x = \frac{7 \pm \sqrt{31}}{2}$, iguais às abscissas obtidas em [4.12]. De facto, B e b (assim como d e D) têm abscissas iguais (e ordenadas simétricas).

$$\text{Substituindo } x \text{ por } \frac{7 \pm \sqrt{31}}{2} \text{ em [4.18] fica } y = \frac{1 \pm \sqrt{31}}{2}.$$

Então,

- as coordenadas do ponto b são $x = \frac{7 - \sqrt{31}}{2}$ e $y = \frac{1 - \sqrt{31}}{2}$.

Os valores de z são determinados substituindo, em [4.20], x e y pelas coordenadas de b :

$$\begin{aligned} z^2 &= y^2 + (3 - x)^2 \Leftrightarrow \\ z^2 &= 2(3 - x)^2 \Leftrightarrow \\ z &= \pm\sqrt{2}(3 - x) \Leftrightarrow \\ z &= \pm\sqrt{2}\left(3 - \frac{7 - \sqrt{31}}{2}\right) \Leftrightarrow \\ z &= \pm\frac{\sqrt{31} - 1}{\sqrt{2}} \quad [4.21] \end{aligned}$$

- as coordenadas do ponto D são $x = \frac{7 + \sqrt{31}}{2}$ e $y = \frac{1 + \sqrt{31}}{2}$.

Os valores de z são determinados substituindo, em [4.20], x e y pelas coordenadas de D :

$$\begin{aligned} z^2 &= y^2 + (3 - x)^2 \Leftrightarrow \\ z^2 &= 2(3 - x)^2 \Leftrightarrow \\ z &= \pm\sqrt{2}(x - 3) \Leftrightarrow \\ z &= \pm\sqrt{2}\left(\frac{7 + \sqrt{31}}{2} - 3\right) \Leftrightarrow \\ z &= \pm\frac{\sqrt{31} + 1}{\sqrt{2}} \quad [4.22] \end{aligned}$$

Considerando os valores positivos acima do eixo das abscissas e os valores negativos abaixo, \overline{Ab} é negativo e \overline{AD} é positivo.

$$\text{Logo, } \overline{Ab} = \frac{1 - \sqrt{31}}{\sqrt{2}} \text{ e } \overline{AD} = \frac{1 + \sqrt{31}}{\sqrt{2}} \quad [4.23].$$

Para confirmarmos que os sinais das duas partes “opostas”, \overline{Ab} e \overline{AD} , são contrários, sigamos os passos da resolução de Rivara.

Substituindo y pela expressão de [4.18] na equação de [4.20], vem $z^2 = (x - 3)^2 + (x - 3)^2$ que resolvida em ordem a x , dá $x = 3 \pm \frac{z}{\sqrt{2}}$.

Substituindo x por $x = 3 \pm \frac{z}{\sqrt{2}}$ em [4.18], fica $y = \pm \frac{z}{\sqrt{2}}$.

Então,

<ul style="list-style-type: none"> • Se $x = 3 - \frac{z}{\sqrt{2}}$ e $y = -\frac{z}{\sqrt{2}}$: <p>Substituindo na equação [4.19] vem</p> $\left(3 - \frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8\left(3 - \frac{z}{\sqrt{2}}\right) = 0$ $\Leftrightarrow z^2 + \frac{2z}{\sqrt{2}} - 15 = 0. \quad [4.24]$	<ul style="list-style-type: none"> • Sejam $x' = 3 + \frac{z}{\sqrt{2}}$ e $y' = \frac{z}{\sqrt{2}}$: <p>Substituindo na equação [4.19] vem</p> $\left(3 + \frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8\left(3 + \frac{z}{\sqrt{2}}\right) = 0$ $\Leftrightarrow z^2 - \frac{2z}{\sqrt{2}} - 15 = 0. \quad [4.25]$
--	---

Como o termo independente das equações [4.24] e [4.25], -15 , é negativo, as duas raízes (de ambas as equações) têm sinais contrários. Isto confirma que as “linhas opostas” \overline{Ab} e \overline{AD} têm sinais contrários.

Resolvendo as duas equações, [4.24] e [4.25], confirmam-se os valores de z já encontrados em [4.21] e [4.22].

<ul style="list-style-type: none"> • Da equação [4.24] resultam $z = \frac{-1 - \sqrt{31}}{\sqrt{2}} \vee z = \frac{-1 + \sqrt{31}}{\sqrt{2}}.$	<ul style="list-style-type: none"> • Da equação [4.25] resultam $z = \frac{1 + \sqrt{31}}{\sqrt{2}} \vee z = \frac{1 - \sqrt{31}}{\sqrt{2}}.$
--	--

De acordo com a interpretação de Rivara, as soluções do problema são dadas pela equação [4.25], que coincidem com as determinadas em [4.23].

4.3. Caso do ponto pertencente ao exterior da circunferência

Suponhamos que $m = 4$; $r = 4$ e $a = -1$.

4.3.1. Recta $B'D'$

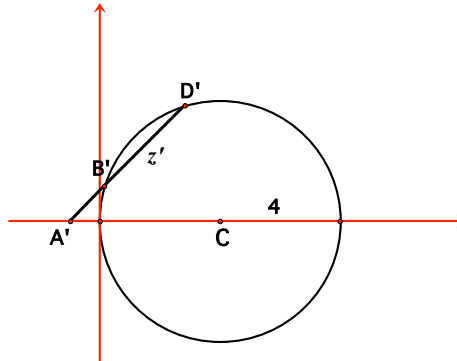


fig. 4.5

$$\text{Recta } B'D': y = x + 1 \quad [4.26]$$

$$\text{Circunferência de centro } C(4;0) \text{ e raio } 4: x^2 + y^2 - 8x = 0 \quad [4.27]$$

$$\text{Distância } z: z^2 = (x + 1)^2 + y^2 \quad [4.28]$$

Determinemos as coordenadas dos pontos de intersecção da recta de [4.26] com a circunferência de [4.27].

Substituindo y por $x + 1$ na equação da circunferência de [4.27], obtém-se $2x^2 - 6x + 1 = 0$ cujas soluções são

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2} \quad [4.29].$$

$$\text{Substituindo } x \text{ por } \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2} \text{ em [4.26], fica } y = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}.$$

Então,

- as coordenadas do ponto B' são

$$x = \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \text{ e } y = \frac{5 - \sqrt{7}}{2}.$$

Os valores de z são determinados substituindo, em [4.28], x e y pelas

- as coordenadas do ponto D' são

$$x = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \text{ e } y = \frac{5 + \sqrt{7}}{2}.$$

Os valores de z são determinados substituindo, em [4.28], x e y pelas

coordenadas de B' :

$$z^2 = y^2 + (x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$z^2 = 2(x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\sqrt{2}(x+1) \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\sqrt{2}\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}+1\right) \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\left(\frac{5-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right) \quad [4.30].$$

coordenadas de D' :

$$z^2 = y^2 + (x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$z^2 = 2(x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\sqrt{2}(x+1) \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\sqrt{2}\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}+1\right) \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\left(\frac{5+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right) \quad [4.31].$$

Considerando os valores positivos acima do eixo das abscissas, toma-se, tal como Rivara, $\overline{A'B'}$ e $\overline{A'D'}$ positivos.

$$\text{Logo, } \overline{A'B'} = \frac{5-\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \text{ e } \overline{A'D'} = \frac{5+\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \quad [4.32].$$

Para confirmarmos que as duas partes $\overline{A'B'}$ e $\overline{A'D'}$, que estão do mesmo “lado” da recta relativamente ao ponto A' , têm o mesmo sinal, sigamos os passos da resolução de Rivara.

Substituindo y pela expressão de [4.26] na equação de [4.28], vem $z^2 = 2(x+1)^2$, que resolvida em ordem a x dá, $x = -1 \pm \frac{z}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Substituindo } x \text{ por } -1 \pm \frac{z}{\sqrt{2}} \text{ em [4.26], fica } y = \pm \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

Então,

$$\bullet \text{ Se } x = -1 + \frac{z}{\sqrt{2}} \text{ e } y = \frac{z}{\sqrt{2}}:$$

Substituindo x e y na equação [4.27]

vem

$$\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-1\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - \frac{10z}{\sqrt{2}} + 9 = 0 \quad [4.33]$$

$$\bullet \text{ Se } x = -1 - \frac{z}{\sqrt{2}} \text{ e } y = -\frac{z}{\sqrt{2}}:$$

Substituindo x e y na equação [4.27]

vem

$$\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+1\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \frac{10z}{\sqrt{2}} + 9 = 0 \quad [4.34]$$

Como o termo independente das equações [4.33] e [4.34] é positivo (+9), as duas soluções (das duas equações), $\overline{A'D'}$ e $\overline{A'B'}$, têm o mesmo sinal.

Resolvendo as equações [4.33] e [4.34], confirmam-se os valores de z referentes à recta $B'D'$ já determinados em [4.30] e [4.31].

<ul style="list-style-type: none"> • Da equação [4.33] resultam $z = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}}.$		<ul style="list-style-type: none"> • Da equação [4.34] resultam $z = \frac{-5 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}}.$
---	--	--

De acordo com a interpretação de Rivara, as soluções do problema são dadas pela equação [4.33], que coincidem com as determinadas em [4.32].

4.3.2. Recta $b'd'$

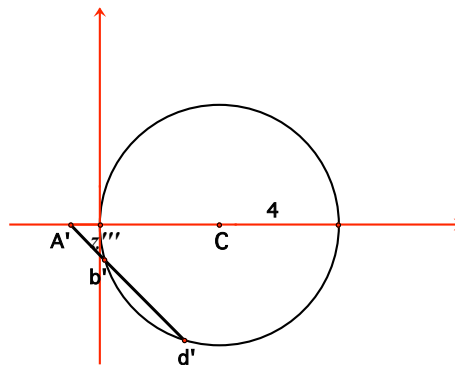


fig 4.6

$$\text{Recta } b'd': y = -x - 1 \quad [4.35]$$

$$\text{Circunferência de centro } C(4;0) \text{ e raio } 4: x^2 + y^2 - 8x = 0. \quad [4.36]$$

$$\text{Distância } z: z^2 = (x+1)^2 + y^2 \quad [4.37]$$

Determinemos as coordenadas dos pontos de intersecção da recta de [4.35] com a circunferência de [4.36].

Substituindo y por $-x - 1$ em [4.36], obtém-se $2x^2 - 6x + 1 = 0$, cujas soluções são

$x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$, iguais às abcissas de [4.29]. De facto, B' e b' (assim como D' e d') têm abcissas iguais (e ordenadas simétricas).

$$\text{Substituindo } x \text{ por } \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2} \text{ em [4.35], fica } y = \frac{-5 \mp \sqrt{7}}{2}.$$

Então,

• as coordenadas do ponto b' são

$$x = \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \text{ e } y = \frac{-5 + \sqrt{7}}{2}.$$

Os valores de z são determinados substituindo, em [4.37], x e y pelas coordenadas de b' :

$$z^2 = y^2 + (x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$z^2 = 2(x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\sqrt{2}(x+1) \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\sqrt{2}\left(\frac{3 - \sqrt{7}}{2} + 1\right) \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\frac{5 - \sqrt{7}}{\sqrt{2}} \quad [4.38].$$

• as coordenadas do ponto d' são

$$x = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \text{ e } y = \frac{-5 - \sqrt{7}}{2}.$$

Os valores de z são determinados substituindo, em [4.37], x e y pelas coordenadas de d' :

$$z^2 = y^2 + (x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$z^2 = 2(x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\sqrt{2}(x+1) \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\sqrt{2}\left(\frac{3 + \sqrt{7}}{2} + 1\right) \Leftrightarrow$$

$$z = \pm\frac{5 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}} \quad [4.39].$$

Considerando os valores negativos abaixo do eixo das abcissas tomamos, tal como Rivara, $\overline{A'b'}$ e $\overline{A'd'}$ negativos.

$$\text{Logo, } \overline{A'b'} = \frac{-5 + \sqrt{7}}{\sqrt{2}} \text{ e } \overline{A'd'} = \frac{-5 - \sqrt{7}}{\sqrt{2}} \quad [4.40].$$

Para confirmar que os sinais das duas partes Ab' e Ad' são iguais, sigamos os passos da resolução de Rivara.

Substituindo y pela expressão de [4.35] na equação de [4.37] vem $z^2 = 2(x+1)^2$ que resolvida em ordem a x , dá $x = -1 \pm \frac{z}{\sqrt{2}}$.

Substituindo x por $-1 \pm \frac{z}{\sqrt{2}}$ em [4.35], fica $y = \mp \frac{z}{\sqrt{2}}$.

Então,

<p>• Se $x = -1 + \frac{z}{\sqrt{2}}$ e $y = -\frac{z}{\sqrt{2}}$:</p> <p>Substituindo x e y na equação [4.36] fica</p> $\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - 1\right) = 0$ $\Leftrightarrow z^2 - \frac{10z}{\sqrt{2}} + 9 = 0 \quad [4.41]$	<p>• Se $x = -1 - \frac{z}{\sqrt{2}}$ e $y = \frac{z}{\sqrt{2}}$:</p> <p>Substituindo x e y na equação [4.36], fica</p> $\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8\left(-\frac{z}{\sqrt{2}} - 1\right) = 0$ $\Leftrightarrow z^2 + \frac{10z}{\sqrt{2}} + 9 = 0 \quad [4.42]$
---	--

Como o termo independente das equações [4.41] e [4.42] é positivo (+9) as duas soluções de cada uma das equações, $\overline{A'd'}$ e $\overline{A'b'}$, têm o mesmo sinal.

Resolvendo as equações [4.41] e [4.42] confirmam-se os valores de z referentes à recta $b'd'$ já determinados em [4.38] e [4.39].

<p>•Da equação [4.41] resulta</p> $z = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}}.$	<p>•Da equação [4.42] resulta</p> $z = \frac{-5 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}}.$
--	---

De acordo com a interpretação de Rivara, as soluções do problema são dadas pela equação [4.42], que coincidem com as determinadas em [4.40].

Portanto, quer A pertença ao interior da circunferência, quer pertença ao seu exterior, a interpretação geométrica das soluções não contraria o facto de quantidades geométricas “opostas” terem sinais contrários.

Na verdade tanto no caso de A estar sobre a circunferência, no interior ou no exterior da circunferência, as quantidades geométricas com sinais contrários estão em “lados” opostos relativamente à recta que contém o diâmetro da circunferência $[EF]$. No entanto, no caso de A estar no interior da circunferência, as quantidades geométricas com sinais contrárias têm “sentidos” opostos.

Conclusões

Descartes com a sua obra, *La Géométrie* (1637), estabelece como que uma dualidade entre os problemas geométricos e o seu tratamento algébrico. Começou, desde logo, a colocar-se um problema aos geómetras: como interpretar correctamente em termos geométricos, as soluções negativas das equações?

Este problema ocupou vários autores dos séculos subsequentes, entre eles, também, o português José Joaquim Rivara, com relevo para a sua obra *RESOLUÇÃO ANALYTICA DOS PROBLEMAS GEOMETRICOS e Indagação da Verdadeira Origem das Quantidades Negativas*.

Ao longo do estudo do primeiro problema da obra de Rivara pude constatar que o matemático português era profundo conhecedor da matemática do seu tempo e dos estudos e trabalhos com ela relacionados, nomeadamente no que respeitava à geometria analítica e à interpretação das quantidades geométricas negativas:

- as reflexões de D'Alembert acerca da interpretação das quantidades negativas nos seus *Opuscles Mathematiques*;

- a teoria das quantidades negativas de Lazare Carnot apresentada na sua *Géométrie de Position*;

- a interpretação de Bezout das quantidades negativas em problemas geométricos dos seus *Elementos de Analyse Mathematica*;

- a aplicação da álgebra à geometria de Lacroix no *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'application de L'Algèbre a la Géométrie*, com relevo para a “geometria coordenada”, com tradução de curvas por equações;

- complementarmente, a geometria dos *Elementos de Euclides e a geometria dos Princípios Mathematicos* do seu mestre, José Anastácio da Cunha.

O problema de Rivara, embora não seja uma problemática original, apresenta uma resolução que, de alguma forma, podemos considerar como criativa.

Na origem, a questão de Rivara foi estudada por D'Alembert, Bezout, Lacroix, Anastácio da Cunha e ainda referida por Carnot. No entanto, Rivara abordou-a no campo da “geometria coordenada”, um pouco na lógica de Lacroix no seu *Traité*, apesar de algumas dissemelhanças. Os restantes matemáticos referidos estudaram-na na perspectiva da “geometria não coordenada”.

Para além da resolução do problema com base na “geometria coordenada”, Rivara destaca-se de Lacroix pela escolha de outro ponto como origem das coordenadas, procurando, seguindo os mesmos passos, confirmar a razoabilidade do estudo. Mas, tomando por base as

equações usadas por Lacroix, adaptou-as, em função da nova origem das coordenadas, para resolver o seu problema. Acresce que o seu trabalho apresenta um salto qualitativo ao fazer a interpretação geométrica a que Lacroix parece não ter chegado.

Rivara parece dominar sem dificuldades as técnicas algébricas descritas por Lacroix no seu *Traité Élémentaire*, quer no que concerne à tradução de curvas por equações, quer quanto à manipulação dessas equações.

Rivara, apesar de seguir a linha de pensamento do estudo de Lacroix, com incidência na “geometria coordenada”, procurou responder e testar os outros estudos de incidência não coordenada, de D’Alembert e de Bezout, como forma de validar o seu próprio trabalho, nomeadamente no que concerne à sua interpretação geométrica das soluções, o que parece ser a contribuição maior da sua obra. Claro que não devemos deixar de referir que Rivara, pelo menos em Portugal, acaba por dar um contributo para o desenvolvimento da geometria analítica.

Numa primeira abordagem, parece que D’Alembert terá formulado bem o problema, tal como a resolução da equação respectiva, mas terá cometido um erro interpretativo, aliás como quase todos os outros.

Embora Rivara não refira aquele erro de interpretação explicitamente na resposta a D’Alembert, não deixa de ser verdade que ele não o cometeu e apresentou uma solução que respeita a noção de quantidades negativas.

Esta obra parece ser o resultado de um estudo de investigação conduzido sobre o assunto por Rivara e não um manual destinado ao ensino como foi, por exemplo, o tratado dos *Princípios Mathematicos* de Anastácio da Cunha, seu mestre, que o compilou para instrução na Real Casa Pia do Castelo de São Jorge, segundo ele afirma logo na capa da obra.

Em termos de escrita, a obra de Rivara é de difícil leitura e acompanham-na figuras que também não são muito fáceis de analisar; a compreensão é morosa e pouco propícia a conclusões imediatas, por ventura devido a uma restrita identificação entre esta temática e a correspondente na actualidade. Apesar disso, o seu trabalho é revelador de um rigor surpreendente na aplicação de métodos algébricos a problemas geométricos. Rivara explica tudo com muito cuidado, com preocupação de justificação e exemplificação, embora por vezes com uma linguagem pouco assertiva para os padrões da actualidade.

Interessante referir que Rivara demonstra preocupação em fundamentar teoricamente a resolução do problema e em revelar as suas fontes, situação pouco usual para a época.

Questão em aberto:

- Ficaram por estudar os outros problemas da obra de Rivara. A sua análise permitirá com certeza, no futuro, ter uma ideia mais global acerca do pensamento do autor sobre as quantidades negativas e mesmo acerca de outros conhecimentos ao nível da geometria analítica.

Bibliografia

Anastácio da CUNHA, José (1790). *Princípios Mathematicos: Para Instrução dos Alumnos do Collegio de São Lucas, da Real Casa Pia do Castello de São Jorge*. Lisboa: Offic. de Antonio Rodrigues Galhardo.

ALMEIDA, Luís Costa (1892). *O Instituto: Revista Científica e Litteraria*. “Questão entre José Anastácio da cunha e José Monteiro da Rocha” – vol 38 – pp. 562-577 e 626-639. Coimbra: Imprensa da Universidade.

BEZOUT, Étienne (1825). *Elementos de Analyse Mathematica* – Tomo I. Coimbra: Real Imprensa da Universidade. [1ª edição de 1774].

BOYER, Carl B. (2004). *History of analytic Geometry*. Nova York: Dover Publications. [1ª edição de 1956].

BRASSINNE, Emile (1853). *Précis des Oeuvres mathématiques de P. Fermat et de l'arithmétique de Diophante*. Toulouse: impr. de J. M. Douladoure. [Extracto das “Mémoires de l'Académie des sciences de Toulouse” - Gallica]

CAJORI, Florian (1993). *A History of Mathematical Notations* – reimprimido, 2 volumes compilados num único. Chicago: Open Court. [1ª edição com dois volumes de 1928 e 1929].

CARNOT, Lazare (1803). *Géométrie de Position*. Paris: Tipografia de Crapelet.

D'ALEMBERT, Jean le Rond (1987). “Convexe”. *Encyclopédie Méthodique* - Tomo I. Paris: ACL. p. 420. [Edição fac-simile de Paris: Panckoucke ou , Liège: Plomteux. 1784 - Gallica]

D'ALEMBERT, Jean le Rond (1987). “Courbe”. *Encyclopédie Méthodique* - Tomo I. Paris: ACL. pp. 449 - 460. [Edição fac-simile de Paris: Panckoucke ou Liège: Plomteux. 1784 - Gallica]

D'ALEMBERT, Jean le Rond (1987). “Negatif”. *Encyclopédie Méthodique* - Tomo II. Paris: ACL. pp. 445 - 446. [Edição fac-simile de Paris: Panckoucke ou Liège: Plomteux. 1785 - Gallica]

D'ALEMBERT, Jean le Rond (1987). “Situation”. *Encyclopédie Méthodique* - Tomo III. Paris: ACL. pp. 53 - 54. [Edição fac-simile de Paris: Panckoucke ou Liège: Plomteux. 1789 -Gallica]

- D'ALEMBERT, Jean le Rond (1987). "Terme". *Encyclopédie Méthodique* - Tomo III. Paris: ACL. p. 125. [Edição fac-simile de Paris: Panckoucke ou Liège: Plomteux. 1789 -Gallica]
- D'ALEMBERT, Jean le Rond (1973). "Continuité". *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisoné des sciences, des Arts et des Métiers* - Tomo IV. Paris: AUPELF. pp. 116 - 117. [Reprodução da edição de Paris. 1754 - Gallica]
- D'ALEMBERT, Jean le Rond (1973). "Linéaire". *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisoné des sciences, des Arts et des Métiers* - Tomo IX. Paris: AUPELF. p. 554. [Reprodução da edição de Paris. 1765 - Gallica]
- D'ALEMBERT, Jean le Rond (1973). "Sommet". *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisoné des sciences, des Arts et des Métiers* - Tomo XV. Paris: AUPELF. p. 336. [Reprodução da edição de Paris. 1765 - Gallica]
- D'ALEMBERT, Jean le Rond (1973). "Tangente". *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisoné des sciences, des Arts et des Métiers* - Tomo XV. Paris: AUPELF. pp. 98 - 102. [Reprodução da edição de Paris. 1765 - Gallica]
- D'ALEMBERT, Jean le Rond (1805). *Essai sur les elemens de Philosophie* (pp. 289-303). [1ª edição de 1759].
- D'ALEMBERT, Jean le Rond (1780). "Recherche sur les quantités négatives", *Opuscules Mathématiques*, Tomo VIII, pp. 270-279. Paris: Claude-Antoine Jombert [Gallica].
- DESCARTES, René (2001). *A Geometria*. Estoril: Editorial Prometeu. (a 1ª ed., em Francês, é de 1637).
- DOMINGUES, João Caramalho M. (2007). *The Calculus According to S.F. Lacroix* (1765-1843). Londres: Middlesex University.
- EUCLIDES (1768). *Elementos de Euclides: dos seis primeiros livros, do undecimo, e duodecimo* – da versão latina de Federico Commandino adicionados e ilustrados por Roberto Simson. Lisboa: Oficina de Miguel Manescal da Costa.
- EULER, Leonard (1774). *Éléments D'algèbre* (vol. 1). Lyon: Chez Jean-Marie Bruyset

EULER, Leonard (1987-1988). *Introduction à l'analyse infinitésimale*. Paris: ACL-édition. Reprodução Fac-Simile da edição de Paris: Barrois, 1796-1797.

FREIRE, Francisco de Castro (1872). *Memoria Histórica da Faculdade de Mathematica nos cem annos decorridos desde a reforma da universidade em 1772 até ao presente*. Coimbra: Imprensa da Universidade.

GUIMARÃES, Rodolphe (1909). *Les Mathématiques em Portugal*. Coimbra: Imprensa da Universidade.

LACROIX, Silvestre François (1807). *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Spherique, et D'Application de L'algèbre a la Géometrie*. Paris: Courcier. Quarta edição. (primeira edição de 1798).

QUEIRÓ, João Filipe (1994). *José Anastácio da Cunha: um matemático a recordar 200 anos depois*, Boletim da SPM, n° 29, pp. 1-18.

RIVARA, José Joaquim (1815). *Resolução Analytica dos Problemas Geométricos, e Indagação da Verdadeira Origem das Quantidades Negativas*. Coimbra: Real Imprensa da Universidade.

SILVA, Inocêncio Francisco (1987). *Diccionario Bibliographico Portuguez*. Lisboa: Imprensa Nacional.

VIÉTE, François (1630). *L'Algebre Nouvelle*. Paris: Casa Pierre Rocolet.